# Минимаксные задачи. 1

В настоящей статье рассматриваются уравнения и неравенства, которые не поддаются решению известными вам стандартными методами. Чтобы стало понятно, о каких задачах идёт речь, начнём с примера.

Задача 1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Решите уравнение

$$\sqrt{1-|x-2|}+\sqrt{4x-x^2}=3+|x-2|.$$

Решение. Напрашивается замена $t=|x-2|$, но это скорее для отвода глаз: даже после этой замены стандартное возведение в квадрат приводит к громоздким выкладкам и уравнению четвёртой степени. Дело тут совершенно в другом. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{1-|x-2|}+\sqrt{4-(x-2)^2}=3+|x-2|. \tag{1}$$

Первое слагаемое левой части не превосходит $\sqrt{1}=1$, второе слагаемое не превосходит $\sqrt{4}=2$. Поэтому левая часть (1) не превосходит 3, причём равенство левой части тройке достигается лишь при $x=2$. С другой стороны, правая часть (1) не меньше 3, а равенство правой части тройке достигается опять-таки при $x=2$. Следовательно, равенство (1) возможно в том единственном случае, когда обе части одновременно равны 3, то есть при $x=2$.

Ответ: 2.

В общем виде наши рассуждения выглядят следующим образом. Пусть имеется уравнение

$$f(x)=g(x). \tag{2}$$

Функции $f$ и $g$ могут быть устроены так, что это уравнение не решается обычными методами. Предположим, однако, что нам удалось найти такое число $M$, что для всех допустимых значений $x$ выполнены неравенства $f(x)\geqslant M$ и $g(x)\leqslant M$. Тогда равенство (2) возможно лишь в том случае, когда одновременно $f(x)=M$ и $g(x)=M$; иными словами, наше «нерешаемое» уравнение (2) оказывается равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=M,\\ g(x)=M. \end{cases} \tag{3}$$

А эту систему уже получается решить стандартными приёмами.

Решение системы (3) — это такое значение $x$, при котором функция $f(x)$ достигает своего минимума и в то же время функция $g(x)$ достигает своего максимума. Поэтому рассматриваемые задачи называются *минимаксными*[1].

Простейшая минимаксная ситуация — равенство нулю суммы неотрицательных выражений (квадратов, модулей, квадратных корней). В таком случае каждое слагаемое обязано обращаться в нуль, и это существенно упрощает решение.

Задача 2. (*МФТИ, 1999*) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+7x-y+11=0,\\ y^2+3x-y+15=0. \end{cases}$$

[1] Другие названия данного метода — *метод оценок*, *метод экстремальных оценок*, *метод мажорант*. Его применения в тригонометрии можно найти в статье «Тригонометрические уравнения. 2».

Решение. Сложим наши уравнения:

$$x^2+10x+y^2-2y+26=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+10x+25)+(y^2-2y+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)^2+(y-1)^2=0.$$

Если сумма квадратов двух чисел равна нулю, то каждое из чисел равно нулю, поэтому из последнего равенства с необходимостью вытекает, что $x=-5$ и $y=1$. Однако ответ писать рано: нужно проверить ещё, что полученная пара удовлетворяет каждому из уравнений. Проверка показывает, что это действительно так.

(Чтобы как следует прочувствовать эту логическую тонкость, замените в первом уравнении 11 на 12, а во втором 15 на 14. Результат сложения уравнений останется тем же, однако пара $(-5,1)$ уже не удовлетворяет ни одному из уравнений, и поэтому новая система не имеет решений. Математик скажет, что условие $x=-5$ и $y=1$, будучи необходимым, не является в данном случае достаточным.)

Ответ: $(-5,1)$.

Задача 3. (*МГУ, ДВИ, 2011*) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2-2xy+7y^2 \leqslant 1, \\ 2x-5y \geqslant 2. \end{cases} \tag{4}$$

Решение. Сначала упростим нашу систему введением новых переменных. Умножим первое неравенство на 4 и выделим полный квадрат:

$$16x^2-8xy+28y^2 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad 16x^2-8xy+y^2+27y^2 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad (4x-y)^2+3\cdot(3y)^2 \leqslant 4.$$

Теперь делаем замену

$$u=4x-y, \quad v=3y,$$

откуда

$$y=\frac{v}{3}, \quad x=\frac{1}{4}\left(u+\frac{v}{3}\right).$$

После несложных вычислений система (4) примет вид

$$\begin{cases} u^2+3v^2 \leqslant 4, \\ 3v-u \leqslant -4. \end{cases}$$

Складывая первое неравенство этой системы с удвоенным вторым, получим

$$u^2+3v^2+6v-2u+4 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-1)^2+3(v+1)^2 \leqslant 0.$$

Отсюда $u=1$ и $v=-1$, после чего легко находим $x$ и $y$.

Ответ: $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{3}\right)$.

Если требуется решить уравнение с двумя и более неизвестными, то весьма вероятно, что в нём заложена минимаксная идея.

Задача 4. (*ОММО, 2014*) Найдите все решения уравнения

$$\big(y(x-1)\big)^2+(x-1)^2+y^2+1-4y|x-1|=0.$$

Решение. Сделаем замену $t=|x-1|$:

$$y^2t^2+t^2+y^2+1-4yt=0.$$

Запишем полученное уравнение как квадратное относительно $t$ с параметром $y$:

$$\left(y^2+1\right)t^2-4yt+y^2+1=0. \tag{5}$$

Найдём дискриминант:

$$D/4=4y^2-\left(y^2+1\right)^2=2y^2-y^4-1=-\left(y^2-1\right)^2.$$

Дискриминант неположителен, и уравнение (5) имеет решение в том единственном случае, когда он равен нулю, то есть при $y=\pm1$.

Если $y=1$, то уравнение (5) принимает вид

$$2t^2-4t+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (t-1)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=1.$$

Отсюда $|x-1|=1$, то есть $x=0$ или $x=2$. Таким образом, пары $(0,1)$ и $(2,1)$ служат решениями исходного уравнения.

Если $y=-1$, то уравнение (5) принимает вид

$$2t^2+4t+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (t+1)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-1.$$

Получаем уравнение $|x-1|=-1$, которое не имеет решений.

Ответ: $(0,1)$; $(2,1)$.

В некоторых случаях для получения нужных неравенств удобно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Если вам оно не знакомо, то почитайте статью «Среднее арифметическое и среднее геометрическое».

Здесь мы напомним лишь, что для любых чисел $a,b\geqslant 0$ верно неравенство

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}, \tag{6}$$

причём равенство достигается в том и только в том случае, когда $a=b$. В частности, если $a>0$, то

$$a+\frac{1}{a}\geqslant 2, \tag{7}$$

причём равенство достигается в том и только в том случае, когда $a=1$.

Задача 5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x)=\left|4x^2+4x+4\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right|+\left|3x^2+\frac{1}{x}-8\right| \quad\text{и}\quad g(x)=x^2+4\sqrt{x}-\frac{8}{x}+16.$$

Решение. Для нахождения абсцисс общих точек нужно решить уравнение $f(x)=g(x)$, то есть

$$\left|4x^2+4x+4\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right|+\left|3x^2+\frac{1}{x}-8\right|=x^2+4\sqrt{x}-\frac{8}{x}+16. \tag{8}$$

Запишем это уравнение в виде

$$|u|+|v|=w, \tag{9}$$

где

$$u=4x^2+4x+4\sqrt{x}-\frac{3}{x}, \quad v=3x^2+\frac{1}{x}-8, \quad w=x^2+4\sqrt{x}-\frac{8}{x}+16.$$

Заметим, что

$$|u|+|v| \geqslant u-v = x^2+4x+4\sqrt{x}-\frac{4}{x}+8 = w+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-8 \geqslant w+4\cdot 2-8 = w \qquad (10)$$

(мы использовали неравенство $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$, справедливое при $x>0$; положительность $x$ вытекает из условия задачи). Следовательно, решениями уравнения (9) могут быть лишь те значения $x$, при которых оба неравенства в оценке (10) превращаются в равенство. Но равенство $x+\frac{1}{x}=2$ достигается лишь при $x=1$. Остаётся проверить это значение: подставляем $x=1$ в уравнение (8) и получаем верное равенство $13=13$. Итак, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку $(1,13)$.

Ответ: $(1,13)$.

Ещё один минимаксный сюжет, который периодически встречается в нестандартных уравнениях и неравенствах, состоит в привелечении геометрических соображений, связанных с неравенством треугольника.

Напомним, что расстояние между точками $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ координатной плоскости вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \qquad (11)$$

Задача 6. (*МФТИ, 2008*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+12x+36}+\sqrt{x^2+y^2-16y+64}=10, \\ 5y^2-8x^2=8. \end{cases} \qquad (12)$$

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{x+(y-8)^2}=10. \qquad (13)$$

Рассмотрим точки $A(-6,0)$, $B(0,8)$ и $M(x,y)$. В соответствии с формулой (11) первое слагаемое в левой части (13) есть расстояние $MA$, а второе слагаемое — расстояние $MB$, так что

$$MA+MB=10. \qquad (14)$$

При любом расположении точки $M$ на координатной плоскости выполнено неравенство треугольника: $MA+MB \geqslant AB$. При этом легко вычислить, что $AB=10$. Следовательно, имеем неравенство

$$MA+MB \geqslant 10. \qquad (15)$$

Сопоставляя (14) и (15), приходим к выводу, что, коль скоро в неравенстве треугольника достигается равенство, *точка $M$ должна располагаться на отрезке $AB$*. Уравнение прямой $AB$ нетрудно получить (сделайте это самостоятельно):

$$y=\frac{4}{3}x+8.$$

При этом налагаем дополнительное условие $-6 \leqslant x \leqslant 0$ (чтобы точка $M$ находилась именно на отрезке $AB$). Таким образом, исходная система (12) равносильна системе

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x+8, \\ -6 \leqslant x \leqslant 0, \\ 5y^2-8x^2=8. \end{cases}$$

Дальнейшее очевидно, и вы легко доведёте решение до конца самостоятельно.

Ответ: $(-3,4)$.

## Задачи

**1.** (*МГУ, физический ф-т, 1999*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - |3y-1| = 0, \\ 4\sqrt{9y^2-6y+1} + \sqrt{x^2-4x+3} = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(1, \frac{1}{3})}$

**2.** (*МГУ, геологич. ф-т, 1997*) Найти все решения уравнения

$$|x+y+11-5xy| + |x^2y+xy^2-12| = 0.$$

$\boxed{(1,3);\ (3,1);\ \left(-\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}, -\frac{15}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}\right);\ \left(-\frac{15}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}, -\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}\right)}$

**3.** (*МГУ, ФНМ, 2002*) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-3xy+y^2+1} + |2x^2+5xy-3y^2| = 0.$$

$\boxed{(1,2);\ (-1,-2)}$

**4.** (*МГУ, химический ф-т, 1999*) Решить уравнение:

$$x^2+1+|x-1| = 2|x|.$$

$\boxed{1}$

**5.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Решите уравнение

$$|1-x-y-xy| + |2x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2xy-9| + \frac{|xy|}{xy} = -1.$$

$\boxed{(-\frac{1}{2},3),\ (3,-\frac{1}{2})}$

**6.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) Решить уравнение:

$$\sqrt{x}\left(x^2-3x-4\right)^3 + \sqrt{4-x}\left(x^2-8x\right)^5 = 0.$$

$\boxed{0;\ 4}$

**7.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) Решите уравнение

$$x^7 \cdot \sqrt{2+x-x^2} + (2-x)^{11} \cdot \sqrt{3x-x^2} = 0.$$

$\boxed{0;\ 2}$

**8.** (*МГУ, ф-т гос. управления, 2003*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$$

$(2, 2, -2)$

**9.** Решить систему:

а) $\begin{cases} x^2+4y^2+5=4z, \\ x-y \geqslant z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} z^2+7 \leqslant 14xy, \\ z-2x-2y=1. \end{cases}$

а) $x=2$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{5}{2}$; б) $x=-2$, $y=-2$, $z=-7$

**10.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Координаты точки удовлетворяют соотношению $xy+yz+zx=4$. На каком расстоянии от плоскости $z=-3$ может лежать эта точка, если известно, что расстояние от этой точки до начала координат равно двум?

$\frac{9\pm2\sqrt{3}}{3}$

**11.** (*МФТИ, 1999*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-6x-3y-1=0, \\ y^2+2x+9y+14=0. \end{cases}$$

$(2, -3)$

**12.** (*МГУ, химический ф-т, 1998*) Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)+2=0, \\ z^2+xz+yz-4=0. \end{cases}$$

$(-1, 1, 2)$; $(-1, 1, -2)$

**13.** (*Всеросс., 2015, II этап, 11*) При каких значениях $x$ и $y$ верно равенство

$$x^2+(1-y)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}\,?$$

$x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$

**14.** (*ОММО, 2010*) Найдите все решения системы

$$\begin{cases} xy-t^2=9, \\ x^2+y^2+z^2=18. \end{cases}$$

$(3, 3, 0, 0)$; $(-3, -3, 0, 0)$

**15.** (*«Ломоносов», 2013, 8*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 1 = 0, \\ y^2 - 4z + 7 = 0, \\ z^2 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(-1, 1, 2)}$

**16.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–10*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 2 = 0, \\ y^2 + 4z + 3 = 0, \\ z^2 + 4x + 4 = 0. \end{cases}$$

Нет решений

**17.** Решить уравнение:

а) $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6$;  б) $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$.

а) $x = 1$, $y = -3$; б) $x = -1$, $y = 1$

**18.** (*«Физтех», 2011, 9, 11*) Найдите $x$ и $y$, такие, что выполняется равенство

$$x^2 + 12xy + 52y^2 - 8y + 1 = 0.$$

$x = -1{,}5$, $y = 0{,}25$

**19.** (*ОММО, 2014*) Найдите все решения уравнения

$$4y^2\left(x^4 + 2x^2\right) + 8y^2 + x^4 + 2x^2 = 8|y|\left(x^2 + 1\right) - 2.$$

$\boxed{(0, \pm\frac{1}{2})}$

**20.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Решите уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{9 - |x - 3|} = 5 + |x - 3|.$$

$\boxed{3}$

**21.** (*МГУ, химический ф-т, 2001*) Решить уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}\,.$$

$\boxed{x = 2}$

**22.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x) = \left|5x^2 + 6x - \frac{2}{x}\right| + \left|3x^2 - 2\sqrt{x} - 9 - \frac{5}{x}\right| \quad \text{и} \quad g(x) = 2x^2 + 2\sqrt{x} + 21 - \frac{3}{x}\,.$$

$\boxed{(1, 22)}$

**23.** (*МГУ, ф-т психологии, 2002*) Решить уравнение

$$|x^3 + 7x^2 - 11x - 6| + |x^3 - 12x^2 - 5x + 3| = 18x^2 - 2x - 13.$$

$\boxed{2}$

**24.** (*МФТИ, 2001*) Решить неравенство

$$\frac{1}{4 - \sqrt{x^2 - 2x - 8}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2 + 12}}\,.$$

$\boxed{(-\infty; -4) \cup \{-2\} \cup (6; +\infty)}$

**25.** (*МГУ, химический ф-т, 2002*) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y - 1| \leqslant 1, \\ |x - 2| + |y - 1| \leqslant 1. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 1)}$

**26.** (*«Физтех», 2015, 10–11*)

$$\begin{cases} 2x \geqslant 14 + y, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy. \end{cases}$$

$\boxed{(8, 2)}$

**27.** (*«Физтех», 2015, 10–11*)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$

**28.** (*МГУ, ДВИ, 2011*) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leqslant 1, \\ 4x + 7y \geqslant 3. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}\right)}$

**29.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Решите систему

$$\begin{cases} |x| + 6y \geqslant 1, \\ 37x^2 + 37y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\pm\frac{6}{37}, \frac{1}{37}\right)}$

**30.** (*МФТИ, 2001*) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3 \leqslant 0, \\ y^2 + 6y + 18x \leqslant 0. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-1+\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right); \left(-1-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)}$

**31.** (*МФТИ, 2008*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 5, \\ 4x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\frac{3}{2}, 2\right)}$

**32.** (*МГУ, ВМК, 1996*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}\,. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{217-5\sqrt{415}}{29}, \frac{180+2\sqrt{415}}{29}\right)}$

**33.** (*«Ломоносов», 2012, 9*) Решите уравнение

$$|1 - x| + |9 - x| + |25 - x| + |49 - x| + |81 - x| = 120.$$

$\boxed{25}$

**34.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) При каждом значении $a$ решите уравнение

$$|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + |x - 3| + |x + 3| + \ldots + |x - 2015| + |x + 2015| +$$
$$+ 2x^2 + 2a^2 + 4030^2 - 8060x - 8060a = 4030x.$$

$\boxed{\text{Если } a = 2015, \text{ то } x = 2015; \text{ если } a \neq 2015, \text{ то решений нет}}$