

Неравенства с модулем

Содержание

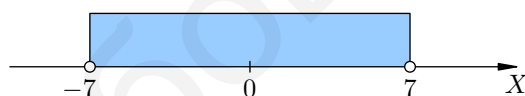
1	Геометрический смысл модуля	1
2	Замена переменной	2
3	Перебор промежутков	3
4	Равносильные переходы	4
5	Задачи	8

Данная статья продолжает предыдущую статью «[Уравнения с модулем](#)». Мы рассматриваем в целом аналогичные ситуации, только вместо знака равенства будет стоять знак неравенства.

1 Геометрический смысл модуля

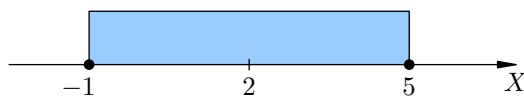
Понятие модуля обладает простым геометрическим смыслом: именно, $|x|$ есть расстояние от точки x до нуля. Более общим образом, $|x - a|$ есть расстояние от точки x до точки a . Давайте рассмотрим несколько элементарных примеров.

1. Решениями неравенства $|x| < 7$ служат все те x , которые удалены от нуля на расстояние, меньшее 7. Они расположены на интервале $(-7; 7)$.



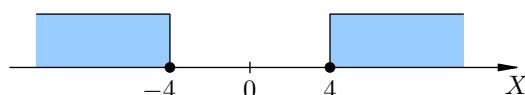
Множество решений неравенства $|x| < 7$

2. Решения неравенства $|x - 2| \leq 3$ суть все те x , которые удалены от точки 2 на расстояние, не превосходящее 3; они заполняют отрезок $[-1; 5]$.



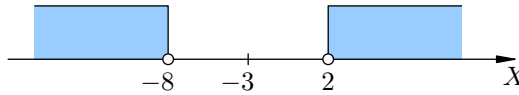
Множество решений неравенства $|x - 2| \leq 3$

3. Решениями неравенства $|x| \geq 4$ являются все x , удалённые от нуля на расстояние, не меньшее 4. Это объединение двух непересекающихся лучей: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.



Множество решений неравенства $|x| \geq 4$

4. Решениями неравенства $|x + 3| > 5$ являются все те x , которые удалены от точки -3 на расстояние, большее 5. Это объединение двух непересекающихся лучей с выколотыми началами: $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$.



Множество решений неравенства $|x + 3| > 5$

ЗАДАЧА 1. (МГУ, геологич. ф-т, 2001) Решить неравенство

$$\frac{|x - 3| + 2}{|2x - 3| - 5} \leq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Числитель дроби положителен при всех x , поэтому данное неравенство равносильно отрицательности знаменателя:

$$|2x - 3| - 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |2x - 3| < 5.$$

Дальше понятно: величина $2x$ удалена от точки 3 на расстояние, меньшее 5:

$$-2 < 2x < 8,$$

откуда $-1 < x < 4$.

ОТВЕТ: $(-1; 4)$.

2 Замена переменной

В некоторых неравенствах оказывается полезной замена $|x - a| = t$.

ЗАДАЧА 2. (МГУ, физический ф-т, 2004) Решить неравенство

$$\frac{|x - 2|}{\frac{12}{|x - 2|} - 1} > 1.$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену $|x - 2| = t$:

$$\frac{t}{\frac{12}{t} - 1} > 1.$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{t^2}{12 - t} > 1,$$

(поскольку запрещённое значение $t = 0$ не является решением последнего), которое, в свою очередь, равносильно

$$\frac{t^2 + t - 12}{t - 12} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t + 4)(t - 3)}{t - 12} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t < -4, \\ 3 < t < 12, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x - 2| < -4, \\ 3 < |x - 2| < 12. \end{cases}$$

Первое неравенство полученной совокупности не имеет решений. Решениями второго неравенства служат значения x , удалённые от точки $x = 2$ на расстояние больше 3, но меньше 12, то есть $-10 < x < -1$ и $5 < x < 14$.

ОТВЕТ: $(-10; -1) \cup (5; 14)$.

ЗАДАЧА 3. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003) Решить неравенство

$$\frac{3|y|}{4} - y^2 \leq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену $|y| = t$:

$$\frac{3t}{4} - t^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \left(t - \frac{3}{4} \right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \leq 0, \\ t \geq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |y| \leq 0, \\ |y| \geq \frac{3}{4}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0, \\ y \geq \frac{3}{4}, \\ y \leq -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(-\infty; -\frac{3}{4}] \cup \{0\} \cup [\frac{3}{4}; +\infty)$.

3 Перебор промежутков

В некоторых неравенствах модуль снимается «в лоб» — путём рассмотрения значений переменной на различных промежутках.

ЗАДАЧА 4. (МГУ, экономич. ф-т, 1984) Решить неравенство

$$2|x - 4| + |3x + 5| \geq 16.$$

РЕШЕНИЕ. Разбираем три случая расположения x относительно точек $-\frac{5}{3}$ и 4.

1) $x \geq 4$. Имеем:

$$\begin{aligned} 2(x - 4) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq \frac{19}{5}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых $x \geq 4$. Иными словами, все числа из промежутка $[4; +\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3} \leq x \leq 4$. Имеем в данном случае:

$$\begin{aligned} 2(4 - x) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество $[3; 4]$.

3) $x \leq -\frac{5}{3}$. Имеем:

$$\begin{aligned} 2(4 - x) - 3x - 5 &\geq 16, \\ x &\leq -\frac{13}{5}. \end{aligned}$$

Так как $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $(-\infty, -\frac{13}{5}]$ служат решениями исходного неравенства.

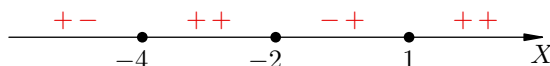
Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

ОТВЕТ: $(-\infty, -\frac{13}{5}] \cup [3; +\infty)$.

ЗАДАЧА 5. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) Решить неравенство

$$|x^2 + x - 2| + |x + 4| \leq x^2 + 2x + 6.$$

РЕШЕНИЕ. Выражение $x^2 + x - 2$ положительно при $x < -2$, $x > 1$ и отрицательно при $-2 < x < 1$. Выражение $x + 4$ положительно при $x > -4$ и отрицательно при $x < -4$. Расставим знаки наших выражений на числовой оси (первым идёт знак квадратного трёхчлена, вторым — знак линейной функции):



Теперь понятно, что нам нужно рассмотреть *три* случая.

1) $x \leq -4$. При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся со знаком плюс, линейная функция — с минусом:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 - x - 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ x &\geq -6. \end{aligned}$$

Таким образом, здесь имеем решения $-6 \leq x \leq -4$.

2) $-4 \leq x \leq -2$ или $x \geq 1$. При снятии модулей оба выражения остаются с плюсом:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 + x + 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ 2 &\leq 6. \end{aligned}$$

Получилось верное числовое равенство. Значит, рассматриваемые значения $-4 \leq x \leq -2$ и $x \geq 1$ являются решениями нашего неравенства.

3) $-2 \leq x \leq 1$. При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся с минусом, линейная функция — с плюсом:

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2 + x + 4 &\leq x^2 + 2x + 6, \\ x^2 + x &\geq 0. \end{aligned}$$

Полученное неравенство имеет решения $x \leq -1$ или $x \geq 0$. В пересечении с рассматриваемым промежутком имеем множество решений исходного неравенства: $-2 \leq x \leq -1$ или $0 \leq x \leq 1$.

Объединяя множества решений в трёх рассмотренных случаях, получаем ответ.

ОТВЕТ: $[-6; -1] \cup [0; +\infty)$.

4 Равносильные переходы

«Лобовое» снятие модуля (путём перебора промежутков) не всегда является самым эффективным средством. В некоторых неравенствах бывает проще переходить к равносильным системам или совокупностям условий.

Умножение на модуль

Как известно, неравенство можно умножить на положительную величину (с сохранением знака неравенства). В частности, имеет место эквивалентность

$$\frac{A}{|B|} < C \Leftrightarrow \begin{cases} A < |B|C, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

(A, B, C — некоторые выражения, знак неравенства может быть любым). Такой переход может сократить вычислительную работу.

ЗАДАЧА 6. (МГУ, ВМК, 1998) Решить неравенство

$$3x < \frac{4x - 2}{|x - 3|}.$$

РЕШЕНИЕ. Непосредственное снятие модуля приводит к двум рациональным неравенствам, но лучше сразу умножить на $|x - 3|$. Наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x|x - 3| < 4x - 2, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x > 3, \\ 3x(x - 3) < 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ 3x^2 - 13x + 2 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} x < 3, \\ 3x(3 - x) < 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 3x^2 - 5x - 2 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решения системы (1) образуют множество $3 < x < \frac{13 + \sqrt{145}}{6}$. Решения системы (2) суть два промежутка $x < -\frac{1}{3}$ и $2 < x < 3$.

ОТВЕТ: $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; 3) \cup (3; \frac{13 + \sqrt{145}}{6})$.

Задача простая, и выигрыш от умножения на модуль здесь не так уж велик. Однако в следующей задаче равносильное умножение неравенства позволит очень существенно сэкономить на выкладках.

ЗАДАЧА 7. (МГУ, мехмат, 2000) Решить неравенство

$$\frac{|x - 5| - |x + 4|}{|x - 2| - |x + 1|} < \frac{|x - 2| + |x + 1|}{|x + 4|}. \quad (3)$$

РЕШЕНИЕ. Непосредственное снятие модулей означает перебор пяти промежутков, что не вызывает энтузиазма. Поэтому действуем иначе: при ограничении $x \neq -4$ умножаем обе части неравенства (3) на положительную величину $\frac{|x + 4|}{|x - 2| + |x + 1|}$ и получаем равносильное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|(x - 5)(x + 4)| - (x + 4)^2}{(x - 2)^2 - (x + 1)^2} < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 8x - 16}{-6x + 3} < 1 &\Leftrightarrow \frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 2x - 19}{2x - 1} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $x \in E_1 = (-\infty; -4) \cup [5; +\infty)$. Тогда $x^2 - x - 20 \geq 0$, и неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{-3x - 39}{2x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 13}{2x - 1} < 0 \Leftrightarrow -13 < x < \frac{1}{2},$$

что в пересечении с множеством E_1 даёт часть решений исходного неравенства (3):

$$\boxed{-13 < x < -4.} \quad (5)$$

Пусть теперь $x \in E_2 = (-4; 5)$. Тогда $x^2 - x - 20 < 0$, и неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{-2x^2 - x + 1}{2x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)(2x - 1)}{2x - 1} < 0,$$

решения которого суть $x < -1$. В пересечении с множеством E_2 получаем вторую часть решений исходного неравенства:

$$\boxed{-4 < x < -1.} \quad (6)$$

Множество решений неравенства (3) есть объединение «рамочек» (5) и (6).

ОТВЕТ: $(-13; -4) \cup (-4; -1)$.

Неравенства вида $|A| < B$

Пусть A и B — некоторые выражения с переменной. Оказывается, неравенство

$$|A| < B \quad (7)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \quad (8)$$

Действительно, если $B > 0$, то эквивалентность (7) $\Leftrightarrow$ (8) очевидна. В случае $B \leq 0$ неравенство (7) не имеет решений; но и система (8) также не имеет решений, поскольку выражение A не может быть одновременно меньше неположительной величины B и больше неотрицательной величины $-B$. Следовательно, и при $B \leq 0$ имеем (7) $\Leftrightarrow$ (8).

На экзамене или олимпиаде вам придётся привести эти рассуждения, доказывающие законность рассмотренного перехода

$$|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \quad (9)$$

Но оно того стоит! Это наглядно демонстрирует следующий пример.

Задача 8. Решить неравенство

$$|x^2 - 3x + 1| < x - 2.$$

РЕШЕНИЕ. Ради интереса попробуйте снять модуль как раньше, исследуя знак квадратного трёхчлена. Во-первых, вы сразу получите иррациональные корни. Затем, после снятия модуля и упрощений, вас поджидают другие иррациональные корни, которые придётся сравнивать с первыми. Однако значительную часть этих технических проблем удаётся обойти, используя переход (9).

А именно, наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 < x - 2, \\ x^2 - 3x + 1 > 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ \begin{cases} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < 1 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Вот и всё. Теперь легко получаем ответ.

ОТВЕТ: $(1 + \sqrt{2}; 3)$.

Переход (9) сохраняет свой вид при замене строгого равенства на нестрогое:

$$|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B, \\ A \geq -B. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство эквивалентности (10) совершенно аналогично тому, что приведено выше.

Неравенства вида $|A| > B$

Неравенство

$$|A| > B \quad (11)$$

равносильно совокупности

$$\begin{cases} A > B, \\ A < -B. \end{cases} \quad (12)$$

В самом деле, если $B \geq 0$, то эквивалентность (11) $\Leftrightarrow$ (12) очевидна. Если же $B < 0$, то неравенство (11) выполнено при всех допустимых значениях x ; но и решением совокупности (12) служат все те же допустимые x , поскольку одно из неравенств совокупности заведомо выполнено (при $A \geq 0$ выполнено $A > B$, а при $A < 0$ выполнено $A < -B$). Следовательно, и при $B < 0$ имеет место эквивалентность (11) $\Leftrightarrow$ (12).

Разумеется, эквивалентность сохраняется при замене строгого неравенства на нестрогое:

$$|A| \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B, \\ A \leq -B. \end{cases} \quad (13)$$

ЗАДАЧА 9. (МГУ, ВМК, 2000) Решить неравенство

$$||x^2 - 8x + 2| - x^2| \geq 2x + 2.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь используются оба эквивалентных перехода (13) и (10). Имеем:

$$\begin{aligned} ||x^2 - 8x + 2| - x^2| \geq 2x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 8x + 2| - x^2 \geq 2x + 2, \\ |x^2 - 8x + 2| - x^2 \leq -2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 8x + 2| \geq x^2 + 2x + 2, \\ |x^2 - 8x + 2| \leq x^2 - 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 2 \geq x^2 + 2x + 2, \\ x^2 - 8x + 2 \leq -x^2 - 2x - 2, \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 2 \leq x^2 - 2x - 2, \\ x^2 - 8x + 2 \geq -x^2 + 2x + 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x^2 - 5x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 1 \leq x \leq 2, \\ x \geq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.

Неравенства вида $|A| < |B|$

Решая неравенство вида $|A| < |B|$ (знак неравенства тут может быть любым), удобно действовать следующим образом: коль скоро обе части неравенства неотрицательны, можно возвести неравенство в квадрат:

$$|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0.$$

Последнее неравенство решается, например, методом интервалов.

ЗАДАЧА 10. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) Решить неравенство

$$|x^2 + 10x + 16| \geq |x^2 - 16|.$$

РЕШЕНИЕ. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 + 10x + 16)^2 \geq (x^2 - 16)^2 \Leftrightarrow (10x + 32)(2x^2 + 10x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{16}{5}\right)x(x + 5) \geq 0.$$

Дальнейшее элементарно.

ОТВЕТ: $[-5; -\frac{16}{5}] \cup [0; +\infty)$.

5 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить неравенство.

Геометрический смысл модуля

1. а) $|x - 6| \leq 4$; б) $|2x + 3| > 11$.

$$(\infty + ; 4) \cap (2 - ; \infty -) \cap [0; 1; 2] \cap \{4\}$$

2. (МГУ, физический ф-т, 1996) $-1 < |x^2 - 7| < 29$.

$$(9; 9 -)$$

3. (МГУ, ИСАА, 2007) $|x + 3| \cdot (|x - 1| - 3) \leq 0$.

$$[7; 2 -] \cap \{8 -\}$$

4. (МГУ, МШЭ, 2007)

$$\left| \frac{x}{10} - \frac{1}{5} \right| \geq \left| \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \right|.$$

$$[2]$$

Замена переменной

5. (МГУ, географич. ф-т, 1997)

$$\frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2.$$

$$\left(\frac{1}{11}; \frac{1}{8}\right)$$

6. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998)

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{1}{|x+1|-2}.$$

$$(\mathbb{I} \setminus 0) \cap (\mathbb{Z} - \setminus \mathbb{E} -)$$

7. (МГУ, физический ф-т, 2004)

$$\frac{|x-1|}{1 - \frac{6}{|x-1|}} < -1.$$

$$(\mathbb{L} \setminus \mathbb{E}) \cap (\mathbb{I} - \setminus \mathbb{G} -)$$

8. (МГУ, ФНМ, 2004)

$$|3x+1|+2+\frac{3}{|3x+1|-2} \leq \frac{1}{|3x+1|+2}.$$

$$\left(\frac{\mathbb{E}}{\mathbb{I}} \setminus \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{Z} - \mathbb{E} \setminus}\right] \cap \{\frac{\mathbb{E}}{\mathbb{I}} -\} \cap \left[\frac{\mathbb{E}}{\mathbb{E} \setminus} - \setminus \mathbb{I} -\right)$$

9. (МГУ, географич. ф-т, 1987) $x^2 + 2|x| < 8.$

$$(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} -)$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003)

$$\frac{3x^2}{2} - |x| \geq 0.$$

$$(\infty + \setminus \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{E}}] \cap \{0\} \cap [\frac{\mathbb{E}}{\mathbb{E}} - \setminus \infty -)$$

11. а) $x^2 + 2x - |x+1| > 5;$ б) $x^2 - 4x + 8 - 5|x-2| \leq 0.$

$$[\mathbb{G} \setminus \mathbb{E}] \cap [\mathbb{I} \setminus \mathbb{Z} -] (\mathbb{G} \setminus (\infty + \setminus \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{I} - \setminus \infty -) (\mathbb{E}$$

Перебор промежутков

12. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) $(|x|-1)(2x^2+x-1) \leq 0.$

$$[\mathbb{I} \setminus \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{I}}] \cap \{\mathbb{I} -\}$$

13. (МГУ, геологич. ф-т, 2006)

$$\frac{x^2-9}{|x|-3} \cdot (x+4) \geq 0.$$

$$(\infty + \setminus \mathbb{E}) \cap (\mathbb{E} \setminus \mathbb{E} -) \cap (\mathbb{E} - \setminus \mathbb{I} -]$$

14. (МГУ, ИСАА, 1998)

$$\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}.$$

$$(\infty + \setminus \mathbb{G}) \cap (\mathbb{E} \setminus \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} -)$$

15. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x|x|+1}{x-2}+1 \geq x.$$

$$(\infty+; \mathfrak{z}) \cap [\frac{\mathfrak{E}}{1}; \infty-)$$

16. (МГУ, геологич. ф-т, 2004)

$$\frac{x-2}{|x-2|} \leq 4-x^2.$$

$$(\mathfrak{z}; \underline{\mathfrak{g}}^{\wedge}-]$$

17. (МГУ, химический ф-т, 2007)

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

$$\{\mathfrak{z}-\} \cap \left(\mathfrak{z}-; \underline{\mathfrak{g}}^{\wedge} \mathfrak{z}- \right] \cap (9-; \infty-)$$

18. (МГУ, ФНМ, 2003)

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geq 3.$$

$$(\infty+; \mathfrak{E}) \cap \left(\mathfrak{I}; \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{E}} \right]$$

19. (МГУ, геологич. ф-т, 2003)

$$\frac{x-2}{|x+2|} + \frac{2x+5}{x+2} \leq 0.$$

$$[\mathfrak{I}-; \mathfrak{z}-) \cap (\mathfrak{z}-; \mathfrak{L}-]$$

20. (МГУ, мехмат, 1985)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1}.$$

$$(\infty+; \mathfrak{I}) \cap (\mathfrak{I}; \mathfrak{I}-) \cap [\mathfrak{E}-; \infty-)$$

21. (МГУ, мехмат, 2004)

$$\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6} \geq 0.$$

$$(\infty+; \mathfrak{z}) \cap \{\mathfrak{I}\} \cap \left[\underline{\mathfrak{g}}^{\wedge} + \mathfrak{z}-; \frac{0\mathfrak{I}}{\mathfrak{E}}- \right) \cap \left[\underline{\mathfrak{g}}^{\wedge} - \mathfrak{z}-; \infty- \right)$$

22. (МГУ, социологич. ф-т, 1999)

$$\frac{2|2-x|}{2-|x|} \leq |x-2|.$$

$$(\infty+; \mathfrak{z}) \cap \{0\} \cap (\mathfrak{z}-; \infty-)$$

23. (МГУ, экономич. ф-т, 1984) $3|x - 2| + |5x - 4| \leq 10.$

$$\left[\frac{2}{3}; 0\right]$$

24. (МГУ, ф-т гос. управления, 2003) $|2x + 8| \geq 8 - |1 - x|.$

$$(\infty + ; 1 -] \cap [9 - ; \infty -)$$

25. (МГУ, ВМК, 2003) $3|x + 2| - 4|x + 1| \geq 2.$

$$\left[0; \frac{4}{8} - \right]$$

26. (МГУ, филологич. ф-т, 1991)

$$\frac{|x + 1| + |x - 2|}{x + 199} < 1.$$

$$(007; 99 -) \cap (661 - ; \infty -)$$

27. (МГУ, геологич. ф-т, 1985)

$$\frac{|x - 2|}{|x - 1| - 1} \geq 1.$$

$$(\infty + ; 2 -) \cap (0 ; \infty -)$$

28. (МГУ, ИСАА, 1992)

$$\frac{|x + 3| - 1}{4 - 2|x + 4|} \geq -1.$$

$$(\infty + ; 2 -) \cap (2 - ; 9 -) \cap [8 - ; \infty -)$$

29. (МГУ, ф-т психологии, 1979)

$$\frac{3}{|x + 3| - 1} \geq |x + 2|.$$

$$\left[\frac{9}{2} \wedge + 2 - ; 2 - \right) \cap (7 - ; 9 -]$$

30. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) $|x^2 + 3x| + |x + 5| \leq x^2 + 4x + 9.$

$$(\infty + ; 1 -] \cap [2 - ; 2 -]$$

31. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) $|x + 3| - |x^2 + x - 2| \geq 1.$

$$[2 ; 0] \cap \{ 2 - \}$$

32. (МГУ, химический ф-т, 2000) $|x + |1 - x|| > 3.$

$$(\infty + ; 2 -]$$

33. (МГУ, геологич. ф-т, 1998)

$$\left| \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - 3x + 3\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left| \frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2} \right|.$$

$$\left(\infty + ; \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cap \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \infty - \right)$$

34. («Физтех», 2011)

$$\frac{20 - 4|x|}{|x^2 + 11x + 21| - 3} \leq 1.$$

$$\left(\infty + ; \frac{2}{11 - \sqrt{13}} \right] \cap (2 - ; 3 -) \cap [4 - ; 8 -) \cap (6 - ; \infty -)$$

35. (МГУ, мехмат, 1999) Найти все x , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x - 3| (|x - 5| - |x - 3|) - 6x \quad \text{и} \quad |x| (|x| - |x - 8|) + 24$$

неположительно, а его модуль не меньше модуля другого.

$$[2 ; 3]$$

Равносильные переходы

36. («Физтех», 2017, 9) $x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2(x^2 + x + 1)^2 \geq 0.$

$$\left[\frac{2}{3} - ; 1 - \right)$$

37. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) $(x^2 + 5x - 6) \cdot |x + 4|^{-1} < 0.$

$$(1 ; 4 -) \cap (4 - ; 9 -)$$

38. (МГУ, филологич. ф-т, 2006)

$$\frac{5 - 4x}{|x - 2|} \leq |2 - x|.$$

$$(\infty + ; 2) \cap (2 ; 1] \cap [1 - ; \infty -)$$

39. (МГУ, ВШБ, 2004)

$$\frac{x + 1}{|x - 1|} \geq 1.$$

$$(\infty + ; 1) \cap (1 ; 0]$$

40. (МГУ, географич. ф-т, 2003)

$$\frac{6}{|x|} \geq 7 + x.$$

$$\left[\frac{2}{1 - \sqrt{2}} ; 0 \right) \cap (0 ; 1 -) \cap [9 - ; \infty -)$$

41. (МГУ, ВМК, 1998)

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}.$$

$$(\infty+; \frac{z}{6}) \cap (1-; z-) \cap (z-; \frac{p}{2g^{\wedge}+6}-)$$

42. (МГУ, биологич. ф-т, 1999)

$$\frac{3}{|x-1|} \geq 2x+5.$$

$$\left[\frac{p}{g-\frac{p}{2}g^{\wedge}}; 1\right) \cap (1; \frac{z}{1}] \cap [z-; \infty-)$$

43. (МГУ, социологич. ф-т, 2001)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{|x|} \geq 2.$$

$$\left[\frac{z^{\wedge}}{1}; 0\right) \cap (0; 1-)$$

44. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x+1}{|2-x|} + \frac{x+1}{x-5} \leq 0.$$

$$(g; \frac{z}{2}] \cap [1-; \infty-)$$

45. (МГУ, геологич. ф-т, 2007)

$$|x-12| \leq \frac{x}{12-x}.$$

$$(z1; 6]$$

46. (МГУ, мехмат, 2000)

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}.$$

$$(3; 4) \cup (4; 7)$$

47. (МГУ, физический ф-т, 1998) $|x^2+2x-7| < 2x.$

$$(z^{\wedge}; \frac{1}{11}^{\wedge}+z-)$$

48. (МГУ, физический ф-т, 2003) $|x^2+3x|+x^2-2 \geq 0.$

$$(\infty+; \frac{z}{1}] \cap [\frac{g}{2}-; \infty-)$$

49. («Физтех», 2017, 9) $|x^3-2x^2+2| \geq 2-3x.$

$$(\infty+; 0] \cap [\frac{z}{21}^{\wedge}-1; \infty-)$$

50. $||x^3-x-1|-5| \geq x^3+x+8.$

$$[g_6^{\wedge}-; \infty-)$$

51. (МГУ, ВМК, 2000) $||x^2 + 3x - 8| - x^2| \geq 8 - x.$

$$(\infty+; \mathbb{F}] \cap [0; \mathbb{I}-] \cap [\mathbb{F}-; \infty-)$$

52. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2006)

$$\frac{|x^2 + x - 12|}{x - 3} \geq 1.$$

$$(\infty+; \mathbb{E}]$$

53. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) $|x - 1| \leq |x|.$

$$(\infty+; \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{I}}]$$

54. (Моск. матем. регата, 2001, 8) $|x + 2000| < |x - 2001|.$

$$(\frac{\mathbb{E}}{\mathbb{I}}; \infty-)$$

55. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) $|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|.$

$$(\infty+; \mathbb{F}] \cap [\frac{\mathbb{F}}{\mathbb{E}}; 0]$$

56. (МГУ, химический ф-т, 2001)

$$\frac{1}{|x - 1|} > \frac{1}{|x + 1|}.$$

$$(\infty+; \mathbb{I}) \cap (\mathbb{I}; 0)$$

57. (МГУ, мехмат, 2008) $||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|.$

$$(\infty+; \mathbb{Z}] \cap \{\mathbb{I}\} \cap [\mathbb{I}-; \infty-)$$

58. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11)

$$||2 + x - x^2| - |x + 1|| \geq |x^2 - 2x - 3|.$$

$$(\infty+; \mathbb{Z}] \cap \{\mathbb{I}-\}$$