

4.3. Геометрические идеи

Упражнения к 4.3

1. а) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x-2)^2 + 16} + \sqrt{(x-10)^2 + 4}$.
- б) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x+3)^2 + 4} + \sqrt{(x-9)^2 + 9}$.
2. а) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 20}$.
- б) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 24x + 153}$.
3. а) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}$.
- б) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 16x + 73}$.
4. а) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x-3)^2 + (x-7)^2} + \sqrt{(x-15)^2 + (x-2)^2}$.
- б) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (x+6)^2}$.
5. а) Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 6x + 58} + \sqrt{x^2 + 10x + 89} = 17$.
- б) Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 10x + 125} = 15$.
6. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 20x + 109} + \sqrt{x^2 - 2x + 82} \leq 15$.
- б) Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 6x + 58} + \sqrt{x^2 - 4x + 29} \leq 13$.
7. а) Решите неравенство $\sqrt{(2x-1)^2 + (x-7)^2} + \sqrt{(2x-13)^2 + (x-2)^2} \leq 13$.
- б) Решите неравенство $\sqrt{(x-2)^2 + (3x-7)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (3x+1)^2} \leq 10$.
8. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a-c)^2 + (b-d)^2$, если числа a, b, c, d таковы, что
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4, \\ c^2 + d^2 = 36. \end{cases}$$
- б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a+u)^2 + (b+v)^2$, если числа a, b, u, v таковы, что
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 64, \\ u^2 + v^2 = 25. \end{cases}$$
9. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a+d)^2 + (b-p)^2 + (c+q)^2$, если числа a, b, c, d, p, q таковы, что
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4, \\ d^2 + p^2 + q^2 = 121. \end{cases}$$
- б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a+d)^2 + (b+p)^2 + (c-q)^2$, если числа a, b, c, d, p, q таковы, что
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 25, \\ d^2 + p^2 + q^2 = 81. \end{cases}$$
10. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-15)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 17, \\ \sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-16)^2 + y^2} = 20. \end{cases}$$
- б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 10, \\ \sqrt{(x-5)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-12)^2} = 13. \end{cases}$$

11. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 16 + 8y, \\ (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x - 37 + 10y, \\ (x - 7)^2 + (y - 9)^2 = a^2. \end{cases}$$

12. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} (x - 2a - 3)^2 + (y - 3a - 5)^2 = 100, \\ (x - 3a - 8)^2 + (y - 4a - 3)^2 = 9. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} (x - 5a - 6)^2 + (y - 4a + 5)^2 = 36, \\ (x - 6a - 5)^2 + (y - 5a + 8)^2 = 16. \end{cases}$$

13. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} (x - a - 2)^2 + (y - a - 4)^2 = (2a - 1)^2, \\ (x - 2a + 1)^2 + (y - 2a - 3)^2 = (a - 1)^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} (x - a - 1)^2 + (y - a - 3)^2 = (2a - 3)^2, \\ (x - 2a + 3)^2 + (y - 2a - 1)^2 = (a - 2)^2. \end{cases}$$

14. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + (y - 6)^2 = 36, \\ \sqrt{x^2 + (y - 18)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 324}. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + (y - 5)^2 = 25, \\ \sqrt{x^2 + (y - 15)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 225}. \end{cases}$$

15. а) Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений
$$\begin{cases} (x + a - 8)^2 + (y - a)^2 = 32, \\ \sqrt{x^2 + (y - 8)^2} + \sqrt{(x - 8)^2 + y^2} = 8\sqrt{2}. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений
$$\begin{cases} (x + a - 10)^2 + (y - a)^2 = 50, \\ \sqrt{x^2 + (y - 10)^2} + \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} = 10\sqrt{2}. \end{cases}$$

16. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} y^2 - (2a + 1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 3)^2} = 3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} y^2 + (2a + 5)y + a^2 + 5a + 4 = 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y + 3)^2} + \sqrt{(x + a)^2 + y^2} = 3. \end{cases}$$

17. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} (|x| - 10)^2 + (y - 5)^2 = 16, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

18. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25, \\ y = |x - a| + 1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 2. \end{cases}$$

19. а) Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений
$$\begin{cases} y + a = |x| + 5, \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 4. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений
$$\begin{cases} y + 6 = |x| + a, \\ x^2 + (y + 3a - 13)^2 = 9. \end{cases}$$

20. а) Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} y = a|x| + a + 2, \\ x^2 + (y - a^2)^2 = 16. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} y = a|x| + a + 1, \\ x^2 + (y + a^2)^2 = 9. \end{cases}$$

21. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = \sqrt{3}|x| + 4a + 5, \\ x^2 + (y - 5a - 4)^2 = 36 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение, и укажите число решений системы для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = \sqrt{3}|x| + 5a + 4, \\ x^2 + (y - 6a - 5)^2 = 49 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение, и укажите число решений системы для каждого значения a .

22. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ система уравнений
$$\begin{cases} (x + 3\sin z)^2 + (y + 3\cos z)^2 = 4, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ система уравнений
$$\begin{cases} (x - 5\sin z)^2 + (y - 5\cos z)^2 = 9, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

23. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ система уравнений
$$\begin{cases} (x + \sqrt{25 - z})^2 + (y - \sqrt{z})^2 = 9, \\ a + x = y. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение
 $(x; y; z)$ система уравнений
$$\begin{cases} (x - \sqrt{z})^2 + (y - \sqrt{16 - z})^2 = 4, \\ x + y = a. \end{cases}$$

24. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения
 система неравенств
$$\begin{cases} 16y^2 \geq 9x^2, \\ (x - 6a + 1)^2 + y^2 \leq 9a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система
 неравенств
$$\begin{cases} 9y^2 \geq 16x^2, \\ (x - 7a + 4)^2 + y^2 \leq 16a^2. \end{cases}$$

25. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет конечное число
 решений система неравенств
$$\begin{cases} (y - 3x)(3y - x) \leq 0, \\ (x - a)^2 + (y + a)^2 \leq 16a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет конечное число решений
 система неравенств
$$\begin{cases} (y - 4x)(4y - x) \leq 0, \\ (x - a)^2 + (y + a)^2 \leq 25a. \end{cases}$$

Ответы к упражнениям 4.3

1. а) 10; б) 13. 2. а) $\sqrt{41}$; б) $4\sqrt{10}$. 3. а) 10; б) 13. 4. а) 13; б) 10. 5. а) $-\frac{11}{15}$; б) $-2,5$. 6. а) 7,75; б) $-\frac{1}{12}$. 7. а) $4\frac{1}{22}$; б) $2\frac{3}{13}$. 8. а) 64; 16; б) 169; 9. 9. а) 169; 81; б) 196; 16. 10. а) $\left(2\frac{2}{3}; 10\right)$; б) $(3,75; 3)$. 11. а) $-8; -2; 2; 8$; б) $-7; -3; 3; 7$. 12. а) $-10; -5; 2; 7$; б) $-5; 1; 3; 9$. 13. а) $\frac{2 \pm \sqrt{46}}{7}$; $4 \pm \sqrt{6}$; б) $\frac{9 \pm \sqrt{46}}{7}$; $5 \pm \sqrt{6}$. 14. а) $\pm 6\sqrt{3}$; б) $\pm 5\sqrt{3}$. 15. а) 4; б) 5. 16. а) $[-2; 1) \cup (1; 4]$; б) $[-4; -1) \cup (-1; 2]$. 17. а) $-\sqrt{65} - 3; -2; 2; \sqrt{65} + 3$; б) $-17; 4 - \sqrt{89}; \sqrt{89} - 4$. 18. а) $8 - 5\sqrt{2}$; 3; $5\sqrt{2} - 2$; б) $5 - 3\sqrt{2}$; 2; $3\sqrt{2} - 1$. 19. а) 4; б) 4. 20. а) -2 ; б) 1. 21. а) Одно решение, если $a = -5$; два решения, если $a \in (-5; 7) \cup \{13\}$; три решения, если $a = 7$; четыре решения, если $a \in (7; 13)$; нет решений при $a \in (-\infty; -5) \cup (13; +\infty)$; б) одно решение, если $a = -8$; два решения, если $a \in (-8; 6) \cup \{13\}$; три решения, если $a = 6$; четыре решения, если $a \in (6; 13)$; нет решений при $a \in (-\infty; -8) \cup (13; +\infty)$. 22. а) $[1; 5\sqrt{2}]$; б) $[2; 8\sqrt{2}]$. 23. а) $[5 - 3\sqrt{2}; 8\sqrt{2}]$; б) $[4 - 2\sqrt{2}; 6\sqrt{2}]$. 24. а) 1; б) 2. 25. а) 0; 10; б) 0; 17.