

## Исследование тригонометрических функций

Напомним, что функция  $f(x)$  называется *периодической*, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого  $x$  из области определения функции  $f$  оба числа  $x \pm T$  также принадлежат её области определения и выполнены равенства  $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ . Число  $T$  при этом называется *периодом* данной функции.

Основные тригонометрические функции являются периодическими. Так, функции  $\sin x$  и  $\cos x$  имеют наименьший положительный период  $2\pi$ ; функции  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  имеют наименьший положительный период  $\pi$ .

**ЗАДАЧА.** Докажите, что функция  $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$  является периодической, и найдите её наименьший положительный период.

**РЕШЕНИЕ.** Легко видеть, что

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin(2(x + 2\pi)) + \cos(3(x + 2\pi)) = \\ &= \sin(2x + 4\pi) + \cos(3x + 6\pi) = \sin 2x + \cos 3x = f(x), \end{aligned}$$

поэтому функция  $f(x)$  периодична с периодом  $2\pi$ . Найдём её наименьший положительный период.

Пусть  $T$  — некоторый период функции  $f(x)$ . Тогда для любого  $x$  имеем:

$$\begin{aligned} \sin(2(x + T)) + \cos(3(x + T)) &= \sin 2x + \cos 3x, \\ \sin(2x + 2T) - \sin 2x &= \cos 3x - \cos(3x + 3T), \end{aligned}$$

что после преобразования разностей синусов и косинусов в произведения приводит к равенству

$$\sin T \cos(2x + T) = \sin \frac{3T}{2} \sin \left( 3x + \frac{3T}{2} \right). \quad (1)$$

Это равенство, напомним, должно выполняться *при всех*  $x \in \mathbb{R}$ . Для этого достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \sin T = 0, \\ \sin \frac{3T}{2} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

то есть

$$\begin{cases} T = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ T = \frac{2\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из этих равенств имеем  $3k = 2m$ , откуда  $k$  — чётное число,  $k = 2n$  (и тогда  $m = 3n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ). Следовательно,  $T = 2\pi n$ .

Покажем теперь, что система (2) является также и необходимым условием выполнимости равенства (1) при любом  $x$  (иными словами, других периодов, кроме  $2\pi n$ , наша функция иметь не может). В самом деле, пусть  $T \neq 2\pi n$  и пусть  $x = -\frac{T}{2}$ . Тогда левая часть (1) равна  $\sin T \neq 0$ , а правая часть равна нулю. Значит, равенство (1) не может быть выполнено при всех  $x$ .

Таким образом, все периоды нашей функции даются формулой  $T = 2\pi n$ , ( $n$  — ненулевое целое число), а наименьшим положительным периодом будет число  $2\pi$ .

На олимпиадах и экзаменах встречаются задачи, в которых требуется найти множество значений тригонометрической функции, наибольшее и наименьшее значения и т. д.

ЗАДАЧА. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005) Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции  $y = \cos 2x - 3 \sin x$  принадлежит отрезку  $[-4; \sqrt{5}]$ .

РЕШЕНИЕ. Имеем:  $y = 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x$ . Сделаем замену  $t = \sin x$ . Когда  $x$  пробегает все значения из  $\mathbb{R}$ , величина  $t$  пробегает все значения из отрезка  $[-1; 1]$ . Поэтому задача сводится к нахождению множества значений квадратичной функции  $y(t) = -2t^2 - 3t + 1$  на отрезке  $I = [-1; 1]$ .

Графиком функции  $y(t)$  служит парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы  $t_0 = -\frac{3}{4}$  принадлежит отрезку  $I$ , поэтому наибольшее значение функции на данном отрезке достигается в вершине параболы:

$$y_{\max} = y(t_0) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{17}{8}.$$

Наименьшее значение функции  $y(t)$  на отрезке  $I$  достигается на одном из концов отрезка. Вычисляем:

$$y(-1) = 2, \quad y(1) = -4 \Rightarrow y_{\min} = -4.$$

Итак, множество значений нашей функции на отрезке  $I$  есть отрезок  $E(y) = [-4; \frac{17}{8}]$ . Остаётся сравнить числа  $\frac{17}{8}$  и  $\sqrt{5}$ . Имеем:

$$\frac{17}{8} - \sqrt{5} = \sqrt{\frac{289}{64}} - \sqrt{5} = \sqrt{\frac{289}{64}} - \sqrt{\frac{320}{64}} < 0.$$

Поэтому  $E(y) \subset [-4; \sqrt{5}]$ , так что утверждение задачи верно.

ЗАДАЧА. (МФТИ, 1996) Дана функция

$$f(x) = \frac{2 \sin^4 x + 3 \cos^2 x}{2 \cos^4 x + \sin^2 x}.$$

Найти:

- 1) корни уравнения  $f(x) = \frac{15}{7}$ ;
- 2) наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$ .

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$f(x) = \frac{2 \sin^4 x + 3(1 - \sin^2 x)}{2(1 - \sin^2 x)^2 + \sin^2 x};$$

после замены  $t = \sin^2 x$  и несложных преобразований получаем функцию

$$f(t) = \frac{2t^2 - 3t + 3}{2t^2 - 3t + 2} = 1 + \frac{1}{2t^2 - 3t + 2}, \quad t \in [0; 1]. \quad (3)$$

Приравнивая данное выражение к  $\frac{15}{7}$ , легко получаем  $16t^2 - 24t + 9 = 0$ , то есть  $(4t - 3)^2 = 0$ . Отсюда  $t = \frac{3}{4}$ ,  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Это ответ на вопрос пункта 1.

Требование пункта 2 равносильно следующему: найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(t)$  на отрезке  $I = [0; 1]$ . Для этого запишем (3) в виде

$$f(t) = 1 + \frac{1}{\varphi(t)},$$

где  $\varphi(t) = 2t^2 - 3t + 2$ . Дискриминант данного квадратного трёхчлена меньше нуля, поэтому функция  $\varphi(t)$  принимает только положительные значения.

Графиком функции  $\varphi(t)$  служит парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины  $t_0 = \frac{3}{4}$  принадлежит отрезку  $I$ , поэтому наименьшее значение функции  $\varphi(t)$  на  $I$  достигается в вершине:

$$\varphi_{\min} = \varphi(t_0) = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{7}{8}.$$

Наибольшего значения функция  $\varphi$  достигает на одном из концов отрезка  $I$ :

$$\varphi(0) = 2, \quad \varphi(1) = 1 \Rightarrow \varphi_{\max} = 2.$$

Теперь находим наибольшее и наименьшее значения функции  $f$ :

$$f_{\max} = 1 + \frac{1}{\varphi_{\min}} = 1 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7};$$

$$f_{\min} = 1 + \frac{1}{\varphi_{\max}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

ОТВЕТ: 1)  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\frac{15}{7}$  и  $\frac{3}{2}$ .

В некоторых случаях можно исследовать тригонометрическую функцию с помощью так называемого *метода вспомогательного аргумента*. Напомним, что речь идёт о следующем преобразовании:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right),$$

и поскольку

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

точка с координатами  $\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$  расположена на единичной окружности; следовательно, существует такой угол  $\varphi$ , что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поэтому

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что множество значений функции  $a \cos x + b \sin x$  есть отрезок  $[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$ .

ЗАДАЧА. (МГУ, геологич. ф-т, 1981) Принимает ли функция

$$y = \sin^2 x - 12 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$$

хотя бы в одной точке положительное значение?

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$y = \frac{1 - \cos 2x}{2} - 6 \sin 2x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 2\sqrt[3]{66} = \cos 2x - 6 \sin 2x + 2 - 2\sqrt[3]{66}.$$

Вводя вспомогательный аргумент, получим

$$y = \sqrt{37} \cos(2x + \varphi) + 2 - 2\sqrt[3]{66},$$

где

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{37}}, \quad \sin \varphi = \frac{6}{\sqrt{37}}.$$

Если  $x = -\frac{\varphi}{2}$ , то

$$y_{\max} = \sqrt{37} + 2 - 2\sqrt[3]{66}.$$

Обозначим  $p = \sqrt{37} + 2$  и  $q = 2\sqrt[3]{66}$ . Тогда  $y_{\max} = p - q$ , и нужно сравнить данную разность с нулём. Заметим при этом, что  $p - q$  имеет тот же знак, что и  $p^3 - q^3$ . Вычисляем:

$$p^3 = (\sqrt{37} + 2)^3 = 230 + 49\sqrt{37}, \quad q^3 = 528,$$

откуда

$$p^3 - q^3 = 49\sqrt{37} - 298 = \sqrt{88837} - \sqrt{88804} > 0.$$

Следовательно,  $y_{\max} > 0$ , и поэтому ответ на вопрос задачи — утвердительный.

**ЗАДАЧА.** («Ломоносов», 2014) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{2(\sqrt{3} \sin x - \cos x) \cos 3x - \cos 6x - 7}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Обозначим данное выражение через  $f$  и преобразуем его:

$$f = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{4(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x) \cos 3x - (2 \cos^2 3x - 1) - 7} = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{4 \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos 3x - 2 \cos^2 3x - 6}.$$

Обозначим также  $a = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ ,  $b = \cos 3x$ . Имеем:

$$f = \frac{a}{4ab - 2b^2 - 6} = \frac{-a}{2(a - b)^2 + 6 - 2a^2}.$$

Знаменатель последней дроби положителен. Чтобы не связываться со знаком  $a$ , оценим модуль полученного выражения с учётом неравенств  $(a - b)^2 \geq 0$  и  $|a| \leq 1$ :

$$|f| = \frac{|a|}{2(a - b)^2 + 6 - 2a^2} \leq \frac{|a|}{6 - 2a^2} \leq \frac{1}{6 - 2 \cdot 1} = \frac{1}{4},$$

откуда

$$-\frac{1}{4} \leq f \leq \frac{1}{4}.$$

Если  $x = \frac{2\pi}{3}$ , то  $a = b = 1$ , и тогда в оценке снизу достигается равенство. Следовательно, наименьшее значение величины  $f$  равно  $-\frac{1}{4}$ .

## Задачи

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Сравните числа  $(\sin 1 + \cos 1)$  и  $\frac{49}{36}$ . Ответ обоснуйте.

Первое число больше

2. (Всеросс., 2015, МЭ, 11) Не используя калькулятора, определите знак числа

$$(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1).$$

Минус

3. («Физтех», 2013) Сколько существует натуральных  $n$  таких, что функция

$$f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{10x}{n}$$

имеет период  $6\pi$ ?

8

4. («Физтех», 2011) Сколько различных целых значений принимает функция

$$f(x) = 17 \sin x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x ?$$

78

5. (МГУ, филологич. ф-т, 1978) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}.$$

$\frac{4}{3}$  и  $\frac{1}{3}$

6. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005) Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции  $y = 2 \cos 4x - \cos 2x$  принадлежит отрезку  $\left[-\frac{3}{\sqrt{2}}; 3\right]$ .

Верно

7. (МГУ, мехмат, 1995) Найти все числа  $k$ , для которых функция

$$y(x) = k(2 \sin x + \cos^2 x + 1)$$

не принимает значений, больших 3.

$[-3; 1]$

8. (МГУ, мехмат, 2010) Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$f(x) = \frac{4}{3 \cos^2 x + 2 \sin x - 1}.$$

$\frac{4}{12}$

9. («Физтех», 2011) Найдите наименьшее значение выражения

$$3 \sin^2 \alpha + 7 \cos^2 \alpha + 8 \sin^4 \alpha + 12 \cos^4 \alpha.$$

6,2

10. («Ломоносов», 2015) Найдите наименьшее значение выражения

$$\left(3\sqrt{2(1+\cos 2x)} - \sqrt{8-4\sqrt{3}\sin x} + 2\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{11-\sqrt{3}\cos y} - \cos 2y\right).$$

$4\sqrt{3}-4$

11. («Ломоносов», 2016) Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции

$$f(x) = 14125 \sin^2 x + 20 \cos^2 x + 24180 \sin 2x - 6048 \cos x - 8064 \sin x + 6025.$$

48365

12. («Ломоносов», 2012) Найдите множество значений функции

$$y(x) = \operatorname{tg}^2 2x + 6 \sin x - 2 \cos 2x - \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

$\{1 - \sqrt{2}\} \cup [2; \frac{7}{12}]$

13. (МФТИ, 1996) Дана функция

$$f(x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Найти:

- 1) корни уравнения  $f(x) = \frac{7}{10}$ ;
- 2) наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$ .

$\frac{7}{10}$  и  $1$  ( $\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{10} + \frac{9}{2} \mp 1$ )

14. («Физтех», 2015, 10) Дана функция

$$g(x) = \frac{2 \cos^4 x + \sin^2 x}{2 \sin^4 x + 3 \cos^2 x}.$$

Найдите:

- а) корни уравнения  $g(x) = \frac{1}{2}$ ;
- б) наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x)$ .

$\frac{91}{2}$  и  $\frac{8}{7}$  ( $\mathbb{Q} \ni u, u\sqrt{2} + \frac{7}{2}, \frac{7}{10} + \frac{7}{2} (e$ )

15. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \cos x + 4 \cos \frac{x}{2} + 7 \cos \frac{x}{4} + 6 \cos \frac{x}{8}.$$

6- и 81

16. (МГУ, ф-т почвоведения, 1997) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\left( -3\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{3} \cos x} - 1 \right) \left( \frac{1 - \cos 2y}{2} + \sqrt{11 - \sqrt{3} \cos y} + 1 \right).$$

$(\sqrt{2} - \sqrt{11} + 1) - \sqrt{2} - 01$

17. («Ломоносов», 2014) Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos 4x - \cos 8x - 5}.$$

$\frac{7}{1}$

18. (ОММО, 2009) Найдите сумму всех корней уравнения

$$2\cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку  $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}]$ .

0

19. (МГУ, экономич. ф-т, 2000) Про функцию  $f(x)$  известно, что она определена на отрезке  $[\frac{1}{6}; 6)$  и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12 \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{10}{x}, \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решить неравенство  $f(x) \leq \frac{\pi}{8}$ .

$[9; 2^{\wedge} 8]$

20. (Олимпиада ВШЭ, 2011, 11) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \cos(\cos(\cos x)).$$

$\cos$  и  $(\cos)\cos$