Логарифм

В настоящей статье мы даём определение логарифма, выводим основные логарифмические формулы, приводим примеры вычислений с логарифмами, а также рассматриваем свойства и графики показательной и логарифмической функции.

Равенство $2^3 = 8$ можно записать и по-другому:

$$\log_2 8 = 3.$$

Читается так: «**логарифм** по основанию два восьми равен трём».

Определение логарифма

Везде далее мы полагаем по умолчанию, что числа a и b положительны и, кроме того, $a \neq 1$. Причины таких ограничений станут ясны впоследствии.

Дадим определение логарифма. Запись $\log_a b = c$ (читается: «логарифм по основанию a числа b равен c») означает: *чтобы получить число b, нужно число a возвести в степень c.* Таким образом,

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Иными словами, $\log_a b$ — это степень, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

Примеры вычисления логарифмов:

$$\log_2 4 = 2, \quad \log_3 3 = 1, \quad \log_2 \frac{1}{8} = -3, \quad \log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \log_{\frac{1}{5}} 25 = -2, \quad \log_7 1 = 0.$$

Логарифм по основанию 10 называется *десятичным логарифмом*. Вместо записи $\log_{10} a$ используется обозначение $\lg a$. Примеры вычисления десятичного логарифма:

$$\lg 100 = 2, \quad \lg 1000 = 3, \quad \lg 10^{13} = 13, \quad \lg 0{,}1 = -1, \quad \lg 0{,}01 = -2.$$

С «хорошими» степенями всё понятно. А можно ли возвести 2 в такую степень, чтобы получить 5? Оказывается, да. Число $\log_2 5$ существует, его можно вычислить на калькуляторе: $\log_2 5 = 2{,}321928\ldots$ Как видите, $\log_2 5$ расположен между двойкой и тройкой (ближе к двойке), что достаточно очевидно: ведь $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ (а 5 ближе к 4, чем к 8).

Вообще, каковы бы ни были числа a и b (такие, что $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$), найдётся единственное число c такое, что $a^c = b$; иными словами, значение логарифма $\log_a b$ существует и единственно. Этот факт вы можете принять как данность — его доказательство выходит за рамки школьной программы.

Таким образом, мы можем оперировать с логарифмами от любого положительного числа по любому положительному основанию (не равному единице). Например, $\log_3 7$, $\log_{\frac{1}{2}} 9$, $\lg 11$ — все эти числа существуют и могут использоваться при различных вычислениях.

Основное логарифмическое тождество

Пусть $a^c = b$, то есть $c = \log_a b$. Подставим это выражение для c в первое равенство:

$$a^{\log_a b} = b. \qquad (1)$$

Мы получили так называемое *основное логарифмическое тождество*. Важно понимать, однако, что формула (1) есть просто определение логарифма; она говорит о том, что $\log_a b$ — это степень, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Таким образом, имеем, например:

$$2^{\log_2 3} = 3, \quad 7^{\log_7 5} = 5, \quad 10^{\lg 25} = 25.$$

Пример 1. Вычислить $9^{\log_3 7}$.

Решение. Нам понадобится правило: при возведении степени в степень показатели перемножаются, то есть $(a^m)^n = a^{mn}$.

Применяя это правило, получим:

$$9^{\log_3 7} = \left(3^2\right)^{\log_3 7} = 3^{2\log_3 7} = \left(3^{\log_3 7}\right)^2 = 7^2 = 49.$$

Пример 2. Доказать, что $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$.

Решение. Имеем:

$$3^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 5} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{\log_2 3} = 5^{\log_2 3}.$$

Точно так же можно показать, что, вообще, имеет место тождество:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$$

В самом деле:

$$a^{\log_b c} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b c} = b^{\log_b a \cdot \log_b c} = \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}.$$

Логарифмические формулы

Сейчас мы выведем некоторые формулы, которые применяются для преобразования выражений с логарифмами. Все эти формулы нужно твёрдо знать.

0. $\log_a a^x = x$.

Здесь доказывать нечего — это просто переформулировка определения логарифма. Действительно, в какую степень нужно возвести a, чтобы получить a^x? Ясно, что в степень x.

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

Доказательство. Пусть $\log_a b = x$; тогда $b = a^x$. Пусть $\log_a c = y$; тогда $c = a^y$. Имеем:

$$\log_a(bc) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b + \log_a c.$$

2. $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$.

Доказательство. Снова пусть $\log_a b = x$ (то есть $b = a^x$) и $\log_a c = y$ (то есть $c = a^y$). Имеем:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a b - \log_a c.$$

3. $\log_a b^m = m \log_a b$ (здесь m — любое число).

Доказательство. Пусть $\log_a b = x$ (то есть $b = a^x$). Тогда

$$\log_a b^m = \log_a (a^x)^m = \log_a a^{mx} = mx = m \log_a b.$$

4. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$ (здесь n — любое число, не равное нулю).

Доказательство. Пусть $\log_a b = x$. Тогда $b = a^x$. Имеем:

$$\log_{a^n} b = \log_{a^n} a^x = \log_{a^n} a^{\frac{nx}{n}} = \log_{a^n} (a^n)^{\frac{x}{n}} = \frac{x}{n} = \frac{1}{n}\log_a b.$$

5. $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$.

Доказательство. Это комбинация формул 3 и 4.

6. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$.

Доказательство. Это частный случай формулы 5 при $m = n$. Данная формула позволяет заключить, например, что $\log_4 9 = \log_2 3$ или $\log_{125} 8 = \log_5 2$.

7. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (*формула перехода к новому основанию*; $c > 0$, $c \neq 1$).

Доказательство. Пусть $\log_a b = x$. Тогда $b = a^x$. Имеем:

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_c a^x}{\log_c a} = \frac{x\log_c a}{\log_c a} = x = \log_a b.$$

8. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(b \neq 1)$.

Доказательство. Это частный случай формулы 7 при $c = b$ (поскольку $\log_b b = 1$).

Вычисления с логарифмами

Приведём несколько примеров вычислений с логарифмическими формулами.

Пример 3. Вычислить: $\log_5 50 + \log_5 \dfrac{1}{2}$.

Решение. Преобразуя сумму логарифмов в логарифм произведения, получаем:

$$\log_5 50 + \log_5 \frac{1}{2} = \log_5 \left(50 \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_5 25 = 2.$$

Пример 4. Вычислить: $3\log_3 2 - \log_3 72$.

Решение. Сначала отправим множитель 3 в показатель степени двойки, а потом преобразуем разность логарифмов в логарифм частного:

$$3\log_3 2 - \log_3 72 = \log_3 2^3 - \log_3 72 = \log_3 8 - \log_3 72 = \log_3 \frac{8}{72} = \log_3 \frac{1}{9} = -2.$$

Пример 5. Вычислить: $\log_{9\sqrt[6]{3}} \left(27\sqrt[6]{3}\right)$.

Решение. Переходим к основанию 3:

$$\log_{9\sqrt[6]{3}} \left(27\sqrt[6]{3}\right) = \frac{\log_3 \left(27\sqrt[6]{3}\right)}{\log_3 \left(9\sqrt[6]{3}\right)} = \frac{\log_3 27 + \log_3 3^{\frac{1}{6}}}{\log_3 9 + \log_3 3^{\frac{1}{6}}} = \frac{3 + \frac{1}{6}}{2 + \frac{1}{6}} = \frac{19}{13}.$$

Показательная функция

Показательная функция — это функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ (как видим, ограничения на a ровно те же самые, что и выше, когда a было в основании логарифма).

Рассмотрим функцию $y = 2^x$. Выпишем некоторые значения этой функции, а потом построим её график.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Отметим эти точки на координатной плоскости (синими кружками) и соединим их плавной кривой (рис. 1). Тот факт, что график функции $y = 2^x$ является гладкой кривой, мы пока принимаем как данность (он доказывается в вузовском курсе математического анализа).

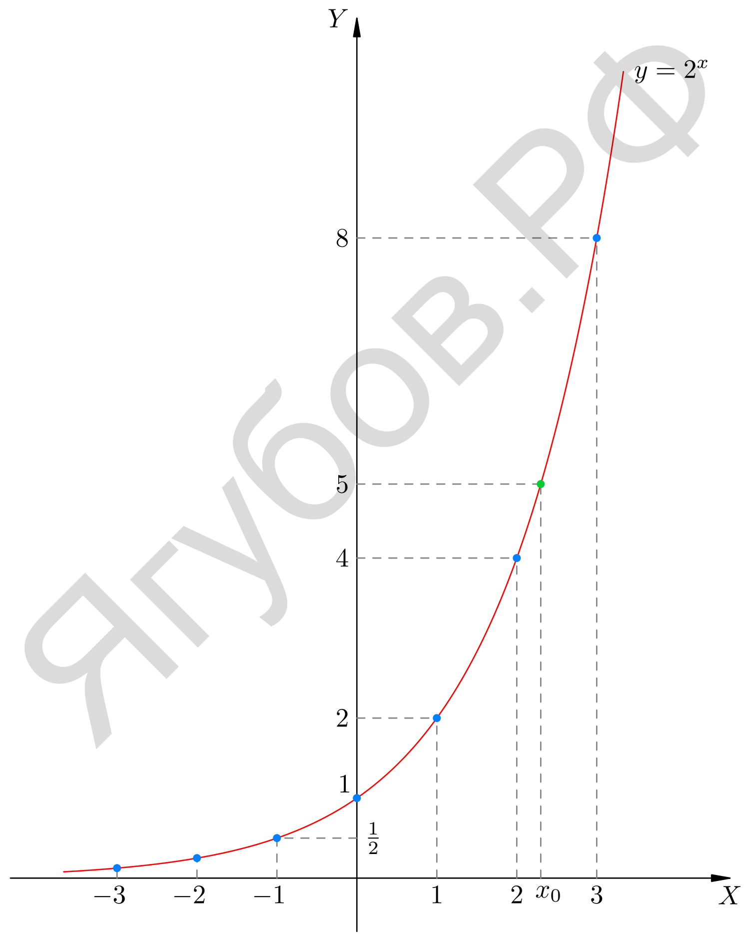

Рис. 1. График функции $y = 2^x$

Зелёным кружком на графике отмечена точка, имеющая ординату 5. Её абсцисса x_0 — это логарифм, о котором мы сказали несколько слов в начале статьи: $x_0 = \log_2 5 \approx 2{,}32$.

Отметим важные свойства функции $y = 2^x$.

- Функция определена на всей числовой прямой. Иными словами, область определения функции есть множество $(-\infty; +\infty)$.
- Функция является монотонно возрастающей.

- При $x \to -\infty$ значения функции стремятся к нулю, никогда нуля не достигая. Это проявляется в том, что график функции неограниченно приближается к оси X (иначе говоря, ось X служит горизонтальной асимптотой графика).

- Функция может принимать любые положительные значения. Значения функции не могут равняться нулю или отрицательному числу. Иными словами, область значений функции есть множество $(0; +\infty)$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Таблица некоторых её значений:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Строим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 2).

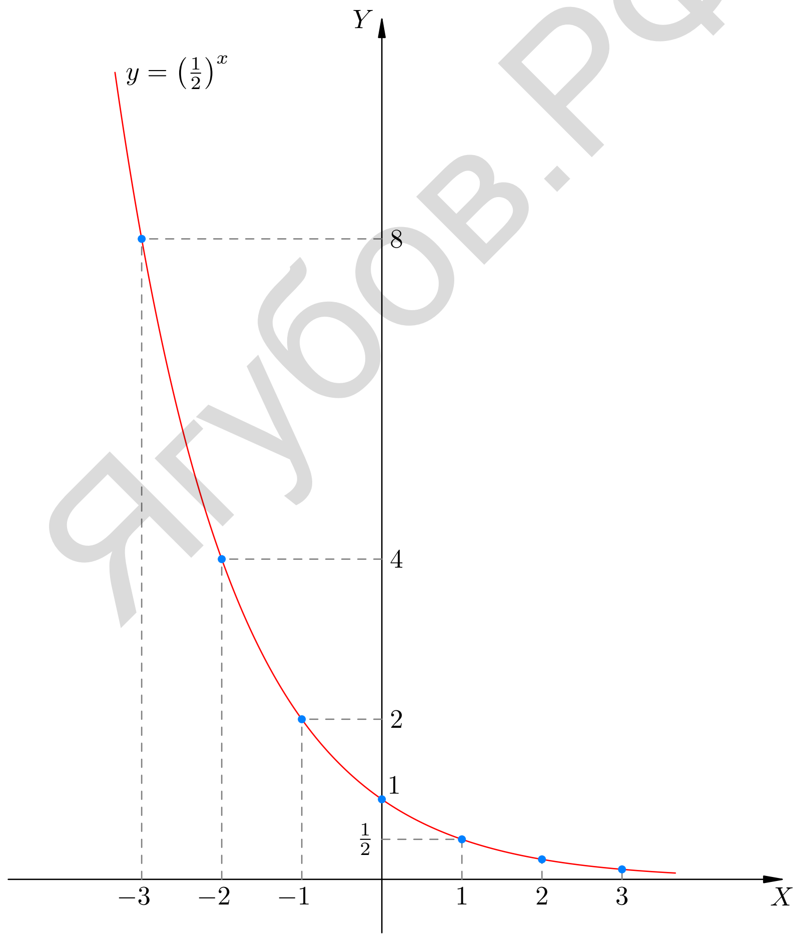

Рис. 2. График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Отметим следующие свойства функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- Область определения функции есть множество $(-\infty; +\infty)$.

- Область значений функции есть множество $(0; +\infty)$.
- Функция является монотонно убывающей.
- Ось X служит горизонтальной асимптотой графика при $x \to +\infty$.

Оказывается, рассмотренные выше функции $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ дают исчерпывающее представление о свойствах показательной функции. Так, график функции $y = a^x$ может выглядеть в точности двумя способами (рис. 3).

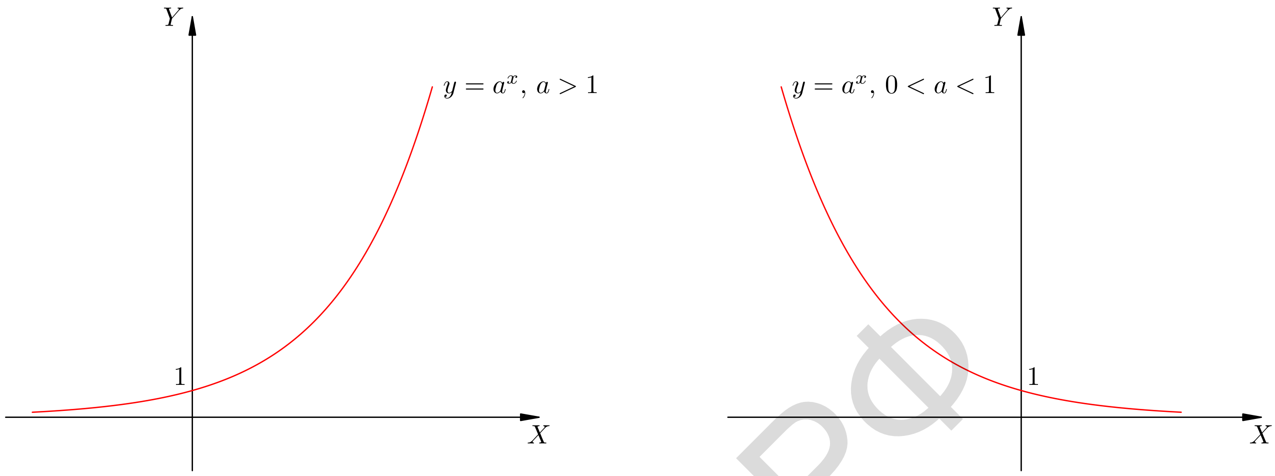

Рис. 3. График функции $y = a^x$

Сформулируем свойства показательной функции, которые наиболее важны для нас. Эти свойства будут использоваться при решении показательных уравнений и неравенств.

- Область определения функции $y = a^x$ есть множество $(-\infty; +\infty)$. Таким образом, положительное число a можно возводить в *любую* степень.
- Область значений функции $y = a^x$ есть множество $(0; +\infty)$. Таким образом, *показательная функция не может обращаться в нуль или принимать отрицательные значения.*
- Функция $y = a^x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.
- Ось X служит горизонтальной асимптотой графика функции. Именно, если $a > 1$, то $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$; если же если $0 < a < 1$, то $a^x \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теперь настало время объяснить, откуда взялись ограничения $a > 1$ или $0 < a < 1$. Дело в том, что при таких и только при таких a функция $y = a^x$ обладает перечисленными выше свойствами и может быть классифицирована как *показательная функция*. Все остальные a являются «плохими» — они приводят к резкому изменению свойств функции и её выпадению из рассматриваемого класса.

Так, если $a = 1$, то мы получаем функцию $y = 1^x$, которая является константой — она равна 1 при всех x.

Если $a = 0$, то мы получаем функцию $y = 0^x$. Эта функция есть константа 0 при $x > 0$ и не определена при $x \leqslant 0$.

Если $a < 0$, то возникают проблемы с возведением в нецелую степень. В самом деле, вспомним, что $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ не определено. Но с другой стороны, можно записать:

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = (-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4}\,.$$

Данная неоднозначность говорит о том, что нельзя корректно определить возведение отрицательного числа в дробную степень. Поэтому функция $y = a^x$ при $a < 0$ определена только при целых x и потому не интересна для изучения.

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция — это функция вида $y = \log_a x$ при $a > 1$ или $0 < a < 1$. Давайте объясним происхождение этих ограничений на величину a.

Допустим, $a = 1$. Тогда, например, число $\log_1 2$ не существует (поскольку 1 ни в какой степени не равно 2). Точно так же не существует $\log_1 b$ для любого $b \neq 1$. А вот $\log_1 1$ может равняться чему угодно (ведь 1 в любой степени равно 1). По этим причинам объект $\log_1 x$ не представляет никакого интереса.

Похожая ситуация возникает и в случае $a = 0$.

При $a < 0$ снова вмешивается отмеченная выше некорректность операции возведения отрицательного числа в дробную степень. Так, например, число $\log_{-4} 2$ не существует. Поэтому логарифмы по отрицательным основаниям также не интересны.

Вот почему мы ограничиваемся случаями $a > 1$ или $0 < a < 1$. При таких a возникает «хорошая» логарифмическая функция с интересными и полезными свойствами.

Рассмотрим функцию $y = \log_2 x$. Составим таблицу некоторых значений этой функции.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Отмечаем данные точки на координатной плоскости и соединяем плавной кривой (рис. 4).

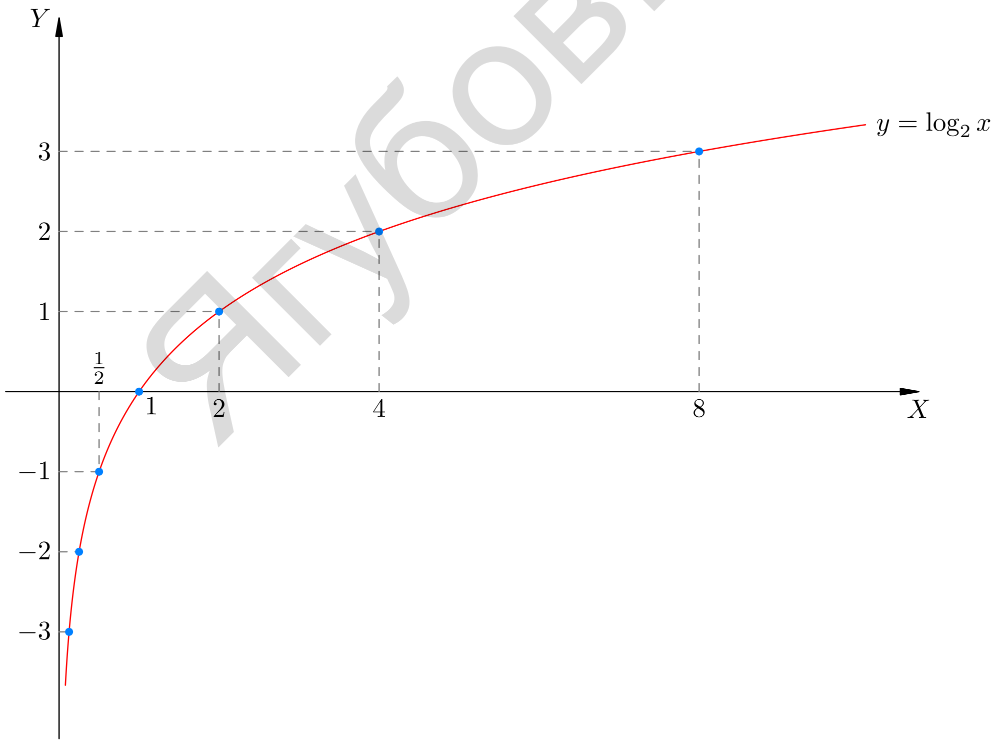

Рис. 4. График функции $y = \log_2 x$

Мы видим, что функция $y = \log_2 x$ обладает следующими свойствами.

- Область определения функции есть множество $(0; +\infty)$.
- Область значений функции есть множество $(-\infty; +\infty)$.
- Функция является монотонно возрастающей.
- Ось Y служит вертикальной асимптотой графика.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Таблица значений:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	−1	−2	−3

График функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ изображён на рис. 5.

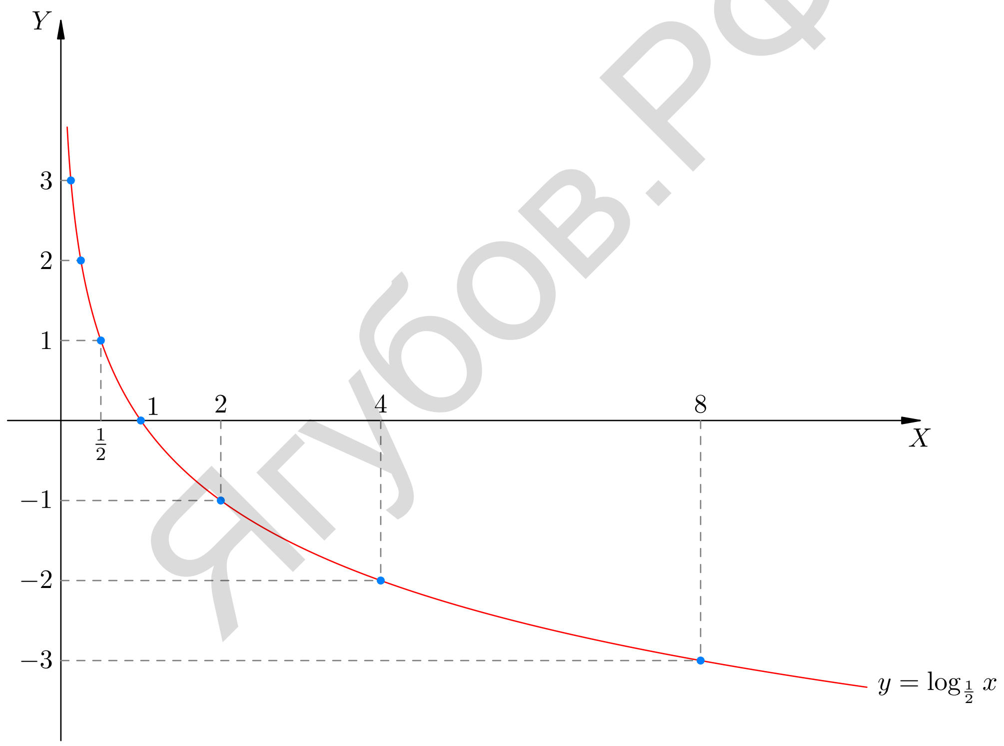

Рис. 5. График функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Функция $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, как видим, обладает следующими важными свойствами.

- Область определения функции есть множество $(0; +\infty)$.
- Область значений функции есть множество $(-\infty; +\infty)$.
- Функция является монотонно убывающей.
- Ось Y служит вертикальной асимптотой графика.

Оказывается, расмотренные функции $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дают исчерпывающее представление о свойствах логарифимической функции.

Вот как выглядит график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ (рис. 6).

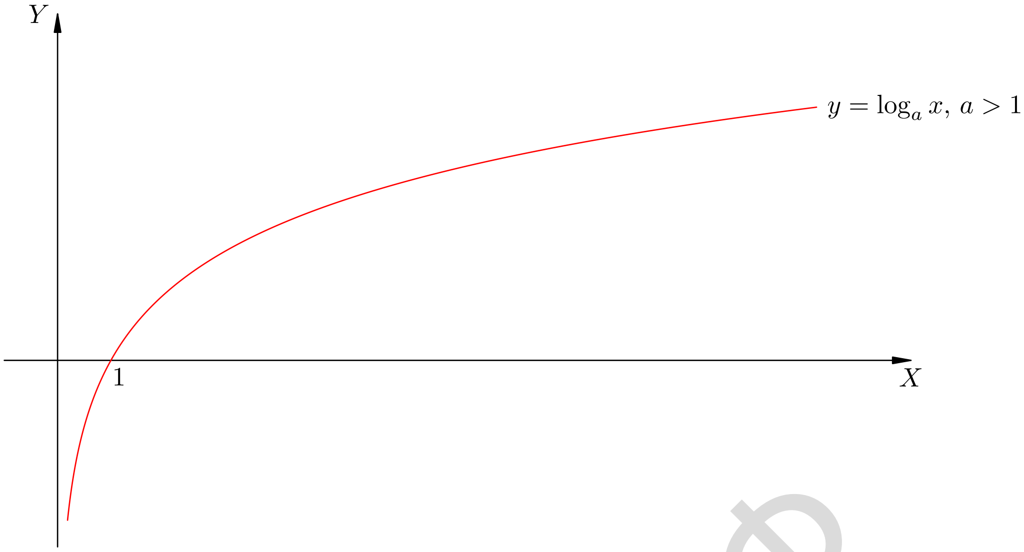

Рис. 6. График функции $y = \log_a x$ при $a > 1$

А вот как выглядит график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ (рис. 7).

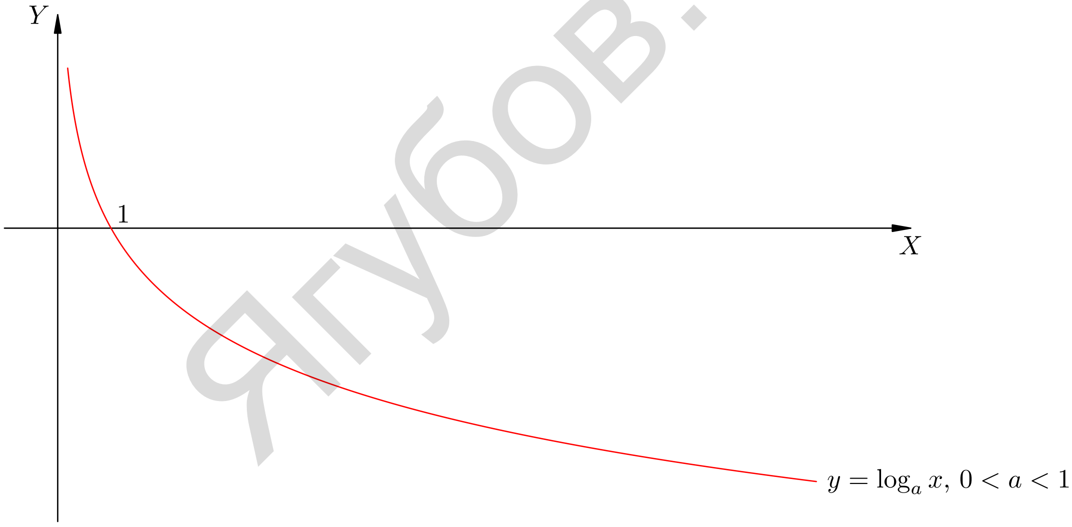

Рис. 7. График функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$

Сформулируем важные для нас свойства логарифмической функции. Они будут постоянно использоваться при решении логарифмических уравнений и неравенств.

- Область определения функции $y = \log_a x$ есть множество $(0; +\infty)$. Таким образом, *логарифм можно вычислить только от положительного числа.*
- Область значений функции $y = \log_a x$ есть множество $(-\infty; +\infty)$. Таким образом, *логарифм может принимать какие угодно значения.*
- Функция $y = \log_a x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$. Ось Y служит вертикальной асимптотой графика функции.

Монотонность логарифмической функции используется, в частности, для доказательства некоторых неравенств.

Пример 6. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 5$?

Решение. Оба этих числа находятся между единицей и двойкой. Давайте сравним каждое из них с числом $3/2$.

С одной стороны, имеем:

$$\log_3 5 = \log_3 \sqrt{25} < \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\,.$$

С другой стороны:

$$\log_2 3 = \log_2 \sqrt{9} > \log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\,.$$

Обратите внимание, что в этих оценках мы использовали монотонное возрастание функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$ (большему значению аргумента отвечает большее значение логарифма).

Итак, $\log_3 5 < 3/2$, $\log_2 3 > 32$. Следовательно, $\log_3 5 < \log_2 3$.