

4.1. Метод областей**Упражнения к 4.1**

1. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a \leq x + 3, \\ a + 2x \geq 12, \\ 3a \geq x + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a + x \leq 15, \\ 3a \geq 2x + 5, \\ a \leq 3x + 18 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a .

2. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arccos(ax - a + 1) \leq \arccos(2x + a - 3)$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arcsin(ax + a + 1) \geq \arcsin(2x + a + 1)$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

3. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arcsin(ax + 2a + 1) + \arccos(2x + a + 3) \geq \frac{\pi}{2}$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arccos(ax - 2a + 1) + \arcsin(2x + a - 5) \leq \frac{\pi}{2}$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

4. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a + 3x \leq 24, \\ 2a + 8x \geq x^2, \\ 2a \leq x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a + x \leq 12, \\ 9a + 12x \geq x^2, \\ 3a \leq x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a .

5. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $x^2 + |x + a - 3| + 5 \leq 5x + a$ принадлежит отрезку $[1; 2]$.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $6x \geq 2x^2 + a + |2x - a - 2| + 2$ принадлежит отрезку $[-1; 0]$.

6. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует хотя бы одно число $x \in (1; 2)$, не являющееся решением неравенства $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2$.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует хотя бы одно число $x \in (-2; 1)$, не являющееся решением неравенства $2x^2 + 6x + a + \sqrt{a^2 + 4ax + 4x^2} \leq 0$.

7. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 7a + 6x \geq x^2, \\ a \leq \sqrt{x}, \\ 3a + x \leq 10 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения}$$

a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 3a + 2x \geq x^2, \\ a \leq 2\sqrt{x}, \\ 2a + x \leq 5 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения}$$

a .

8. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |2x - a| \leq 4, \\ a + 4 \geq x^2 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения } a.$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |3x + a| \leq 9, \\ a + x^2 \leq 9 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения } a.$$

9. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a + 4x - x^2)(a - x) \leq 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a + 6x + x^2)(a + x) \leq 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a .

10. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a \leq \sqrt{25 - x^2}, \\ (4a - 3x)(3a + 4x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого}$$

значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a + \sqrt{169 - x^2} \geq 0, \\ (5a - 12x)(12a + 5x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого}$$

значения a .

Ответы к упражнениям 4.1

1. а) решений нет при $a \in (-\infty; 2)$; $x = 5$ при $a = 2$; $x \in \left[\frac{12-a}{2}; 3a-1 \right]$ при $a \in (2; 6]$; $x \in [a-3; 3a-1]$ при $a \in (6; +\infty)$; б) решений нет при $a \in (-\infty; -3) \cup (9; +\infty)$; $x = -7$ при $a = -3$; $x = -3$ при $a = 9$; $x \in \left[\frac{a-18}{3}; \frac{3a-5}{2} \right]$ при $a \in (-3; 5]$; $x \in \left[\frac{a-18}{3}; 15-2a \right]$ при $a \in (5; 9)$. 2. а) решений нет при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $\{2\}$ при $a = -2$; $\left[\frac{2-a}{2}; 2 \right]$ при $a \in (-2; 0]$; $\left[\frac{2-a}{2}; 1 \right]$

при $a \in (0; 2]$; б) решений нет при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $\{0\}$ при $a = -2$; $\left[-\frac{a+2}{2}; 0\right]$ при $a \in (-2; 0]$; $\left[-\frac{a+2}{2}; -1\right]$ при $a \in (0; 2]$. 3. а) решений нет при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $\{-1\}$ при $a = -2$; $\left[-\frac{a+4}{2}; -1\right]$ при $a \in (-2; 0]$; $\left[-\frac{a+4}{2}; -2\right]$ при $a \in (0; 2]$; б) решений нет при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $\{3\}$ при $a = -2$; $\left[\frac{4-a}{2}; 3\right]$ при $a \in (-2; 0]$; $\left[\frac{4-a}{2}; 2\right]$ при $a \in (0; 2]$. 4. а) решений нет при $a \in (-\infty; -8) \cup (3; +\infty)$; $x = 4$ при $a = -8$; $x = 6$ при $a = 3$; $x \in \left[4 - \sqrt{2a+16}; 4 + \sqrt{2a+16}\right]$ при $a \in (-8; 0]$; $x \in \left[2a; \frac{24-2a}{3}\right]$ при $a \in (0; 3)$; б) решений нет при $a \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$; $x = 6$ при $a = -4$; $x = 9$ при $a = 3$; $x \in \left[6 - 3\sqrt{a+4}; 6 + 3\sqrt{a+4}\right]$ при $a \in (-4; 0]$; $x \in [3a; 12-a]$ при $a \in (0; 3)$. 5. а) $a \in [0; +\infty)$; б) $a \in (-\infty; -2]$. 6. а) $a \in (1, 5; +\infty)$; б) $a \in (4; +\infty)$. 7. а) решений нет при $a \in \left(-\infty; -\frac{9}{7}\right) \cup (2; +\infty)$; $x = 3$ при $a = -\frac{9}{7}$; $x = 4$ при $a = 2$; $x \in \left[3 - \sqrt{7a+9}; 3 + \sqrt{7a+9}\right]$ при $a \in \left(-\frac{9}{7}; 0\right]$; $x \in \left[a^2; 3 + \sqrt{7a+9}\right]$ при $a \in (0; 1]$; $x \in \left[a^2; 10 - 3a\right]$ при $a \in (1; 2)$; б) решений нет при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$; $x = 1$ при $a = -\frac{1}{3}$ и $a = 2$; $x \in \left[1 - \sqrt{3a+1}; 1 + \sqrt{3a+1}\right]$ при $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right]$; $x \in \left[\frac{a^2}{4}; 1 + \sqrt{3a+1}\right]$ при $a \in (0; 1]$; $x \in \left[\frac{a^2}{4}; 5 - 2a\right]$ при $a \in (1; 2)$. 8. а) решений нет при $a \in (-\infty; -4) \cup (12; +\infty)$; $x = 0$ при $a = -4$; $x = 4$ при $a = 12$; $x \in \left[-\sqrt{a+4}; \frac{a+4}{2}\right]$ при $a \in (-4; 0]$; $x \in \left[\frac{a-4}{2}; \sqrt{a+4}\right]$ при $a \in (0; 12)$; б) решений нет при $a \in (-\infty; -27) \cup (9; +\infty)$; $x = 6$ при $a = -27$; $x = 0$ при $a = 9$; $x \in \left[-\frac{a+9}{3}; \sqrt{9-a}\right]$ при $a \in (-27; 0]$; $x \in \left[-\sqrt{9-a}; \frac{9-a}{3}\right]$ при $a \in (0; 9)$. 9. а) $x \in (-\infty; a]$ при $a \in (-\infty; -4)$; $x \in (-\infty; -4] \cup \{2\}$ при $a = -4$; $x \in (-\infty; a] \cup \left[2 - \sqrt{a+4}; 2 + \sqrt{a+4}\right]$ при $a \in (-4; 0)$; $x \in (-\infty; 4]$ при $a = 0$; $x \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{a+4}\right] \cup \left[a; 2 + \sqrt{a+4}\right]$ при $a \in (0; 5)$; $x \in (-\infty; -1] \cup \{5\}$ при $a = 5$; $x \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{a+4}\right] \cup \left[2 + \sqrt{a+4}; a\right]$ при $a \in (5; +\infty)$; б) $x \in \left(-\infty; -3 - \sqrt{9-a}\right] \cup \left[-3 + \sqrt{9-a}; -a\right]$ при $a \in (-\infty; 0)$; $x \in (-\infty; -6] \cup \{0\}$ при $a = 0$; $x \in \left(-\infty; -3 - \sqrt{9-a}\right] \cup \left[-a; -3 + \sqrt{9-a}\right]$ при $a \in (0; 5)$; $x \in (-\infty; -1]$ при $a = 5$; $x \in (-\infty; -a] \cup \left[-3 - \sqrt{9-a}; -3 + \sqrt{9-a}\right]$ при $a \in (5; 9)$; $x \in (-\infty; -9] \cup \{-3\}$ при $a = 9$; $x \in (-\infty; -a]$ при $a \in (9; +\infty)$. 10. а) $x \in [-5; 5]$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{20}{3}\right]$; $x \in \left[-5; -\frac{3a}{4}\right]$ при $a \in \left(-\frac{20}{3}; -\frac{15}{4}\right]$; $x \in \left[\frac{4a}{3}; -\frac{3a}{4}\right]$ при $a \in \left(-\frac{15}{4}; 0\right)$; $x = 0$ при $a = 0$; $x \in \left[-\frac{3a}{4}; \frac{4a}{3}\right]$ при

$a \in (0; 3]$; $x \in \left[-\frac{3a}{4}; \sqrt{25-a^2}\right]$ при $a \in (3; 4]$; $x \in \left[-\sqrt{25-a^2}; \sqrt{25-a^2}\right]$ при $a \in (4; 5)$; $x = 0$ при $a = 5$; решений нет при $a \in (5; +\infty)$; б) решений нет при $a \in (-\infty; -12) \cup \left(\frac{156}{5}; +\infty\right)$; $x = -5$ при $a = -12$; $x \in \left[-\sqrt{169-a^2}; \frac{5a}{12}\right]$ при $a \in (-12; -5)$; $x \in \left[-12; -\frac{25}{12}\right] \cup \{12\}$ при $a = -5$; $x \in \left[-\sqrt{169-a^2}; \frac{5a}{12}\right] \cup \left[-\frac{12a}{5}; \sqrt{169-a^2}\right]$ при $a \in (-5; 0)$; $x \in [-13; 13]$ при $a = 0$; $x \in \left[-13; -\frac{12a}{5}\right] \cup \left[\frac{5a}{12}; 13\right]$ при $a \in \left(0; \frac{65}{12}\right)$; $x \in \{-13\} \cup \left[\frac{325}{144}; 13\right]$ при $a = \frac{65}{12}$; $x \in \left[\frac{5a}{12}; 13\right]$ при $a \in \left(\frac{65}{12}; \frac{156}{5}\right)$; $x = 13$ при $a = \frac{156}{5}$.

ЯГубов.РФ