

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

Тема 4. Продолжение. Начало в № 4/2014

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ И ДРУГИЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

4.2. Преобразования графиков

Существенной частью решения рассматриваемых ниже задач является построение графика некоторой функции, в том числе при помощи элементарных преобразований графика известной функции. Даже если преобразования графиков ранее не изучались, понять, как они «устроены» и «работают», можно, задавая себе довольно очевидные вопросы и отвечая на них.

Например, как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(x) + b$? Ответ на этот вопрос достаточно прост: если абсиссы точек этих графиков одинаковы, то соответствующие им ординаты отличаются на $|b|$. Поэтому

- график функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом данного графика вдоль оси Oy на $|b|$ единиц вверх (если $b > 0$) или вниз (если $b < 0$) (рис. 1).

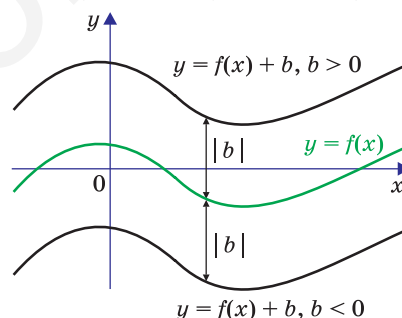


Рис. 1

А как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(x - a)$? Ответ на этот вопрос также не слишком сложен: если ординаты точек этих графиков одинаковы, то соответствующие им абсиссы отличаются на $|a|$. Поэтому

- график функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом данного графика вдоль оси Ox на $|a|$ единиц вправо (при $a > 0$) или влево (при $a < 0$) (рис. 2).

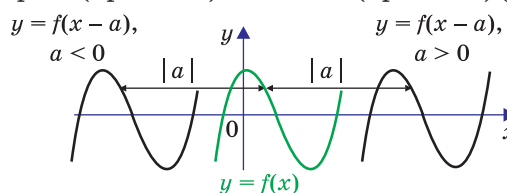
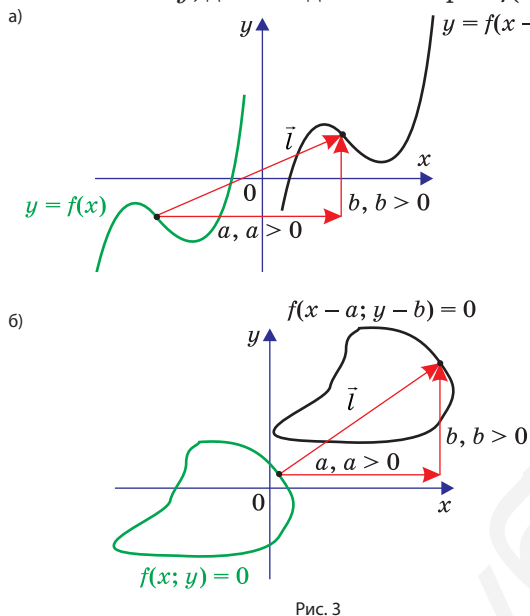


Рис. 2



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Упражнения к п. 4.2 и таблица.)

Теперь можно сделать следующий вывод: график функции $y = f(x - a) + b$ получается последовательными параллельными переносами графика функции $y = f(x)$ на $|a|$ единиц вдоль оси Ox и на $|b|$ единиц вдоль оси Oy . Заметим, что такое преобразование можно описать короче: график функции $y = f(x - a) + b$ получается сдвигом (параллельным переносом) графика функции $y = f(x)$ на вектор $\vec{l}(a; b)$ (рис. 3, а; здесь $a > 0$ и $b > 0$). Для дальнейшего важно, что и график уравнения $f(x - a; y - b) = 0$ получается сдвигом (параллельным переносом) графика уравнения $f(x; y) = 0$ на вектор $\vec{l}(a; b)$ (рис. 3, б; здесь $a > 0$ и $b > 0$). Напомним, что графиком уравнения $f(x; y) = 0$ называют множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy , для каждой из которых $f(x; y) = 0$.



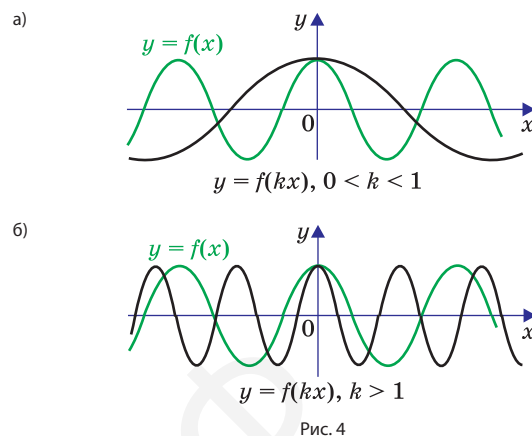
Ответим теперь на следующий вопрос: как из графика функции $y = f(x)$ получить, например, график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ или $y = f(2x)$? И здесь нам помогут достаточно простые рассуждения. В самом деле, если ординаты точек графиков функций $y = f(x)$, $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ и $y = f(2x)$ одинаковы, то соответствующие им абсциссы точек графика $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ вдвое больше, а точек графика $y = f(2x)$ вдвое меньше, чем абсциссы точек графика $y = f(x)$. Поэтому для того, чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, нужно данный график «растянуть» в два раза вдоль оси абсцисс (иногда в таких случаях говорят о растяжении графика от оси Oy).

Аналогично, для того, чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(2x)$, нужно данный график «сжать» в два раза вдоль

оси абсцисс (иногда в таких случаях говорят о сжатии графика к оси Oy).

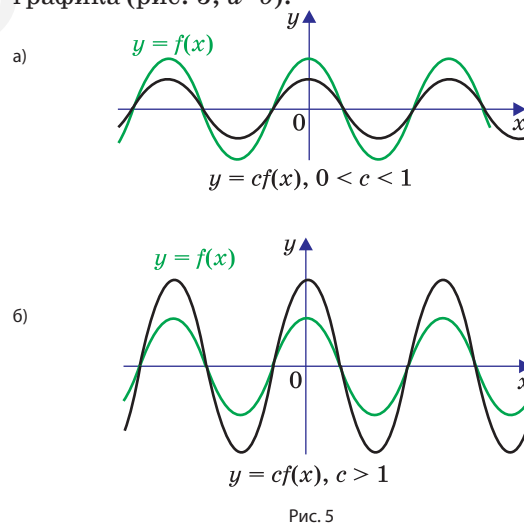
Вообще,

- для построения графика функции $y = f(kx)$ при $k > 0$, $k \neq 1$, надо растянуть график функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси абсцисс. При этом, если $k > 1$, часто говорят не о растяжении, а о сжатии графика (рис. 4, а–б).



Аналогично, рассматривая графики функций $y = f(x)$ и $y = c \cdot f(x)$, можно сделать следующий вывод:

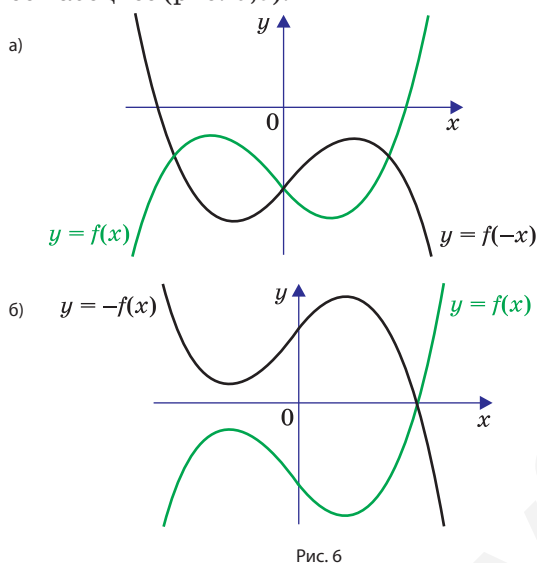
- для построения графика функции $y = c \cdot f(x)$ при $c > 0$, $c \neq 1$, надо растянуть график функции $y = f(x)$ в c раз вдоль оси ординат. При этом, если $c < 1$, часто говорят не о растяжении, а о сжатии графика (рис. 5, а–б).



При изучении двух последних преобразований графиков функций коэффициенты k и c растяжения (в некоторых учебниках и пособиях все такие преобразования называют сжатием) считались положительными. Для того, чтобы уметь строить графики и в том случае, если эти коэффициенты отрицательны, рассмотрим, с помощью каких преобразований можно из графика функции $y = f(x)$ получить графики функций

$y = f(-x)$ и $y = -f(x)$. Если абсциссы точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки, то соответствующие им ординаты одинаковы. Значит, графики этих функций симметричны относительно оси ординат. Если абсциссы точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ равны, то соответствующие им ординаты равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки. Значит, графики этих функций симметричны относительно оси абсцисс. Теперь можно сформулировать правило:

- для построения графика функции $y = f(-x)$ надо зеркально отразить график функции $y = f(x)$ относительно оси ординат (рис. 6, а); для построения графика функции $y = -f(x)$ надо зеркально отразить график функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс (рис. 6, б).



С помощью последовательных преобразований графиков можно из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = c \cdot f(kx + l) + b$. Рассмотрим возможную последовательность таких преобразований.

1. Представляем искомую функцию в виде $y = c \cdot f(k(x + a)) + b$.

Для этого нужно вынести коэффициент k за скобку:

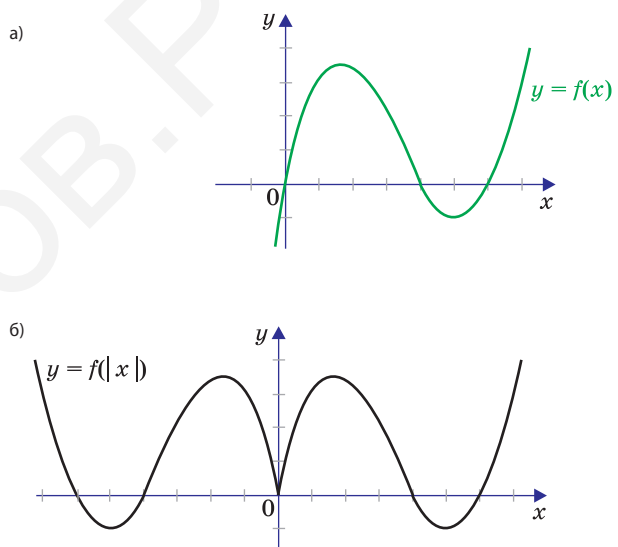
$$y = c \cdot f\left(k\left(x + \frac{1}{k}\right)\right) + b,$$

и обозначить $\frac{1}{k}$ через a .

2. Строим график функции $y = p_1(x)$, где $p_1(x) = f(kx)$.
3. Строим график функции $y = p_2(x)$, где $p_2(x) = p_1(x + a) = f(k(x + a))$.
4. Строим график функции $y = p_3(x)$, где $p_3(x) = c \cdot p_2(x) = c \cdot f(k(x + a))$.
5. Строим график функции $y = p_4(x)$, где $p_4(x) = p_3(x) + b = c \cdot f(k(x + a)) + b$.

Обратим внимание на то, что пункты 2–4 данного алгоритма можно выполнять в любой последовательности. Кроме того, если коэффициенты растяжения k и c отрицательны, то в пунктах 2 и 4 нужно сначала выполнить растяжение в $|k|$ или в $|c|$ раз вдоль соответствующей оси, а затем зеркально отразить относительно другой оси полученный после растяжения график.

Дополним список преобразований графиков функций еще двумя преобразованиями, связанными с построением графиков функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ при условии, что график функции $y = f(x)$ задан. Рассмотрим построение графика функции $y = f(|x|)$. При $x \geq 0$ график этой функции совпадает с графиком функции $y = f(x)$, поскольку в этом случае $|x| = x$. При $x < 0$ искомый график совпадает с графиком функции $y = f(-x)$, поскольку в этом случае $|x| = -x$. Поэтому для построения искомого графика при $x < 0$ нужно зеркально отразить относительно оси ординат ту часть графика функции $y = f(x)$, для которой $x \geq 0$ (рис. 7, а–б).



Для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно заметить, что при $f(x) \geq 0$ он совпадает с графиком функции $y = f(x)$, поскольку в этом случае $|f(x)| = f(x)$, а при $f(x) < 0$ ординаты точек графика $y = |f(x)|$ равны ординатам соответствующих точек графика $y = f(x)$ по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Поэтому график функции $y = |f(x)|$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, зеркально отразив относительно оси абсцисс те его части, которые расположены ниже этой оси, и оставив без изменения части, расположенные выше оси (рис. 8, а–б).

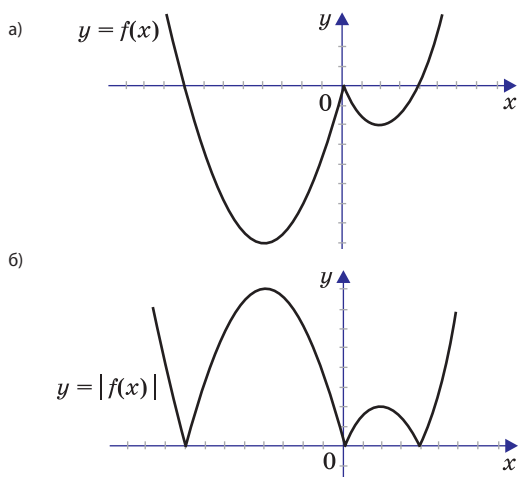


Рис. 8

Приведем сводную таблицу преобразований графиков.

Пользуясь этой таблицей, можно строить графики более сложных функций. Так, для построения графика функции $y = |f(x)|$ нужно построить сначала график функции $y = f(x)$, а затем ту его часть, которая лежит ниже оси Ox , отразить симметрично относительно этой оси.

Перейдем к примерам.

Пример 1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$$

и рассмотрим графики функций

$$y = \sqrt{3 - 2x - x^2} \text{ и } y = -ax + 4a + 2.$$

Поскольку правая часть формулы $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ неотрицательна, то и левая ее часть не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2 = 3 - 2x - x^2, \\ y \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Значит, графиком функции $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ является та часть окружности $(x+1)^2 + y^2 = 4$, ординаты точек которой неотрицательны, то есть полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1; 0)$, расположенная не ниже оси абсцисс. Эта полуокружность имеет с осью абсцисс общие точки $A(-3; 0)$ и $B(1; 0)$. Графиком функции $y = -ax + 4a + 2$ является прямая. Заметим, что $y = -a(x-4) + 2$ и если $x = 4$, то $y = 2$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y = -ax + 4a + 2$ при любом значении параметра проходит через точку $M(4; 2)$. Данное уравнение имеет единственный корень только в том случае, когда эта прямая имеет с полуокружностью единственную общую точку. Последнее возможно, если эта прямая касается полуокружности либо расположена между прямыми MA и MB (рис. 9) так, что ее угловой коэффициент $-a \in (a_1; a_2]$, где a_1 и a_2 — угловые коэффициенты прямых MA и MB соответственно. Поскольку наиболее удаленная от оси абсцисс точка C имеет ту же ординату, что и точка M , то прямая MC , параллельная оси абсцисс, будет касательной к полуокружности. В этом случае $a = 0$. Найдем теперь a_1 и a_2 . Поскольку точка $A(-3; 0)$ принадлежит прямой $y = -ax + 4a + 2$, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому

$$0 = 3a + 4a + 2, \quad a = -\frac{2}{7}.$$

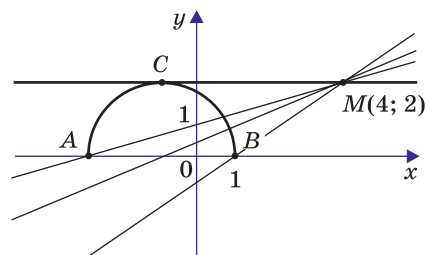


Рис. 9

Преобразование графика функции $y = f(x)$

$y = f(x) + b$	Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $ b $ единиц вверх (при $b > 0$) или вниз (при $b < 0$)
$y = f(x - a)$	Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $ a $ единиц вправо (при $a > 0$) или влево (при $a < 0$)
$y = f(kx), k > 0$	Растяжение (сжатие) графика функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси Ox
$y = c \cdot f(x), c > 0$	Растяжение (сжатие) графика функции $y = f(x)$ в c раз вдоль оси Oy
$y = f(-x)$	Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy
$y = -f(x)$	Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси Oy части графика функции $y = f(x)$, расположенной в правой координатной полуплоскости: при этом часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в правой координатной полуплоскости, сохраняется, а его часть, расположенная в левой координатной полуплоскости, отбрасывается
$y = f(x) $	Симметрия относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной в нижней координатной полуплоскости: при этом часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в верхней координатной полуплоскости, сохраняется, а его часть, расположенная в нижней координатной полуплоскости, отбрасывается

Таким образом, $a_1 = \frac{2}{7}$. Поскольку точка $B(1; 0)$ принадлежит прямой $y = -ax + 4a + 2$, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $0 = -a + 4a + 2$, откуда $a = -\frac{2}{3}$. Таким образом, $a_2 = \frac{2}{3}$. Значит, $-a \in (a_1; a_2]$, если $\frac{2}{7} < -a \leq \frac{2}{3}$, откуда $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$.

Ответ: $\{0\} \cup \left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right)$.

Замечание. Обратим внимание на то, что при выборе функций в таких задачах целесообразно руководствоваться следующим правилом (разумеется, в тех задачах, где это возможно): график одной из функций не должен зависеть от параметра. Кроме того, часто в решении таких задач удается существенно продвинуться, проанализировав функцию, зависящую от параметра, и найдя какое-то ее общее для всех значений параметра свойство. В рассмотренном примере таким свойством являлась принадлежность точки $M(4; 2)$ графику функции при любом значении параметра. В следующей задаче таким свойством является принадлежность вершины угла некоторой фиксированной прямой.

Пример 2. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x - a| + 3$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$|x^2 + 2x - 3| = |x - a| + 2a + 3$$

и рассмотрим графики функций

$$y = |x^2 + 2x - 3| \text{ и } y = |x - a| + 2a + 3.$$

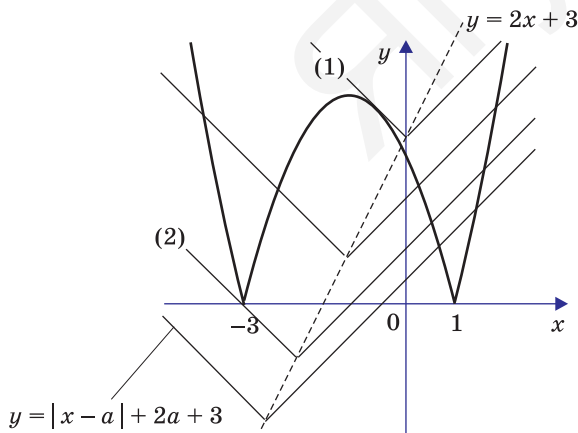


Рис. 10

График функции $y = |x^2 + 2x - 3|$ получается из графика функции $y = x^2 + 2x - 3$ (это парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-1; -4)$, точками пересечения

параболы с осями координат являются $(1; 0)$, $(-3; 0)$, $(0; -3)$) с помощью зеркального отражения (симметрии) относительно оси абсцисс части параболы, расположенной ниже этой оси. График функции $y = |x - a| + 2a + 3$ получается из графика функции $y = |x|$ (этот график представляет собой прямой угол с вершиной в точке $(0; 0)$ и сторонами, лежащими на прямых $y = x$ и $y = -x$ выше оси абсцисс) параллельным переносом на вектор $\vec{l}(a; 2a + 3)$. Таким образом, графиком функции $y = |x - a| + 2a + 3$ является прямой угол с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = a$, $y_0 = 2a + 3$. Из двух последних формул следует, что $y_0 = 2x_0 + 3$. Следовательно, вершина угла $y = |x - a| + 2a + 3$ лежит на прямой $y = 2x + 3$, а не является произвольной точкой плоскости. Данное уравнение имеет ровно три различных корня, если графики функций имеют ровно три общие точки, что возможно только в двух случаях: соответствующие положения угла $y = |x - a| + 2a + 3$ для этих случаев обозначены на рисунке 10 цифрами (1) и (2). В случае (1) сторона угла $y = |x - a| + 2a + 3$ касается параболы $y = |x^2 + 2x - 3|$ в точке, лежащей на отраженном участке параболы $y = x^2 + 2x - 3$ (отсюда $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$) левее вершины угла, то есть в точке, абсцисса которой меньше a (отсюда $|x - a| = -x + a$). Касание означает, что квадратное уравнение

$$-x^2 - 2x + 3 = -x + a + 2a + 3$$

имеет единственный корень, то есть что его дискриминант равен нулю. Приведем уравнение к стандартному виду $x^2 + x + 3a = 0$ и, приравняв дискриминант $D = 1 - 12a$ к нулю, найдем $a = \frac{1}{12}$. В случае (2) сторона угла, расположенная слева от его вершины (отсюда $|x - a| = -x + a$ и $y = -x + 3a + 3$), проходит через точку $(-3; 0)$. Поэтому $0 = -(-3) + 3a + 3$, откуда $a = -2$.

Ответ: $\frac{1}{12}; -2$.

Пример 3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \left| \frac{1}{x} + 4 \right| = 2a$$

имеет хотя бы один корень, и указать число корней уравнения для каждого значения a .

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\left| \frac{1}{x} + 4 \right| = 2a - ax$$

и рассмотрим графики функций

$$y = \left| \frac{1}{x} + 4 \right| \text{ и } y = 2a - ax.$$

График функции $y = \left| \frac{1}{x} + 4 \right|$ получается с помощью параллельного переноса гиперболы $y = \frac{1}{x}$ вдоль оси ординат на 4 единицы вверх и последующего зеркального отражения (симметрии) относительно оси абсцисс части полученного после параллельного переноса графика функции $y = \frac{1}{x} + 4$, лежащей ниже оси абсцисс. Графиком функции $y = 2a - ax$ является прямая. Заметим, что $y = -a(x - 2)$ и если $x = 2$, то $y = 0$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y = 2a - ax$ при любом значении параметра проходит через точку $A(2; 0)$.

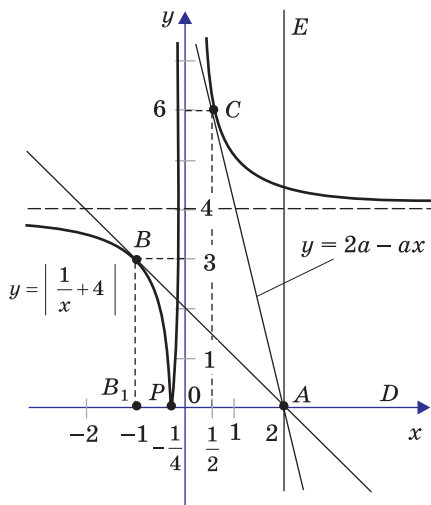


Рис. 11

На рисунке 11 показаны три положения прямой $y = 2a - ax$: AB и AC — касательные к графику функции $y = \left| \frac{1}{x} + 4 \right|$ (они касаются неотраженной части этого графика, то есть графика функции $y = \frac{1}{x} + 4$), AD соответствует значению $a = 0$, совпадает с осью абсцисс и имеет с графиком единственную общую точку $P\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$. Прямая AE на том же рисунке перпендикулярна оси абсцисс.

Найдем координаты точек B и C . Для этого достаточно найти отличные от нуля значения параметра, при которых уравнение $\frac{1}{x} + 4 = 2a - ax$ имеет единственный корень. Это уравнение можно переписать в виде

$$ax^2 - 2(a - 2)x + 1 = 0.$$

Если $a \neq 0$, полученное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a-2}{a}$ только в случае равенства нулю его дискриминанта

$$D = 4(a - 2)^2 - 4a,$$

откуда

$$a^2 - 5a + 4 = 0, a = 1 \text{ или } a = 4.$$

Если $a = 1$, то $x = -1$ (точка B); если $a = 4$, то $x = \frac{1}{2}$ (точка C). Следовательно, уравнениями прямых AB и AC являются соответственно

$$y = 2 - x \text{ и } y = 8 - 4x.$$

Число корней данного уравнения равно при каждом значении параметра a числу общих точек графика функции $y = \left| \frac{1}{x} + 4 \right|$ и прямой $y = 2a - ax$, угловой коэффициент которой равен $-a$.

Данное уравнение имеет единственный корень, если:

1) прямая $y = 2a - ax$ лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол BAC , то есть если $k_{AC} < -a \leq k_{AB}$, где $k_{AB} = -1$ и $k_{AC} = -4$ — угловые коэффициенты прямых AB и AC соответственно, откуда $a \in (1; 4)$;

2) прямая $y = 2a - ax$ совпадает с прямой AD или лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол EAD , то есть если $-a \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; 0]$.

Данное уравнение имеет ровно два корня, если прямая $y = 2a - ax$ совпадает с прямой AB или с прямой AC , откуда $a = 1$ или $a = 4$.

Данное уравнение имеет три корня, если:

1) прямая $y = 2a - ax$ лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол B_1AB , то есть если $k_{AB} < -a < 0$, откуда $a \in (0; 1)$;

2) прямая $y = 2a - ax$ лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол CAE , то есть если $-a < k_{AC}$, откуда $a \in (4; +\infty)$.

Ответ: один корень, если $a \in (-\infty; 0] \cup (1; 4)$; два корня, если $a \in \{1; 4\}$; три корня, если $a \in (0; 1) \cup (4; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}.$$

Решение. При $x > 0$ данное неравенство приводится к виду

$$\frac{6x}{2x+1} - 1 > \log_2(x+2), \quad \frac{4x-1}{2x+1} > \log_2(x+2).$$

При $x < 0$ аналогично получим неравенство

$$\frac{4x-1}{2x+1} < \log_2(x+2).$$

Рассмотрим функции

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-3}{2x+1} = 2 - \frac{1,5}{x+0,5}$$

и

$$g(x) = \log_2(x+2)$$

и построим их графики. График функции $y = f(x)$ (определенной при всех $x \neq -0,5$) получается при помощи описанных ранее стандартных элементарных преобразований (растяжения в 1,5 раза от оси абсцисс и параллельного переноса на век-

тор $\bar{l}(-0,5; 2)$ гиперболы, являющейся графиком функции $y = -\frac{1}{x}$. График функции $y = g(x)$ (определенной при всех $x > -2$) получается параллельным переносом графика функции $y = \log_2 x$ на две единицы влево вдоль оси абсцисс (рис. 12).

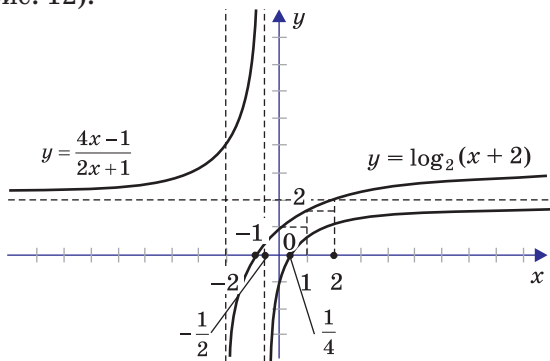


Рис. 12

Требуется найти все $x > 0$, для каждого из которых $f(x) > g(x)$, и все $x < 0$ (с учетом того, что $x > -2$, $x \neq -0,5$), для каждого из которых $f(x) < g(x)$.

При $x \in (-2; -0,5)$ неравенство $f(x) < g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x) > 2$, а $g(x) < 2$.

При $x \in (-0,5; 0)$ неравенство $f(x) < g(x)$ (а значит, и данное неравенство) выполняется, так как $f(x) < 0$, а $g(x) > 0$ для всех $x \in (-0,5; 0)$.

При $x \in (0; 1)$ неравенство $f(x) > g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x) < 1$, а $g(x) > 1$.

При $x \in (2; +\infty)$ неравенство $f(x) > g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x) < 2$, а $g(x) > 2$.

Осталось рассмотреть отрезок $[1; 2]$. Здесь доказательство не столь очевидно (предыдущие легко следуют из свойств функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и простейших неравенств), но рисунок «подсказывает» идею доказательства: каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастает на этом отрезке, достигая своего наименьшего значения в левом конце отрезка, а наибольшего — в правом, но похоже, что

$$\max_{[1; 2]} f(x) = f(2) < \min_{[1; 2]} g(x) = g(1).$$

Если это так, то и на отрезке $[1; 2]$ данное неравенство не будет иметь решений. Сравним

$$f(2) = \frac{7}{5} \text{ и } g(1) = \log_2 3.$$

Предположим, что $f(2) \geq g(1)$. Тогда

$$\frac{7}{5} \geq \log_2 3, 2^{\frac{7}{5}} \geq 3,$$

откуда $2^7 \geq 3^5$, то есть $128 \geq 729$, что невозможно. Значит, допущение неверно. Поэтому и на отрезке $[1; 2]$ данное неравенство не имеет решений.

Ответ: $(-0,5; 0)$.