Минимаксные задачи с параметрами

Данная статья служит продолжением статьи «Минимаксные задачи», в которой были изложены основные идеи. Здесь мы разберём несколько задач и посмотрим, как минимаксные методы работают в задачах с параметрами.

Задача 1. (*МГУ, геологич. ф-т, 1990*) Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение

$$\left(3x-a^2+ab-b^2\right)^2+\left(2x^2-a^2-ab\right)^2+x^2+9=6x$$

имеет хотя бы одно решение x.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\left(3x-a^2+ab-b^2\right)^2+\left(2x^2-a^2-ab\right)^2+(x-3)^2=0.$$

Сумма квадратов, будучи неотрицательной, равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое обращается в нуль. Таким образом, наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-a^2+ab-b^2=0,\\ 2x^2-a^2-ab=0,\\ x-3=0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения имеем $x=3$; подставляя это значение в первое и второе уравнения, получим систему

$$\begin{cases} a^2-ab+b^2=9,\\ a^2+ab=18. \end{cases} \tag{1}$$

Умножим первое уравнение системы (1) на -2 и сложим со вторым уравнением. Придём к уравнению

$$a^2-3ab+2b^2=0,$$

то есть

$$(a-b)(a-2b)=0.$$

Отсюда $a=b$ или $a=2b$. Подставляя это в любое из уравнений системы (1) (проще во второе), найдём в итоге искомые пары (a,b).

Ответ: $(3,3)$, $(-3,-3)$, $\left(2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$, $\left(-2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$.

Задача 2. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1983*) Найти все значения α, которые удовлетворяют условию $5<\alpha<16$ и при которых уравнение

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}$$

относительно x имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $1\leqslant x\leqslant 2$.

Решение. Поскольку выполнены неравенства

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)\geqslant 1,\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}\leqslant 1,$$

наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1+\cos^2\left(\dfrac{\alpha x}{2}+\dfrac{3\pi}{8}\right)=1, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha x}{2}+\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ \cos\pi x-\sin\pi x=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения легко находим: $\pi x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, то есть $x=\frac{1}{4}+k$. По условию должно быть выполнено двойное неравенство $1\leqslant x\leqslant 2$; следовательно, подходит единственное значение $k=1$, при котором $x=\frac{5}{4}$.

Подставляя $x=\frac{5}{4}$ в первое уравнение системы, получим

$$\alpha=\frac{\pi(1+8n)}{5}.$$

По условию должно быть $5<\alpha<16$; значит, годятся значения $n=1,2,3$. В самом деле:

$$\begin{aligned} n\leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha\leqslant\frac{\pi}{5}<1<5; \\ n=1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha=\frac{9\pi}{5}>\frac{9\cdot 3}{5}>5; \\ n=3 \quad &\Rightarrow \quad \alpha=5\pi<5\cdot 3{,}2=16; \\ n\geqslant 4 \quad &\Rightarrow \quad \alpha\geqslant\frac{33\pi}{5}>\frac{33\cdot 3}{5}>16. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{9\pi}{5}$, $\frac{17\pi}{5}$, 5π.

Задача 3. (*МГУ, ф-т психологии, 1988*) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2-2x+1)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\leqslant\sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Для удобства сделаем замену $b=\sqrt[4]{a}$. Тогда неравенство примет вид

$$b^6(x-1)^2+\frac{b^2}{(x-1)^2}\leqslant b^3\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|. \tag{2}$$

Если $b=0$, то любое значение $x\neq 1$ является решением неравенства (2), поэтому $b=0$ годится. Теперь надо выяснить, существуют ли $b>0$, при которых неравенство (2) имеет решения. В предположении $b>0$ делим обе части неравенства (2) на b^3:

$$b^3(x-1)^2+\frac{1}{b(x-1)^2}\leqslant\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|. \tag{3}$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем оценку снизу для левой части неравенства (3):

$$b^3(x-1)^2+\frac{1}{b(x-1)^2}\geqslant 2\cdot\sqrt{b^3(x-1)^2\cdot\frac{1}{b(x-1)^2}}=2b.$$

Вместе с тем для правой части неравенства (3) имеем очевидную оценку сверху: $\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\leqslant 1$. Поэтому если $2b>1$, то неравенство (3) не имеет решений; значит, неравенство (3) может иметь решения лишь при условии $2b\leqslant 1$, то есть при $b\leqslant\frac{1}{2}$.

Покажем, что при $b=\frac{1}{2}$ неравенство (3) имеет решения. С этим b оно примет вид

$$\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{2}{(x-1)^2}\leqslant\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|. \tag{4}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x=3$ неравенство (4) выполнено[1]. Итак, наибольшее значение b равно $\frac{1}{2}$, и потому искомое наибольшее значение a равно $\frac{1}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Задача 4. (*МГУ, филологич. ф-т, 1985*) Для каждого значения a решить уравнение

$$4\cos x\sin a+2\sin x\cos a-3\cos a=2\sqrt{7}.$$

Решение. Здесь работает идея, которая обсуждалась в статье «Параметр как переменная». Мы меняем ролями величины x и a, воспринимая наше уравнение как уравнение относительно переменной a с параметром x.

Переписываем уравнение в следующем виде:

$$A\sin a+B\cos a=2\sqrt{7}, \tag{5}$$

где

$$A=4\cos x,\quad B=2\sin x-3.$$

Замечая, что $B\neq 0$ при любом x, преобразуем[2] уравнение (5):

$$\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin a+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos a\right)=2\sqrt{7}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=1,$$

существует угол φ такой, что

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi.$$

Тем самым уравнение (5) приобретает вид:

$$\sqrt{A^2+B^2}(\sin a\cos\varphi+\cos a\sin\varphi)=2\sqrt{7},$$

то есть

$$\sqrt{A^2+B^2}\sin(a+\varphi)=2\sqrt{7}. \tag{6}$$

Пусть

$$L=\sqrt{A^2+B^2}\sin(a+\varphi)$$

есть левая часть уравнения (6). Для L имеем оценку сверху:

$$L\leqslant\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(4\cos x)^2+(2\sin x-3)^2}=\sqrt{16\cos^2 x+4\sin^2 x-12\sin x+9}.$$

[1] Мы не обязаны объяснять на экзамене, откуда взялся пример $x=3$. Но всё же, из каких соображений он найден? Правая часть неравенства (4) не превосходит 1, а в силу неравенства между средними левая часть (4) не меньше 1. Следовательно, неравенство (4) может быть выполнено лишь в случае равенства, которое достигается при равенстве слагаемых в левой части.

[2] Это метод вспомогательного аргумента, изложенный в статье «Тригонометрические уравнения. 2».

Используя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем:

$$L \leqslant \sqrt{25 - 12\sin^2 x - 12\sin x}\,.$$

В подкоренном выражении выделим полный квадрат:

$$25 - 12\sin^2 x - 12\sin x = 25 - 3(4\sin^2 x + 4\sin x + 1 - 1) = 28 - 3(2\sin x + 1)^2.$$

Таким образом, имеем:

$$L \leqslant \sqrt{28 - 3(2\sin x + 1)^2} \leqslant \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\,. \qquad (7)$$

Сопоставляя эту оценку с уравнением (6), мы видим, что это уравнение может иметь решения относительно a лишь в том случае, когда в неравенстве (7) достигается равенство, то есть при $\sin x = -\frac{1}{2}$. Имеем, стало быть, два случая.

1. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = 2\sqrt{3}$, $B = -4$, и уравнение (5) принимает вид:

   $$\sqrt{3}\sin a - 2\cos a = \sqrt{7}\,,$$

   или

   $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin a - \frac{2}{\sqrt{7}}\cos a = 1. \qquad (8)$$

   Поскольку $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1$, существует такой угол φ, что

   $$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \quad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}\,;$$

   при этом можно выбрать φ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, так что $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$. Уравнение (8) теперь даёт нам:

   $$\sin a\cos\varphi - \cos a\sin\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(a - \varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

   то есть

   $$a = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = -2\sqrt{3}$, $B = -4$, и уравнение (5) принимает вид:

   $$-\sqrt{3}\sin a - 2\cos a = \sqrt{7}\,,$$

   или

   $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin a + \frac{2}{\sqrt{7}}\cos a = -1.$$

   Дальше действуем аналогично и получаем

   $$a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся записать ответ.

Ответ: Если $a = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; если $a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$; при остальных a решений нет.