

Упражнения 1.1

1. а) Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $9(5x-1)a^2 - (59x-55)a + 6(x-1) = 0$.

б) Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $7(2x-1)a^2 - (23x-22)a + 3(x-1) = 0$.

2. а) Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства $2xa^2 - (5x+2)a + 2x+1 \geq 0$.

б) Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства $5xa^2 - (26x+1)a + 5x+5 \leq 0$.

3. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|9x+7a-3| = |4x+3a+4|$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно -8 .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|7x+8a-5| = |9x+7a-2|$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 9 .

4. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|3x-5a-3| \leq 7-5a-x$ имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|3x-4a-1| \leq 5-4a-x$ имеет единственное решение.

5. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет не менее трех решений система уравнений
$$\begin{cases} (2a^2 - 11a)x - 25y = 2a^2 - 13a - 30, \\ 8x - 5y = 3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет не менее трех решений система уравнений
$$\begin{cases} (9a^2 - 49a)x + 36y = 9a^2 - 58a + 44, \\ 9y - 5x = 5. \end{cases}$$

6. а) Для каждого значения параметра a решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + 7y = 2, \\ 3x + y = a, \\ 3x + 13y = a^2 + 3a. \end{cases}$$

б) Для каждого значения параметра a решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - y = a, \\ 4x - y = a^2 + 2a. \end{cases}$$

7. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы одно

решение система уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 4a, \\ \frac{2}{x} - \frac{6}{y} = 3 + 4a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы одно решение

система уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3a, \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 3 - a. \end{cases}$$

8. а) Найдите все значения параметра a , при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-6y)^{-1} = -0,1, \\ 7x-2y = 2a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x+y = 2a, \\ \frac{1}{x-4y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$
 имеет единственное решение и эти решения совпадают.

б) Найдите все значения параметра a , при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-5y)^{-1} = -\frac{1}{8}, \\ 3x+y = 3a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 7x-3y = 3a, \\ \frac{1}{x-3y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$
 имеет единственное решение и эти решения совпадают.

9. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно

решение система уравнений
$$\begin{cases} 12\cos^2 x + 11\cos^2 y + 33a = 31, \\ 33\cos^2 x + 4\cos^2 y + 151 = 198a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение

система уравнений
$$\begin{cases} 21\sin^2 x + 8\sin^2 y + 59 = 6a, \\ 24\sin^2 x + 7\sin^2 y + 91 = 9a. \end{cases}$$

10. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений

системы неравенств
$$\begin{cases} 5^{x+2y} \leq 25^{x+a-4}, \\ 6^{x-3a-3} \geq 36^{x+a-3} \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 3.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений

системы неравенств
$$\begin{cases} 7^{x+2a+1} \leq 49^{x+a+1}, \\ 3^{x-a-2} \geq 9^{x+a+2} \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

11. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один

корень уравнение $6\log_7 \sin x + a\log_7 \sin x = a^2 + 5a + 4$.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень

уравнение $\log_{0,5} \cos x + 7a = a\log_{0,25} \cos x + a^2 + 12$.

12. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение $(2^{\sin x} - 1)a^2 - (3 \cdot 2^{\sin x} - 1)a + 2^{\sin x + 1} = 0$.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение $(3^{\cos x} - 1)a^2 - (5 \cdot 3^{\cos x} - 2)a + 2 \cdot 3^{\cos x + 1} = 0$.

Ответы к упражнениям 1.1

1. а) При $a = \frac{1}{9}$ корнем является любое действительное число; при $a = \frac{6}{5}$ уравнение не имеет корней; при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; \frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$ уравнение не имеет корней; б) при $a = \frac{1}{7}$ корнем является любое действительное число; при $a = \frac{3}{2}$ уравнение не имеет корней; при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{7}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ уравнение не имеет корней. 2. а) $\left(-\infty; \frac{1}{a-2}\right]$ при $a \in (-\infty; 0,5) \cup (2; +\infty)$; $(-\infty; +\infty)$ при $a = 0,5$; $\left[\frac{1}{a-2}; +\infty\right)$ при $a \in (0,5; 2)$; решений нет при $a = 2$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{5a-1}\right]$ при $a \in (-\infty; 0,2) \cup (5; +\infty)$; решений нет при $a = 0,2$; $\left[\frac{1}{5a-1}; +\infty\right)$ при $a \in (0,2; 5)$; $(-\infty; +\infty)$ при $a = 5$. 3. а) $\frac{239}{7}$; б) $-\frac{542}{51}$. $a = 5$. 4. а) $0,9$; б) $\frac{7}{8}$. 5. а) $-2,5$; б) $\frac{4}{9}$. 6. а) $(0,25; 0,25)$ при $a = 1$; $(-1,36; 0,48)$ при $a = -0,36$; нет решений при прочих a ; б) $(1; 1)$ при $a = 1$; $\left(\frac{2}{9}; \frac{16}{9}\right)$ при $a = -\frac{4}{3}$; нет решений при прочих a . 7. а) $\left(-\infty; \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{16}\right) \cup \left(\frac{3}{16}; \frac{3}{13}\right) \cup \left(\frac{3}{13}; +\infty\right)$. 8. а) 5 ; б) $\frac{8}{3}$. 9. а) $\left[\frac{17}{22}; \frac{9}{11}\right]$; б) $[10,5; 11]$. 10. а) $-2,2$; б) -2 . 11. а) $(-\infty; -6) \cup [-4; -1]$; б) $(-\infty; 2) \cup [3; 4]$. 12. а) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right] \cup \{2\} \cup \left(\frac{27}{8}; +\infty\right)$.