

5.2. Параметр как переменная

Упражнения к 5.2

1. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 - (a+2)x^2 - 2ax + 4a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4x^3 - 2(a+1)x^2 - ax + a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

2. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 4x^3 - 8ax^2 + 36ax - 9a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^3 - 17ax^2 + 32ax + 16a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

3. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 6x^3 - 5ax^2 + 24ax + 4a^2 = 0$ имеет ровно три различных корня.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 8x^3 - 10ax^2 + 72ax + 9a^2 = 0$ имеет ровно три различных корня.

4. а) Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых уравнение $10x^3 + x^2 - (2a+21)x - 3a + 5 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

б) Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых уравнение $6x^3 + 25x^2 - (2a-25)x - 5a + 7 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

5. а) Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых уравнение $6x^5 + 8x^4 + 13x^3 - 3ax^2 - 2(2a+5)x - 2a - 13 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

б) Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых уравнение $8x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 2(2a-1)x^2 + 5(a+1)x - 2a + 1 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

6. а) Для каждого неотрицательного значения параметра a найдите множество решений неравенства $4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geq 0$.

б) Для каждого неотрицательного значения параметра a найдите множество решений неравенства $a^3x^4 + 2a^2x^2 - 8x + a + 4 \geq 0$.

7. а) Найдите все значения параметра a , при которых среди решений неравенства $(a-x^2)(a+x-2) < 0$ нет ни одного решения неравенства $x^2 < 1$.

б) Найдите все значения параметра a , при которых среди решений неравенства $(9a-4x^2)(3a+4x-24) < 0$ нет ни одного решения неравенства $x^2 < 9$.

8. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^3 - 2(a+4)x^2 + 12ax + 8a^2 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^3 + 2(a+6)x^2 + 28ax + 8a^2 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

9. а) Числа x , y , z таковы, что $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $2x + y - 2z$?

б) Числа a , b , c таковы, что $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?

10. а) Найдите наименьшее возможное значение выражения $\cos x + 3\cos y$, если $\sin^2 x + 3\sin^2 y = 2$.

б) Найдите наибольшее возможное значение выражения $4\sin x + \sin y$, если $4\cos^2 x + \cos^2 y = 3$.

11. а) Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 600 изделий первого типа и не более 300 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах A и B (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 20 минут испытаний на стенде A и 6 минут испытаний на стенде B ; для проверки одного изделия второго типа требуется 24 минуты испытаний на стенде A и 20 минут испытаний на стенде B . По техническим причинам стенд A может работать не более 240 часов в месяц, а стенд B – не более 120 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 50 д.е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа – 90 д.е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

б) Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 300 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на стендах A и B (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде A и 30 минут испытаний на стенде B ; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде A и 9 минут испытаний на стенде B . По техническим причинам стенд A может работать не более 360 часов в месяц, а стенд B – не более 180 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д.е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа – 75 д.е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

12. а) Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 15 часов работы цеха A и 10 часов работы цеха B , а для изготовления изделия второго типа требуется 5 часов работы цеха A и 20 часов работы цеха B (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех A может работать не более 150 часов в неделю, а цех B – не более 100 часов в неделю. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 5000 д.е. прибыли, а каждое изделие второго типа – 4000 д.е. прибыли. Найдите наибольшую возможную еженедельную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует еженедельно выпускать для получения этой прибыли.

б) Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 30 часов работы цеха A и 20 часов работы цеха B , а для изготовления изделия второго типа требуется 10 часов работы цеха A и 40 часов работы цеха B (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех A может работать не более 600 часов в месяц, а цех B – не более 400 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15000 д.е. прибыли, а каждое изделие второго типа – 12000 д.е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно выпускать для получения этой прибыли.

Ответы к упражнениям § 5.2

1. а) если $a \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 6) \cup (6; +\infty)$, то $x = a$, $x = 1 \pm \sqrt{4a+1}$; если $a = 0$, то $x = 0$ и $x = 2$; если $a = 6$, то $x = -4$ и $x = 6$; если $a = -\frac{1}{4}$, то $x = -\frac{1}{4}$, $x = 1$; если $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$, то $x = a$; б) если

$a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{8a+1}}{4}$; если $a = 0$, то $x = 0$ и $x = 0,5$; если $a = 3$, то $x = -1$ и $x = 1,5$; если $a = -\frac{1}{8}$, то $x = -\frac{1}{16}$, $x = \frac{1}{4}$; если $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$, то $x = \frac{a}{2}$. 2. а) если $a \in (4; +\infty)$, то $x = \pm 3\sqrt{a}$; если $a = 4$, то $x \in \{-6; 2; 6\}$; если $a \in (0; 1,44) \cup (1,44; 4)$, то $x = \pm 3\sqrt{a}$, $x = 2 \pm \sqrt{4-a}$; если $a = 1,44$, то $x \in \{-3,6; 0,4; 3,6\}$; если $a = 0$, то $x \in \{0; 4\}$; если $a \in (-\infty; 0)$, то $x = 2 \pm \sqrt{4-a}$; б) если $a \in \left(0; \frac{64}{225}\right) \cup \left(\frac{64}{225}; +\infty\right)$, то $x = \pm 4\sqrt{a}$, $x = 1 \pm \sqrt{a+1}$; если $a = \frac{64}{225}$, то $x \in \left\{-\frac{32}{15}; \frac{2}{15}; \frac{32}{15}\right\}$; если $a = 0$, то $x \in \{0; 2\}$; если $a \in (-1; 0)$, то $x = 1 \pm \sqrt{a+1}$; если $a = -1$, то $x = 1$; если $a \in (-\infty; -1)$, то корней нет. 3. а) 16; б) 9. 4. а) $-1; 17; 29; 107$; б) $5; 9; 77$. 5. а) -14 ; б) 7. 6. а) если $a = 0$, то $x \in [-0,25; +\infty)$; если $a \in (0; 2)$, то $x \in \left(-\infty; -\frac{2+\sqrt{4-2a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{4-2a}}{2a}; +\infty\right)$; если $a \in [2; +\infty)$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; б) если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0,5]$; если $a \in (0; 1)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; +\infty\right)$; если $a \in [1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; +\infty)$. 7. а) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$; б) $(-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$. 8. а) $x \in (-\infty; 2a]$ при $a \in (-\infty; -4)$; $x \in (-\infty; -8] \cup \{4\}$ при $a = -4$; $x \in (-\infty; 2a] \cup [4-2\sqrt{a+4}; 4+2\sqrt{a+4}]$ при $a \in (-4; 0)$; $x \in (-\infty; 8]$ при $a = 0$; $x \in (-\infty; 4-2\sqrt{a+4}] \cup [2a; 4+2\sqrt{a+4}]$ при $a \in (0; 5)$; $x \in (-\infty; -2] \cup \{10\}$ при $a = 5$; $x \in (-\infty; 4-2\sqrt{a+4}] \cup [4+2\sqrt{a+4}; 2a]$ при $a \in (5; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; -6-2\sqrt{9-a}] \cup [-6+2\sqrt{9-a}; -2a]$ при $a \in (-\infty; 0)$; $x \in (-\infty; -12] \cup \{0\}$ при $a = 0$; $x \in (-\infty; -6-2\sqrt{9-a}] \cup [-2a; -6+2\sqrt{9-a}]$ при $a \in (0; 5)$; $x \in (-\infty; -2]$ при $a = 5$; $x \in (-\infty; -2a] \cup [-6-2\sqrt{9-a}; -6+2\sqrt{9-a}]$ при $a \in (5; 9)$; $x \in (-\infty; -18] \cup \{-6\}$ при $a = 9$; $x \in (-\infty; -2a]$ при $a \in (9; +\infty)$. 9. а) $-\sqrt{\frac{32}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{33}{2}}$. 10. а) $-2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{10}$. 11. а) 450 изделий первого типа; 225 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 42750 д.е.; б) 225 изделий первого типа; 450 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 64125 д.е. 12. а) 10 изделий первого типа; 0 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 50000 д.е.; б) 20 изделий первого типа; 0 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 300 000 д.е.