



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Вариант по математике № 5

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

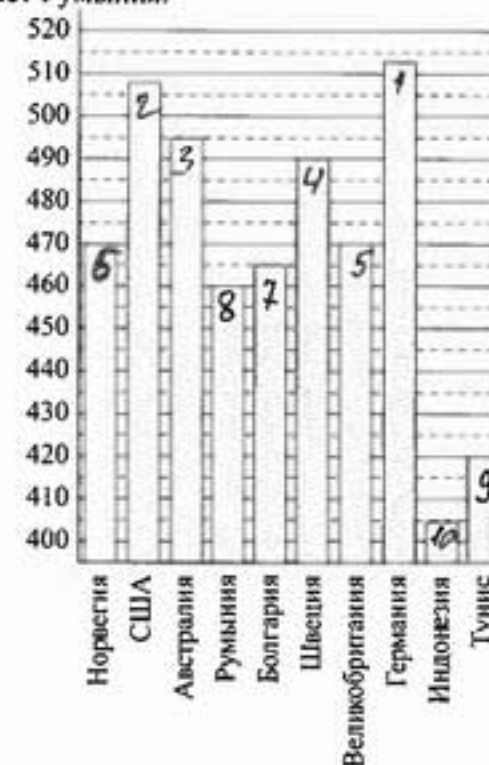
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- B1** Летом килограмм клубники стоит 70 рублей. Маша купила 1 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить со 100 рублей?

Ответ: _____.

- B2** На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран десятое место принадлежит Индонезии. Определите, какое место занимает Румыния.

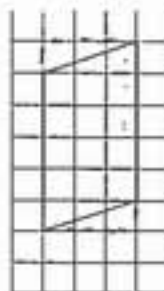


Ответ: _____.





- B3** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____

- B4** В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	350 руб.	Нет	14
Б	Бесплатно	10 мин. — 200 руб.	19
В	200 руб.	15 мин. — 225 руб.	16

Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Ответ: _____

- B5** Найдите корень уравнения $\sqrt{-4-4x} = 4$.

Ответ: _____

- B6** Острые углы прямоугольного треугольника равны 79° и 11° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

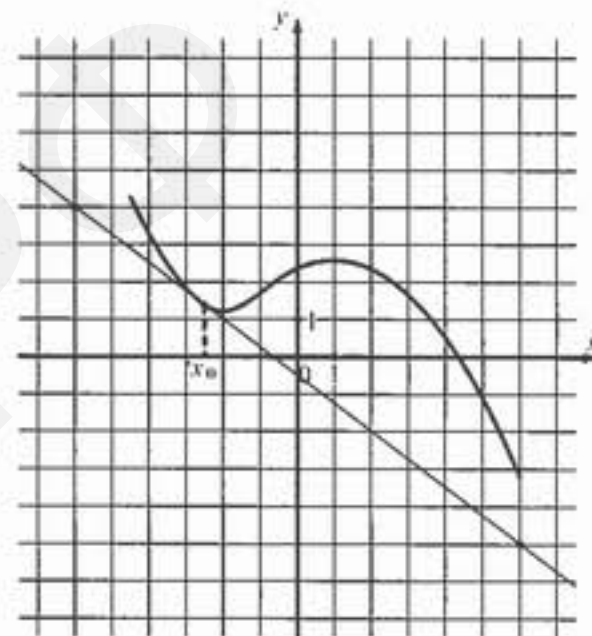


Ответ: _____

- B7** Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

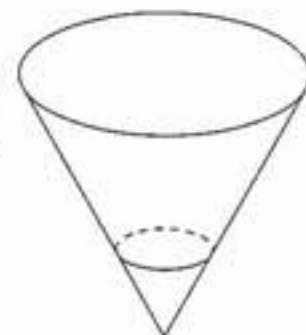
Ответ: _____

- B8** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____

- B9** В сосуд в виде конуса налита жидкость до $\frac{1}{3}$ высоты. Объём налитой жидкости 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?



Ответ: _____

- B10** В сборнике билетов по математике всего 45 билетов, в 9 из них встречается вопрос по логарифмам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по логарифмам.

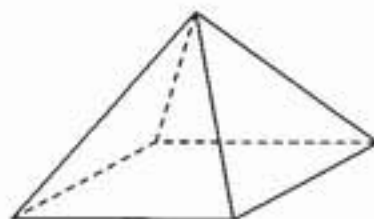
Ответ: _____





- B11** Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8 и высота равна 3.

Ответ: _____.



- B12** При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3,6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____.

- B13** Смешав 35-процентный и 70-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 42-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 46-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 35-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 13)$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3} \sin x$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

- C2** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 10, а сторона основания равна 12.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x^2 - 8x + 41) \leq 3 \log_{6-x} 3, \\ \frac{x^2 - 8x + 13}{x - 6} \leq \frac{x - 1}{2}. \end{cases}$$

- C4** Две стороны треугольника равны 4 и 12, косинус угла между ними равен $\frac{1}{6}$.

В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|\cos x + 3 \sin x - a| = 3 \cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- C6** Каждый из группы учащихся ходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог ходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{8}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?



Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

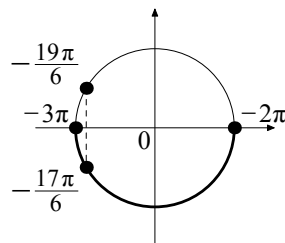
а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3} \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

Ответ: а) $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -\frac{17\pi}{6}; -2\pi$.

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = -\sin 2x, -\sin 2x = -2\sin x \cos x$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $2\sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$, откуда $2\sin x \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$. Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$: $x = -3\pi; x = -\frac{17\pi}{6}; x = -2\pi$.



Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

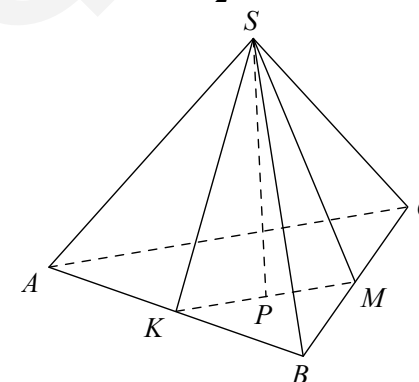
C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 10, а сторона основания равна 12.

Ответ: $3\sqrt{55}$.

Сечением является равнобедренный треугольник SKM , причём его основание KM – средняя линия треугольника ABC .

$$KM = \frac{1}{2} AC = 6.$$



SM – высота равнобедренного треугольника SCB . $SM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Пусть P – середина KM . Тогда высота SP треугольника SKM равна

$$\sqrt{SM^2 - MP^2} = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{55}.$$

Площадь сечения равна

$$SP \cdot MP = \sqrt{55} \cdot 3 = 3\sqrt{55}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x^2 - 8x + 41) \leq 3 \log_{6-x} 3, \\ \frac{x^2 - 8x + 13}{x - 6} \leq \frac{x - 1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $[4 - \sqrt{2}; 4]$, $[4 + \sqrt{2}; 6]$.

Решим первое неравенство. При $6 - x > 1$ получаем:

$$0 < x^2 - 8x + 41 \leq 27; \quad x^2 - 8x + 14 \leq 0, \quad \text{откуда } 4 - \sqrt{2} \leq x \leq 4 + \sqrt{2}.$$

Учитывая условие $x < 5$, получаем: $4 - \sqrt{2} \leq x < 5$.

При $0 < 6 - x < 1$:

$$x^2 - 8x + 41 \geq 27, \quad \text{откуда } x \leq 4 - \sqrt{2} \quad \text{или} \quad x \geq 4 + \sqrt{2}.$$

Учитывая условие $5 < x < 6$, получаем, что в этом случае $4 + \sqrt{2} \leq x < 6$.

Объединяя промежутки, получаем решение первого неравенства:

$$4 - \sqrt{2} \leq x < 5 \quad \text{или} \quad 4 + \sqrt{2} \leq x < 6.$$

Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 16x + 26 - x^2 + 7x - 6}{x - 6} \leq 0; \quad \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 6} \leq 0; \quad \frac{(x - 5)(x - 4)}{x - 6} \leq 0,$$

откуда $x \leq 4$ или $5 \leq x < 6$.

Учитывая, что $2 < 4 - \sqrt{2} < 4$ и $5 < 4 + \sqrt{2} < 6$, получаем решение системы:

$$4 - \sqrt{2} \leq x \leq 4 \quad \text{или} \quad 4 + \sqrt{2} \leq x < 6.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

Две стороны треугольника равны 4 и 12, косинус угла между ними равен $\frac{1}{6}$.

В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

Ответ: 3 или 6.

Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = 12$, $AC = 4$, $\angle BAC = \alpha$, $\cos \alpha = \frac{1}{6}$. По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha} = \sqrt{144 + 16 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6}} = 12,$$

значит, треугольник ABC — равнобедренный, $BC = AB = 12$.

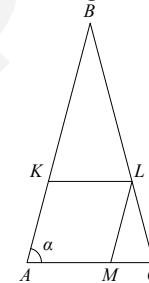


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине A (рис. 1). Пусть $AKLM$ — ромб со стороной x , причём вершина L ромба лежит на стороне BC треугольника ABC , а вершина M — на стороне AC . Треугольники KBL и ABC подобны, т.к. $KL \parallel AC$, значит, $\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{AB}$, или $\frac{x}{4} = \frac{12-x}{12}$. Из этого уравнения находим, что $x = 3$.

В случае, когда C — общий угол ромба и треугольника, получим тот же результат.

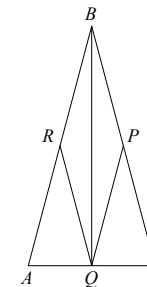


Рис. 2

Предположим теперь, что общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине B (рис. 2). Пусть $BPQR$ — ромб, причём вершина Q ромба лежит на основании AC треугольника ABC , а вершина R — на

стороне AB . Точка Q — середина AC (т.к. BQ — биссектриса, а значит, и медиана равнобедренного треугольника ABC) и $QR \parallel BC$, поэтому QR — средняя линия треугольника ABC . Следовательно, $QR = \frac{1}{2}BC = 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|\cos x + 3\sin x - a| = 3\cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-1; 1]$.

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} 3\cos x + \sin x + a \geq 0, \\ \cos x + 3\sin x - a = -3\cos x - \sin x - a, \\ \cos x + 3\sin x - a = 3\cos x + \sin x + a. \end{cases}$$

Решим уравнения, не обращая внимания на неравенство. Первое уравнение приводится к виду $\cos x + \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = -1$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ решений нет. Второе уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x &= a; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x &= \frac{a}{\sqrt{2}}; \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Если $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}; \quad -1 < \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1.$$

Значит, уравнение имеет корень на этом промежутке, если и только если $-1 < a \leq 1$.

Докажем, что при найденных значениях a неравенство $3\cos x + \sin x + a \geq 0$ верно.

$$(3\cos x + \sin x)^2 = 9\cos^2 x + \sin^2 x + 6\sin x \cos x = 1 + 8\cos^2 x + 6\sin x \cos x.$$

При $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ получаем: $(3\cos x + \sin x)^2 \geq 1$. Следовательно,

$$3\cos x + \sin x + a \geq 1 + a > 1 - 1 = 0.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или в обосновании содержатся неточности	3
Ход решения в целом верен, верно получена либо верхняя, либо нижняя граница множества решений, ответ неверен	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{8}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Ответ: а) да; б) 11; в) $\frac{10}{21}$.

а) Если группа состоит из 5 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 22 учащихся могло быть 11 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 12 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетили не более 5 мальчиков, поскольку если бы их было 6 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{6}{6+11} = \frac{6}{17}$, что больше $\frac{1}{3}$. Аналогично, кино посетили не более 6 мальчиков,

поскольку $\frac{7}{7+11} = \frac{7}{18} > \frac{3}{8}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 22 учащихся могло быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовали два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \leq \frac{3}{8}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{3}{5}$. Тогда

$\frac{m_1+m_2}{d} \leq \frac{11}{10}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \geq \frac{1}{\frac{11}{10}+1} = \frac{10}{21}.$$

Если группа состоит из 5 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{10}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Ответы

	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7
B1	60	16	20	46
B2	6	8	7	4
B3	35	15	18	21
B4	960	1305	750	835
B5	-7	-5	-8	-4
B6	29	34	26	18
B7	-0,3	-0,5	-0,2	-0,9
B8	-0,25	-0,75	-1,25	-1,75
B9	315	104	77	152
B10	0,64	0,2	0,14	0,1
B11	96	144	384	864
B12	25	20	60	37,5
B13	70	80	45	10
B14	-1	-2	-2	-3