# Плоские множества

**1.** (*Всеросс., 2015, I этап, 8*) На координатной плоскости есть точки, координаты $(x, y)$ которых удовлетворяют уравнению $y(x+1) = x^2 - 1$. Например, одна из них — точка с координатами $(1, 0)$. Изобразите *все* точки, координаты $(x, y)$ которых удовлетворяют этому уравнению.

Пара прямых

**2.** (*Всеросс., 2015, I этап, 10*) Постройте график функции $y = \dfrac{x^2}{|x|}$.

**3.** (*Всеросс., 2015, I этап, 11*) Постройте график функции $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

**4.** (*Всеросс., 2014, I этап, 10–11*) Постройте график функции $y = (\sqrt{x})^2 + \left(\sqrt{x-1}\,\right)^2$.

**5.** (*Всеросс., 2015, I этап, 9*) Постройте график уравнения

$$x^2 - y^4 = \sqrt{18x - x^2 - 81}\,,$$

то есть изобразите на координатной плоскости *все* точки, координаты $(x, y)$ которых удовлетворяют этому уравнению.

Пара точек

**6.** (*«Физтех», 2016, 9*) Изобразите на плоскости $(x, y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leqslant 16, \\ y - 3x \leqslant 0, \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$\frac{20}{3} + \pi$

**7.** (*«Физтех», 2016, 9–10*) Изобразите на плоскости $(x, y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

30

**8.** (*«Физтех», 2016, 10*) Изобразите на плоскости $(x, y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\left|16 + 6x - x^2 - y^2\right| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$12 + 25\pi - 25 \arcsin \frac{4}{5}$

**9.** (*«Физтех», 2016, 11*) Дана система уравнений

$$\begin{cases} \left|9+8y-x^2-y^2\right| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a+4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x, y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

а) $12 + 25\pi - 25 \arcsin \frac{3}{5}$; б) $-6$, $-3$

**10.** (*«Физтех», 2016, 11*) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4\cos\dfrac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{15}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x, y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

а) $60$; б) $-36$, $32$

**11.** (*«Физтех», 2017, 10*) а) Изобразите на координатной плоскости фигуру $\Phi$, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leqslant 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y - 1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры $\Phi$ и расстояние от точки $T(0, 4)$ до ближайшей точки фигуры $\Phi$.

б) $2\pi$; $2\sqrt{2} - 2$

**12.** (*«Физтех», 2017, 10*) Изобразите на плоскости фигуру $\Phi$, состоящую из точек $(x, y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leqslant 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура $\Phi$.

**13.** (*«Высшая проба», 2014, 10–11*) На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке $(11, 1)$ пересекает это множество в точках $A$, $B$, $C$ и $D$. Докажите, что все точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат на одной параболе, т. е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$

**14.** (*«Высшая проба», 2017, 10*) Парабола $x = y^2$ пересекается с некоторой окружностью в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на некоторой параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, или на паре параллельных прямых.

**15.** (*ОММО, 2009*) Пусть $x$ и $y$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leqslant 5, \\ y + 4x \leqslant -5, \\ 3y + 2x \geqslant -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые может принимать функция $x^2 + y^2$.

$\boxed{\left[\frac{25}{17}; 17\right]}$

**16.** (*«Ломоносов», 2011, 10–11*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geqslant 0, \\ -1 - x^2 \leqslant y \leqslant 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

$\boxed{4}$

**17.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\big||x| - 6\big| + \big||y| - 7\big| \leqslant 10.$$

$\boxed{700}$

**18.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения $y$, при каждом из которых ни одно значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$\log_2 (|x| + |y|) \leqslant 2,$$

не удовлетворяет неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}} (|x| + |y + 4|) \geqslant -2.$$

$\boxed{(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)}$

**19.** (*ОММО, 2010*) Изобразите на координатной плоскости множество точек $(a, b)$ таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{|b| \leqslant \sqrt{2}|a|}$

**20.** (*ОММО, 2011*) Плоская фигура $W$ представляет собой множество всех точек, координаты которых $(x, y)$ удовлетворяют неравенству

$$\left(|x| + \big|4 - |y|\big| - 4\right)^2 \leqslant 4.$$

Нарисуйте фигуру $W$ и найдите её площадь.

$\boxed{120}$

**21.** (*«Ломоносов», 2007*) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}}$

**22.** (*«Высшая проба», 2012, 9*) При каких значениях $b$, $b \neq 3$, объединение парабол $y = x^2$ и $y = (b-3)x^2 + bx + 2b - 4$ имеет ось или центр симметрии?

$\boxed{b \in \{0, 2, 4\}}$

**23.** (*«Высшая проба», 2012, 10*) Сколько точек, обе координаты которых натуральны, лежит строго внутри области, ограниченной графиком функции $y = -x^3 + 30x^2 - 300{,}6x + 2012$ и осями координат?

$\boxed{19103}$

**24.** (*«Высшая проба», 2012, 11*) При каком значении параметра $a$ график многочлена

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 + ax$$

симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы $c$?

$\boxed{a = -9}$

**25.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Гипербола $y = 5/x$ пересекается с прямой $2x + y = 12$ в точках $A$ и $B$, а с прямой $x + 2y = 8$ — в точках $C$ и $D$. Найдите координаты точки, равноудалённой от точек $A$, $B$ и $C$.

$\boxed{(7, 8)}$