Уравнения с модулем

Содержание

В данной статье мы изучаем алгебраические уравнения, в которых переменная находится под знаком модуля. Рассматриваемые уравнения не содержат знаков радикала, а также тригонометрических, показательных и логарифмических функций; такие комбинированные задачи будут предметом отдельных статей.

1 Определение модуля

По определению **модуль** числа a есть следующая величина:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Например, $|7| = 7$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$. Одного лишь определения модуля уже хватает, чтобы начать решать задачи вступительных экзаменов в МГУ!

Задача 1. (*МГУ, физический ф-т, 1983*) Решить уравнение

$$\left|2 - 5x^2\right| = 3.$$

Решение. Если модуль числа равен 3, то само число равно 3 или -3. Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2 - 5x^2 = 3, \\ 2 - 5x^2 = -3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = -\dfrac{1}{5}, \\ x^2 = 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет решений, второе имеет корни ± 1.

Ответ: ± 1.

Задача 2. (*МГУ, геологич. ф-т, 1979*) Решить уравнение

$$|2x - 3| = 3 - 2x.$$

Решение. Если модуль числа равен этому числу со знаком минус, то само число неположительно ($|a| = -a$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant 0$). Следовательно, наше уравнение равносильно неравенству

$$2x - 3 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

Задача 3. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2001*) Решить уравнение

$$|x^2 - 13x + 35| = |35 - x^2|.$$

Решение. Если модули двух чисел равны, то эти числа могут отличаться самое большее знаком:

$$|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &a = b, \\ &a = -b. \end{aligned}\right.$$

Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - 13x + 35 = 35 - x^2, \\ &x^2 - 13x + 35 = x^2 - 35 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &2x^2 - 13x = 0, \\ &13x = 70. \end{aligned}\right.$$

Дальнейшее элементарно.

Ответ: 0, $\frac{13}{2}$, $\frac{70}{13}$.

2 Замена переменной

В некоторых ситуациях удобно сделать замену $|x - a| = t$, пользуясь тем, что

$$(x - a)^2 = |x - a|^2 = t^2.$$

Задача 4. (*МГУ, физический ф-т, 1996*) Решить уравнение

$$(x - 7)^2 - |x - 7| = 30.$$

Решение. Делаем замену $|x - 7| = t$ и получаем:

$$t^2 - t - 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &t = 6, \\ &t = -5 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &|x - 7| = 6, \\ &|x - 7| = -5. \end{aligned}\right.$$

Второе уравнение полученной совокупности не имеет решений (так как модуль не может быть отрицательным). Решениями первого уравнения служат числа 1 и 13.

Ответ: 1, 13.

3 Перебор промежутков

В некоторых задачах модуль снимается в процессе рассмотрения различных случаев знаков выражения под модулем с использованием непосредственно определения (1).

Задача 5. Решить уравнение

$$|2 - x| = 5 - 4x.$$

Решение. Имеем два случая, в зависимости от знака выражения под модулем. А именно, уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2 - x \geqslant 0, \\ 2 - x = 5 - 4x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 - x < 0, \\ x - 2 = 5 - 4x. \end{cases}$$

Решение первой системы: $x = 1$. У второй системы решений нет.

Ответ: 1.

Не всегда бывает очевидно, принадлежит ли полученное значение x «текущему» промежутку, и тогда приходится использовать оценки.

Задача 6. Решить уравнение

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

Решение. Как и в предыдущей задаче, в зависимости от знака выражения $x - 3$ имеем два случая.

1) $x \geqslant 3$. Снимаем модуль:

$$x^2 + 4(x - 3) - 7x + 11 = 0,$$
$$x^2 - 3x - 1 = 0,$$
$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Число x_2, будучи отрицательным, не удовлетворяет условию $x \geqslant 3$ и потому не является корнем исходного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли данному условию число x_1. Для этого составим разность и определим её знак:

$$x_1 - 3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{2} > 0.$$

Значит, x_1 больше трёх и потому является корнем исходного уравнения.

2) $x < 3$. Снимаем модуль:

$$x^2 + 4(3 - x) - 7x + 11 = 0,$$
$$x^2 - 11x + 23 = 0,$$
$$x_3 = \frac{11 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_4 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2}.$$

Число x_3 больше, чем $11/2$, и потому не удовлетворяет условию $x < 3$. Проверим x_4:

$$x_4 - 3 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2} - 3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{29}}{2} < 0.$$

Значит, x_4 является корнем исходного уравнения.

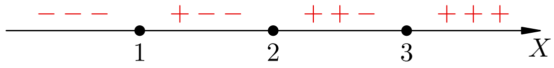
Ответ: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{11-\sqrt{29}}{2}$.

Задача 7. Решить уравнение

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4.$$

Решение. Казалось бы, нас ждёт рассмотрение шести случаев (три выражения под модулем, два знака). Но мы поступим разумнее — используем хорошо знакомый нам метод интервалов.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка. Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных промежутках. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, мы «экономим на случаях»: нам нужно рассмотреть не шесть случаев, а четыре (когда x находится в каждом из промежутков).

Случай 1: $x \geqslant 3$. Все модули снимаются «с плюсом»:

$$x - 1 - 2(x-2) + 3(x-3) = 4,$$
$$x = 5.$$

Полученное значение $x = 5$ удовлетворяет условию $x \geqslant 3$ и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2: $2 \leqslant x \leqslant 3$. Последний модуль теперь снимается «с минусом»:

$$x - 1 - 2(x-2) + 3(3-x) = 4,$$
$$x = 2.$$

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: $1 \leqslant x \leqslant 2$. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$x - 1 - 2(2-x) + 3(3-x) = 4,$$
$$4 = 4.$$

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка. Это означает, что все числа из промежутка $[1;2]$ служат решениями данного уравнения.

Случай 4: $x \leqslant 1$. Все модули снимаются «с минусом»:

$$1 - x - 2(2-x) + 3(3-x) = 4,$$
$$x = 1.$$

Ничего нового. Мы и так знаем, что $x = 1$ является решением.

Ответ: $[1;2] \cup \{5\}$.

Задача 8. Решить уравнение

$$||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10.$$

Решение. Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) $x \leqslant 3$. Получаем:

$$|3 - x - 2x + 1| = 4x - 10,$$
$$|4 - 3x| = 4x - 10.$$

Выражение под модулем обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$. Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1) $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 3$. Получаем в этом случае:

$$3x - 4 = 4x - 10,$$
$$x = 6.$$

Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) $x \leqslant \frac{4}{3}$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
4 - 3x = 4x - 10, \\
x = 2.
\end{gathered}
$$

Это значение x также не годится. Итак, при $x \leqslant 3$ решений нет.

2) $x \geqslant 3$. Имеем:

$$
\begin{gathered}
|x - 3 - 2x + 1| = 4x - 10, \\
|x + 2| = 4x - 10.
\end{gathered}
$$

Здесь нам повезло: выражение $x + 2$ положительно при $x \geqslant 3$. Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$
\begin{gathered}
x + 2 = 4x - 10, \\
x = 4.
\end{gathered}
$$

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Исследование знака выражения под модулем и раскрытие модуля по определению (1) — метод универсальный, но не всегда самый эффективный. В некоторых случаях можно «выкрутиться» иначе, существенно упростив решение.

4 Равносильные переходы

Рассмотрим уравнение

$$
|A| = B, \tag{2}
$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную. Ясно, что если $B < 0$, то уравнение (2) не имеет решений. Если же $B \geqslant 0$, то уравнение (2) сводится к совокупности двух уравнений $A = \pm B$.

Таким образом, для уравнения (2) имеем равносильный переход:

$$
|A| = B \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B, \end{array} \right. \\ B \geqslant 0. \end{array} \right.
$$

Иными словами, мы решаем два уравнения, $A = B$ и $A = -B$, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию $B \geqslant 0$.

Задача 9. Решить уравнение

$$
|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1.
$$

Решение. Попробуйте ради интереса снять модуль с квадратного трёхчлена, как мы это сделали в предыдущей задаче, и посмотрите, к чему это приведёт. Поэтому мы будем действовать с помощью только что описанного равносильного перехода.

Наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &2x^2 - 3x - 4 = 6x - 1, \\ &2x^2 - 3x - 4 = 1 - 6x, \end{aligned}\right. \\ 6x - 1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение совокупности (3) имеет корни

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{105}}{4}, \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{4}.$$

Второе уравнение совокупности (3) имеет корни

$$x_3 = 1, \quad x_4 = -\frac{5}{2}.$$

Теперь для каждого из полученных корней проверяем выполнение неравенства (3):

$$\begin{aligned} &6x_1 - 1 = 6 \cdot \frac{9 + \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 + 6\sqrt{105}}{4} > 0; \\ &6x_2 - 1 = 6 \cdot \frac{9 - \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 - 6\sqrt{105}}{4} = \frac{\sqrt{2500} - \sqrt{3780}}{4} < 0; \\ &6x_3 - 1 = 6 - 1 > 0; \\ &6x_4 - 1 = -15 - 1 < 0. \end{aligned}$$

Стало быть, годятся лишь x_1 и x_3.
Ответ: 1, $\frac{9+\sqrt{105}}{4}$.

5 Задачи

Во всех задачах требуется решить уравнение или систему уравнений.

Определение модуля

1. $|x^2 - 5x + 4| = 4$.

$\boxed{0,\ 5}$

2. $|x^2 - 3x + 2| = 3x - 2 - x^2$.

$\boxed{[1; 2]}$

3. $|x^2 + x - 3| = |5x - 4|$.

$\boxed{1,\ -7,\ 2 \pm \sqrt{3}}$

4. (*МГУ, физический ф-т, 1983*) $|x^2 - 12| = 4$.

$\boxed{\pm 4,\ \pm 2\sqrt{2}}$

5. (*МГУ, МШЭ, 2005*) $|2x - 4| + 4 = 2x$.

$\boxed{[2; +\infty)}$

6. (*МГУ, химический ф-т, 2005*) $|2x+1| = |x+2|$.

$\boxed{\pm 1}$

7. (*МГУ, химический ф-т, 2001*)

$$\left|\frac{x-1}{x-2}\right| = \left|\frac{x+1}{x+2}\right|.$$

$\boxed{0,\ \pm\sqrt{2}}$

8. (*МГУ, мехмат, 1995*)

$$\frac{|x^3| - |5x|}{\sqrt{2x^2-4x-1} - |x| + 2} = 0.$$

$\boxed{-\sqrt{5}}$

Замена переменной

9. (*МГУ, биологич. ф-т, 2005*) $x^2 + |x| - 6 = 0$.

$\boxed{\pm 2}$

10. (*МГУ, физический ф-т, 1990*) $x^2 - 4|x| - 1 = 0$.

$\boxed{\pm\left(2+\sqrt{5}\right)}$

11. (*МГУ, ВМК, 1994*)

$$\left(4|x-1| + \frac{1}{2}\right)^2 = 11(x-1)^2 + \frac{5}{4}\,.$$

$\boxed{\frac{4}{5},\ \frac{6}{5}}$

12. (*МГУ, филологич. ф-т, 2005*) $\left|x^2 - 3|x| + 1\right| = 1$.

$\boxed{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3}$

Перебор промежутков

13. (*МГУ, химический ф-т, 2000*) $|x| = 2 - x$.

$\boxed{1}$

14. (*МГУ, геологич. ф-т, 1990*)

$$-\frac{|x|}{x} - x = \frac{x^2}{2} + 1.$$

$\boxed{-2}$

15. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2004*) $|5x+1| + 7x + 2 = 0$.

$\boxed{-\frac{1}{2}}$

16. (*МГУ, экономич. ф-т, 1981*) $x^2 - 6x + 8 + |x-4| = 0$.

$\boxed{3,\ 4}$

17. (*МГУ, экономич. ф-т, 2000*) $3|x+2| + x^2 + 6x + 2 = 0.$

$-4,\ -1$

18. (*МГУ, экономич. ф-т, 2000*) $3\sqrt{x^2+2x+1} = 7 + x + \left(\sqrt{-x^2-5x-4}\right)^2.$

-3

19. (*МГУ, ф-т психологии, 2005*) $|x-2| + 2|x+1| = 9.$

± 3

20. (*МГУ, географич. ф-т, 2000*) $|2x+8| - |x-5| = 12.$

$-25,\ 3$

21. (*МГУ, биологич. ф-т, 1995*) $|x-1| + |2x-3| = 2.$

$\frac{2}{3},\ 2$

22. (*МГУ, географич. ф-т, 1996*) $|5x-3| - |7x-4| = 2x-1.$

$(-\infty; \frac{4}{7}]$

23. (*МГУ, филологич. ф-т, 1988*)

$$\begin{cases} 2|x-2| + 3|y+1| = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

$(\frac{3}{2}, 0),\ (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$

24. (*МГУ, ИСАА, 2003*) $(|x|-5)^2 - |5-x| = 30.$

$11,\ -\frac{11+\sqrt{161}}{2}$

25. (*МГУ, ИСАА, 1997*) $4|x+1| - 1 = 3|2x+5| - 2|x+5|.$

$(-\infty; -5] \cup \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

26. (*МГУ, ВМК, 1997*)

$$\begin{cases} |x^2 - 4y + 3| + y = 1, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$$

$\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{19}-5}{2}, \frac{6-\sqrt{19}}{2}\right)$

27. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2007*) $\big||x-1| - 7\big| = 10.$

$-16,\ 18$

28. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*) $\big||4-x^2| - x^2\big| = 1.$

$\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\ \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

29. (*МГУ, экономич. ф-т, 1989*) $\big|x + 1 + | - x - 3|\big| - 6 = x.$

$\boxed{-4,\ 2}$

30. (*МГУ, ф-т психологии, 1998*) $\big|4x - |x - 2| + 3\big| = 16.$

$\boxed{-\frac{17}{5},\ \frac{11}{3}}$

31. (*МГУ, физический ф-т, 1997*)

$$\begin{cases} y + |x + 1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)}$

Равносильные переходы

32. (*МГУ, геологич. ф-т, 1991*) $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0.$

$\boxed{2,\ 3}$

33. (*МГУ, социологич. ф-т, 2000*) $|x^2 - 3x| = 2x - 4.$

$\boxed{4,\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}}$