

Минимаксные задачи в тригонометрии

В настоящем листке рассматриваются уравнения, для решения которых используются оценки правой и левой частей. Чтобы стало понятно, о каких задачах идёт речь, начнём с совсем простого примера.

ЗАДАЧА 1. (МГУ, ф-т почвоведения, 2001) Решить уравнение

$$x^2 - \cos(2x^2) + 1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. «Смешанный» вид этого уравнения говорит о том, что здесь требуются нестандартные действия. Запишем уравнение следующим образом:

$$x^2 + 1 = \cos(2x^2). \quad (1)$$

Левая часть (1) удовлетворяет неравенству $x^2 + 1 \geq 1$. В то же время для правой части (1) справедливо противоположное неравенство $\cos(2x^2) \leq 1$. Следовательно, равенство в (1) возможно в том и только в том случае, когда оба указанных неравенства одновременно обращаются в равенства; иными словами, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 1, \\ \cos(2x^2) = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 0$.

ОТВЕТ: $x = 0$.

В общем виде наши рассуждения выглядят следующим образом. Пусть имеется уравнение

$$f(x) = g(x). \quad (2)$$

Функции f и g могут быть устроены так, что это уравнение не решается обычными методами. Предположим, однако, что нам удалось найти такое число M , что для всех допустимых значений x выполнены неравенства $f(x) \geq M$ и $g(x) \leq M$. Тогда равенство (2) достигается в том единственном случае, когда одновременно $f(x) = M$ и $g(x) = M$; иными словами, наше «нерешаемое» уравнение (2) оказывается равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases} \quad (3)$$

А эту систему уже получается решить стандартными приёмами.

Решение системы (3) — это такое значение x , при котором функция $f(x)$ достигает своего минимума и в то же время функция $g(x)$ достигает своего максимума. Поэтому рассматриваемые задачи называются *минимаксными*¹.

ЗАДАЧА 2. («Физтех», 2016) Решите уравнение

$$(\cos x - 3 \cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x.$$

¹Другие названия данного метода — *метод оценок, метод экстремальных оценок, метод мажорант*

РЕШЕНИЕ. Из очевидного неравенства $-4 \leq \cos x - 3 \cos 4x \leq 4$ имеем оценку левой части уравнения: $(\cos x - 3 \cos 4x)^2 \leq 16$. В то же время правая часть не меньше 16. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части одновременно равны 16.

Левая часть равна 16, когда одновременно $\cos x = 1$ и $\cos 4x = -1$ или когда одновременно $\cos x = -1$ и $\cos 4x = 1$. Первый случай невозможен, а во втором имеем $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). При таких x , как нетрудно убедиться, правая часть уравнения равна 16.

ОТВЕТ: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА 3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}.$$

РЕШЕНИЕ. Сумму косинусов превращаем в произведение, а для косинуса суммы пишем формулу половинного угла:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2},$$

откуда

$$4 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 4 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} + 1 = 0. \quad (4)$$

Обозначим

$$t = \cos \frac{x+y}{2}, \quad u = \cos \frac{x-y}{2}.$$

В этих обозначениях уравнение (4) примет вид:

$$4t^2 - 4ut + 1 = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) является квадратным относительно t , причём $|u| \leq 1$. Дискриминант:

$$D/4 = 4(u^2 - 1) \leq 0,$$

поэтому уравнение (5) может иметь корни лишь при нулевом дискриминанте, то есть при $u = \pm 1$. Если $u = 1$, то $t = \frac{1}{2}$, а если $u = -1$, то $t = -\frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение (4) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Имеем (как обычно, $k, l \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2\pi k, \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l. \end{cases}$$

Складываем и вычитаем равенства каждой системы и вводим новые целочисленные величины $m = k + l$, $n = l - k$. Этот последний технический шаг оставляется читателю.

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), m, n \in \mathbb{Z}$.

В минимаксных задачах иногда используется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, справедливое для любых чисел $a, b \geq 0$:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (6)$$

(равенство достигается в единственном случае $a = b$). В частности, если $a > 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (7)$$

(равенство достигается в единственном случае $a = 1$).

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1.$$

РЕШЕНИЕ. В левой части стоит сумма двух взаимно обратных положительных слагаемых, которая в силу неравенства (7) не меньше 2:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) \geq 2.$$

В то же время для правой части имеем оценку сверху:

$$\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1}} \leq 2$$

(поскольку под корнем стоит величина, не превосходящая 1). Следовательно, наше уравнение будет иметь решения лишь в том случае, когда обе части уравнения равны 2 одновременно.

Правая часть равна 2 только при $x = 1$ (это легко видеть из полученной выше оценки для правой части). Левая часть равна 2, только если каждое слагаемое равно 1:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(1+y)) = 1 \Leftrightarrow \pi(1+y) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2n-3}{4} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ОТВЕТ: $x = 1, y = \frac{2n-3}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА 5. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cos x + \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = 1, \\ 4 \cos x - 2 \cos^2 x - \sin^3 y = 3. \end{cases} \quad (8)$$

РЕШЕНИЕ. В силу очевидного тождества $4t - 2t^2 = 2 - 2(1-t)^2$ имеем во втором уравнении:

$$2 - 2(1 - \cos x)^2 - \sin^3 y = 3 \Leftrightarrow 2(1 - \cos x)^2 = -1 - \sin^3 y.$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна, а правая — неположительна; значит, второе уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \cos x = 0, \\ -1 - \sin^3 y = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 2\pi n, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$). Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения x и y удовлетворяют первому уравнению системы (8).

ОТВЕТ: $(2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k), n, k \in \mathbb{Z}$

ЗАДАЧА 6. (МГУ, ВМК, 1986) Решить уравнение:

$$\sin 3x - 2 \sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x.$$

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение так:

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a \sin x - \cos x) = 3\sqrt{2}, \quad (9)$$

где введено обозначение $a = -\sin 18x$. Во-первых, имеем:

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}. \quad (10)$$

Во-вторых, преобразуем выражение в скобках:

$$a \sin x - \cos x = \sqrt{a^2 + 1} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cos x \right).$$

Поскольку выполнено равенство

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right)^2 = 1,$$

существует угол φ такой, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} = \cos \varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sin \varphi.$$

Таким образом,

$$a \sin x - \cos x = \sqrt{a^2 + 1} (\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + 1} \sin(x - \varphi).$$

Из этого тождества и с учётом неравенства

$$a^2 = \sin^2 18x \leq 1 \quad (11)$$

имеем:

$$a \sin x - \cos x \leq \sqrt{a^2 + 1} \leq \sqrt{2}. \quad (12)$$

Теперь сложим неравенство (10) с удвоенным неравенством (12):

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a \sin x - \cos x) \leq 3\sqrt{2}.$$

Сопоставляя это с нашим уравнением (9), мы приходим к выводу, что в каждом из неравенств (10), (11) и (12) должны одновременно достигаться равенства. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем (для случаев $a = 1$ и $a = -1$):

$$\begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}, \\ -\sin 18x = 1, \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}, \\ -\sin 18x = -1, \\ -\sin x - \cos x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

После очевидных преобразований:

$$\begin{cases} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \\ \sin 18x = -1, \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \\ \sin 18x = 1, \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1. \end{cases}$$

В первой системе решениями третьего уравнения являются значения $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, которые удовлетворяют первому и второму уравнениям. Эти значения — решения исходного уравнения.

Во второй системе решениями третьего уравнения являются значения $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, которые не удовлетворяют второму уравнению и потому не являются решениями исходного уравнения.

ОТВЕТ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (\sin y + \cos y) + 2 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni y, u, yu + \sqrt{u} \sin y = x, u\sqrt{u} + \frac{y}{\sqrt{u}} = n \text{ или } yu + \sqrt{u} \sin y - x = u\sqrt{u} + \frac{y}{\sqrt{u}} = n$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y).$$

$$\mathbb{Z} \ni y, u, yu + \frac{\sqrt{u}}{u} - \frac{y}{u} = n, \frac{\sqrt{u}}{u} + \frac{y}{u} = x$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Решите неравенство

$$\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geq 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{u} + \frac{\sqrt{u}}{u}$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решите уравнение

$$\sin^2\left(\frac{2013x}{2}\right) \cdot \cos^2(2014x) \cdot \sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{u} + u$$

5. («Физтех», 2016) Решите уравнение

$$(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{u} + \frac{\sqrt{u}}{u}$$

6. (ОММО, 2013) Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u, y, u\sqrt{u} + \frac{\sqrt{u}}{u} = z, u\sqrt{u} + \frac{\sqrt{u}}{u} = n, yu + \frac{y}{u} \mp x$$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Определите минимальное значение величины $|x + y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению

$$5 \cos(x + 4y) - 3 \cos(x - 4y) - 4 \sin(x - 4y) = 10.$$

$$\frac{8}{3} \cos \frac{8}{3} - \frac{8}{3}$$

$$f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi \sin x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi \sin x}{4}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{32 + 4x - x^2} + 2x - 2}{x - 1}$$
$$\{8, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{7}{\sqrt{5}}\} \cap (1;0) \cap (0;\sqrt{-}) \cap (\sqrt{-};4-]$$
$$f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}} + \frac{\sqrt{21+4x-x^2}}{2x+1}$$
$$\left\{ \mathcal{Z}, \frac{9}{\mathcal{Y}11}, \frac{9}{\mathcal{Y}9} \right\} \cap \left(\frac{\mathcal{Z}}{1} - ; \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Y}} - \right) \cap \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Y}} - ; \mathcal{E} - \right)$$
$$\left(\cos x \sin x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^5 x}{\sin x}\right)^2 - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \sin(9\pi y) = 0$$

8058

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi(x-y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(x-y) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 10. \end{cases}$$
$$\left(1, \frac{1}{2n+5}\right), u_{-8, -7, \dots, -3}$$
$$\begin{cases} 2 \sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2 \cos^2 x + 4 \sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$
$$\mathbb{Z} \ni y, u, k \Big(y\pi z + u\pi z + \frac{z}{u} \Big)$$
$$\sqrt{2} + \cos x = \left| \cos \frac{4x}{3} \right| \sin x.$$
$$\mathbb{Z} \in u, u \vdash 9 + \frac{4}{3\pi}$$

22. («Физтех», 2010) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x - \sqrt{3} \cos y = \frac{5}{2}, \\ \sin y + \sqrt{2} \cos x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, v : (u \sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} - (v \sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}))$$

23. (МГУ, ВМК, 1992) Решить уравнение:

$$\sqrt{1 + \cos 6x} \sin \frac{3x}{2} = 2\sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u : \frac{5}{u \sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = x$$

24. (МГУ, географич. ф-т, 1998) Решить уравнение:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 + 3 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u : u \sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} = x$$

25. (МГУ, ф-т психологии, 1993) Найти все корни уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

$$-\frac{21}{\sqrt{2}} : \frac{21}{\sqrt{2}} = x$$

26. (МГУ, ф-т психологии, 1992) Решить неравенство:

$$3 \sin 2\pi x \geq \sqrt{2} \sin 4\pi x + 3 \cos 2\pi x + \sqrt{32}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u : u + \frac{8}{\sqrt{2}} = x$$

27. (МГУ, химический ф-т, 1991) Решить уравнение:

$$\cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x \cos 8x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u : \frac{2}{u \sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = x$$

28. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) Решить уравнение:

$$8 \cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, v : (u - v) \sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} \pm (u \sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}) = x$$

29. (МГУ, ф-т почвоведения, 1981) Решить уравнение:

$$\frac{3 + 2 \cos(x - y)}{2} = \frac{\sin^2(x - y)}{2} + \sqrt{3 + 2x - x^2} \cos^2 \frac{x - y}{2}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\sqrt{x} + \frac{z}{x} + 1 = \sqrt{x} \cdot 1 = x$$

30. (МГУ, физический ф-т, 1984) Решить систему:

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin 5\pi x + \sin(\pi(2y^2 - x)) - \sqrt{x(x-6)+13} \cos\left(\pi\left(y^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0. \end{cases}$$

$$\dots \cdot 6 - \cdot 01 - = u \cdot \frac{z}{u+01} \wedge \pm 1 = \sqrt{x} \cdot \frac{z}{u+01} \wedge \mp \varepsilon - \frac{v}{u} = x : \mathbb{N} \ni \sqrt{x} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}} - v = x$$

31. (МГУ, ВМК, 1983) Решить уравнение:

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5\pi^2}{4} = \sqrt{2 - |y|} \cdot \left(5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}\right).$$

$$\sqrt{x} \mp \sqrt{x} \cdot 1 = x$$

32. (МГУ, ВМК, 1986) Решить уравнение:

$$2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x \cos x + 2 \cos 5x - 6.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\sqrt{z} + \frac{\varepsilon}{x} = x$$

33. (МГУ, экономич. ф-т, 1990) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)} \cos(\pi x) + \sin(\pi x) = \sqrt{2}$$

на отрезке $[-3; 1]$.

$$\frac{v}{1} \cdot \frac{v}{z} -$$

34. (МГУ, географич. ф-т, 2001) Решить уравнение:

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

$$\varepsilon = x$$