5.1. Метод упрощающего значения

Упражнения к 5.1

1. а) Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $2\log_{a^2+2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)$ при любом значении параметра a.

б) Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $2\log_{3a^2+2}\left(7-\sqrt{34+x}\right)=\log_{2a^2+3}(3-x)$ при любом значении параметра a.

2. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases}(1+3x)^{2a}+\left(b^2-4b+5\right)^y=2,\\ x^2y^2-(2-b)xy+a^2+2a=3.\end{cases}$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases}2\left(1+|z|\right)^a+\left(b^2-2b+2\right)^y=3,\\ zy\left(y+b-2\right)=2a^2-7a+3.\end{cases}$

3. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases}\left(x^2+1\right)^a+\left(b^2+1\right)^y=2,\\ a+bxy+x^2y=1.\end{cases}$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases}2^{bx}+(a+1)by^2=a^2,\\ (a-1)x^2+y^2=1.\end{cases}$

4. а) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a имеет хотя бы одно решение неравенство $\left|\log_6\frac{x}{36}+\frac{10b+3a+31}{5}x^2-9a^2-9a-1\right|\le\log_6\frac{36}{x}+\frac{10b+3a+41}{5}x^2-2(3a+1)x+9a^2+15a+3$.

б) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a имеет хотя бы одно решение неравенство $\left|\log_5\frac{x}{25}-\frac{a+5b-11}{5}x^2-a^2+3a-1\right|\le\log_5\frac{25}{x}-\frac{a+5b-21}{5}x^2+2(a-1)x+a^2-5a+3$.

5. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение $x^2-4|x|-7|a+b+1|+3|b-1|-2b-5a-14=0$ имеет ровно два корня.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение $x^2-4|x|-7|a+2b-1|+3|2b+3|-4b+5a-20=0$ имеет ровно два корня.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство $a(4-\sin x)^4-3+\cos^2x+a>0$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство $2a-4+a\left(3-\sin^2x\right)^2+\cos^2x<0$.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x справедливо неравенство $\log_{\frac{a+1}{a+2}}\left(x^2+3\right)>1$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x справедливо неравенство $\log_{\frac{a}{a+1}}\left(x^2+2\right)>1$.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых возрастает и не имеет критических точек на всей прямой функция $y(x) = 8ax - a\sin 6x - 7x - \sin 5x$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых убывает и не имеет критических точек на всей прямой функция $y(x) = a\sin 7x + 8ax + \sin 4x - 5x$.

Ответы к упражнениям к 5.1

1. а) 1; б) 2. **2**. а) $-3; 1$; б) $0{,}5; 3$. **3**. а) 1; б) -1. **4**. а) $[-3{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 3]$. **5**. а) $(-3; +\infty)$; б) $(-\infty; 2{,}5)$. **6**. а) $\left(\frac{3}{82}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{11}\right)$. **7**. а) $(-\infty; -2{,}5)$; б) $(-\infty; -2)$. **8**. а) $(6; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{15}\right)$.

Ягубов.РФ