Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — это специального вида последовательность. Поэтому прежде чем давать определение арифметической (а затем и геометрической) прогрессии, нам нужно вкратце обсудить важное понятие числовой последовательности.

Последовательность

Вообразите устройство, на экране которого высвечиваются одно за другим некоторые числа. Скажем, $2, -7, 13, 1, -6, 0, 3, \ldots$ Такой набор чисел как раз и является примером последовательности.

Определение. Числовая последовательность — это множество чисел, в котором каждому числу можно присвоить уникальный номер (то есть поставить в соответствие единственное натуральное число)[1]. Число с номером n называется n-м членом последовательности.

Так, в приведённом выше примере первый номер имеет число 2 — это первый член последовательности, который можно обозначить a_1; номер пять имеет число -6 — это пятый член последовательности, который можно обозначить a_5. Вообще, n-й член последовательности обозначается a_n (или b_n, c_n и т. д.).

Очень удобна ситуация, когда n-й член последовательности можно задать некоторой формулой. Например, формула $a_n = 2n - 3$ задаёт последовательность: $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$ Формула $a_n = (-1)^n$ задаёт последовательность: $-1, 1, -1, 1, \ldots$

Не всякое множество чисел является последовательностью. Так, отрезок $[0; 1]$ — не последовательность; в нём содержится «слишком много» чисел, чтобы их можно было перенумеровать. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел также не является последовательностью. Эти факты доказываются в курсе математического анализа.

Арифметическая прогрессия: основные определения

Вот теперь мы готовы дать определение арифметической прогрессии.

Определение. Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа (называемого разностью арифметической прогрессии).

Например, последовательность $2, 5, 8, 11, \ldots$ является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3. Последовательность $7, 2, -3, -8, \ldots$ является арифметической прогрессией с первым членом 7 и разностью -5. Последовательность $3, 3, 3, \ldots$ является арифметической прогрессией с разностью, равной нулю.

Эквивалентное определение: последовательность a_n называется арифметической прогрессией, если разность $a_{n+1} - a_n$ есть величина постоянная (не зависящая от n).

Арифметическая прогрессия называется *возрастающей*, если её разность положительна, и *убывающей*, если её разность отрицательна.

[1] А вот более лаконичное определение: *последовательность есть функция, определённая на множестве натуральных чисел*. Например, последовательность действительных чисел есть функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

По умолчанию последовательности считаются *бесконечными*, то есть содержащими бесконечное множество чисел. Но никто не мешает рассматривать и конечные последовательности; собственно, любой конечный набор чисел можно назвать конечной последовательностью. Например, конечная последовательность $1, 2, 3, 4, 5$ состоит из пяти чисел.

Формула n-го члена арифметической прогрессии

Легко понять, что арифметическая прогрессия полностью определяется двумя числами: первым членом и разностью. Поэтому возникает вопрос: как, зная первый член и разность, найти произвольный член арифметической прогрессии?

Получить искомую формулу n-го члена арифметической прогрессии нетрудно. Пусть a_n — арифметическая прогрессия с разностью d. Имеем:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В частности, пишем:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,
\end{aligned}$$

и теперь становится ясно, что формула для a_n имеет вид:

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{1}$$

Задача 1. В арифметической прогрессии $2, 5, 8, 11, \ldots$ найти формулу n-го члена и вычислить сотый член.

Решение. Согласно формуле (1) имеем:

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1.$$

Отсюда

$$a_{100} = 3 \cdot 100 - 1 = 299.$$

Свойство и признак арифметической прогрессии

Свойство арифметической прогрессии. В арифметической прогрессии a_n для любого $n \geqslant 2$ выполнено равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\,. \tag{2}$$

Иначе говоря, каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) является средним арифметическим соседних членов.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = a_n,$$

что и требовалось.

Более общим образом, для арифметической прогрессии a_n справедливо равенство

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

при любом $n \geqslant 2$ и любом натуральном $k < n$. Попробуйте самостоятельно доказать эту формулу — тем же самым приёмом, что и формулу (2).

Оказывается, формула (2) служит не только необходимым, но и достаточным условием того, что последовательность является арифметической прогрессией.

Признак арифметической прогрессии. Если для всех $n \geqslant 2$ выполнено равенство (2), то последовательность a_n является арифметической прогрессией.

Доказательство. Перепишем формулу (2) следующим образом:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Отсюда видно, что разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n, а это как раз и означает, что последовательность a_n есть арифметическая прогрессия.

Свойство и признак арифметической прогрессии можно сформулировать в виде одного утверждения; мы для удобства сделаем это для трёх чисел (именно такая ситуация часто встречается в задачах).

Характеризация арифметической прогрессии. Три числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $2b = a + c$.

Задача 2. (*МГУ, экономич. ф-т, 2007*) Три числа $8x$, $3-x^2$ и -4 в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

Решение. По свойству арифметической прогрессии имеем:

$$2(3 - x^2) = 8x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = -5.$$

Если $x = 1$, то получается убывающая прогрессия 8, 2, -4 с разностью -6. Если $x = -5$, то получается возрастающая прогрессия -40, -22, -4; этот случай не годится.

Ответ: $x = 1$, разность равна -6.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Легенда гласит, что однажды учитель велел детям найти сумму чисел от 1 до 100 и сел спокойно читать газету. Однако не прошло и нескольких минут, как один мальчик сказал, что решил задачу. Это был 9-летний Карл Фридрих Гаусс, впоследствии один из величайших математиков в истории.

Идея маленького Гаусса была такова. Пусть

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100.$$

Запишем данную сумму в обратном порядке:

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1,$$

и сложим две этих формулы:

$$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1).$$

Каждое слагаемое в скобках равно 101, а всего таких слагаемых 100. Поэтому

$$2S = 101 \cdot 100 = 10100,$$

откуда

$$S = 5050.$$

Мы используем эту идею для вывода формулы суммы

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

первых n членов арифметической прогрессии. Именно, запишем друг под другом:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

и сложим:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Каждое слагаемое в скобках равно $a_1 + a_n$, а всего таких слагаемых n. Поэтому

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

откуда

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{3}$$

Полезная модификация формулы (3) получается, если в неё подставить формулу n-го члена $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \tag{4}$$

Задача 3. Найти сумму всех положительных трёхзначных чисел, делящихся на 13.

Решение. Трёхзначные числа, кратные 13, образуют арифметическую прогрессию с первым членом 104 и разностью 13; n-й член этой прогрессии имеет вид:

$$a_n = 104 + 13(n-1) = 91 + 13n.$$

Давайте выясним, сколько членов содержит наша прогрессия. Для этого решим неравенство:

$$\begin{gathered} a_n \leqslant 999, \\ 91 + 13n \leqslant 999, \\ 13n \leqslant 908, \\ n \leqslant \frac{908}{13} = 69\frac{11}{13}, \\ n \leqslant 69. \end{gathered}$$

Итак, в нашей прогрессии 69 членов. По формуле (4) находим искомую сумму:

$$S = \frac{2 \cdot 104 + 68 \cdot 13}{2} \cdot 69 = 37674.$$