С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА

1.2. Метод интервалов

Перейдем теперь к описанию наиболее общих методов решения неравенств с одной переменной, применимых к решению неравенств каждой из шести функционально-алгебраических линий школьного курса математики, начав с метода интервалов.

Любое алгебраическое выражение $f(x)$ можно использовать для задания функции $y = f(x)$. Это обстоятельство позволяет иногда для краткости употреблять словосочетание «функция $f(x)$» вместо «функция $y = f(x)$» и делает возможной наглядную интерпретацию неравенства вида $f(x) \vee 0$ (здесь знаком «$\vee$» обозначен один из четырех возможных знаков неравенств «>», «<», «≥», «≤»). Решить такое неравенство — значит найти все значения переменной x, при которых график функции $y = f(x)$ расположен выше (ниже, не выше, не ниже — в зависимости от знака неравенства) оси абсцисс. Так, для функции $y = f(x)$, график которой, состоящий из нескольких частей, изображен на рисунке 1, решением неравенства $f(x) \le 0$ является множество $[x_1; x_2) \cup [x_3; x_4) \cup [x_5; x_6]$, а решением неравенства $f(x) > 0$ — множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; +\infty)$.

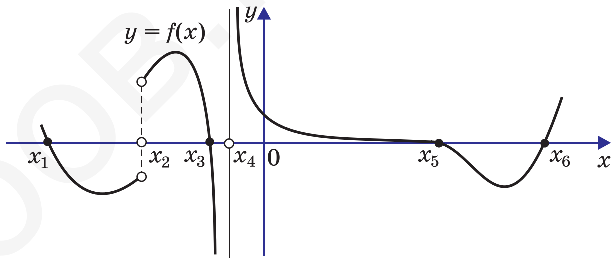


Рис. 1

Для функции $y = g(x)$, график которой (также состоящий из нескольких частей) изображен на рисунке 2, решением неравенства $g(x) \ge 0$ является множество $(-\infty; x_1] \cup (x_2; x_3] \cup \{x_4\} \cup [x_5; x_6) \cup [x_7; x_8) \cup [x_8; x_{10}]$, а решением неравенства $g(x) < 0$ — множество $(x_1; x_2) \cup (x_3; x_4) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; x_7) \cup (x_{10}; +\infty)$.

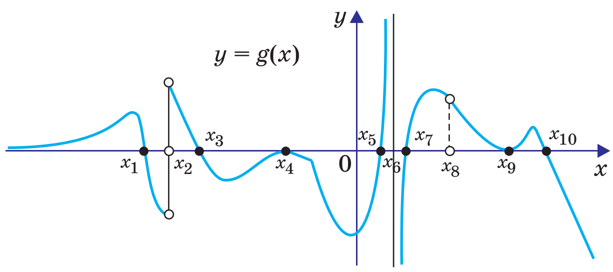


Рис. 2

Аналогичным образом, рассматривая графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, можно наглядно интерпретировать неравенство вида $f(x) \vee g(x)$ (здесь знак «$\vee$» по-прежнему обозначает один из знаков «>», «<», «≥», «≤»). Так, для функций, графики которых изображены на рисунке 3, множеством решений неравенства $f(x) \le g(x)$

является объединение отрезков $[-4; -1] \cup [4; 5]$, множеством решений неравенства $f(x) > g(x)$ является интервал $(-1; 4)$. Обратим внимание на то, что в данном случае области определения функций различны (это обстоятельство нужно обязательно учитывать при записи ответа): функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-5; 6]$, функция $y = g(x)$ определена на отрезке $[-4; 5]$.

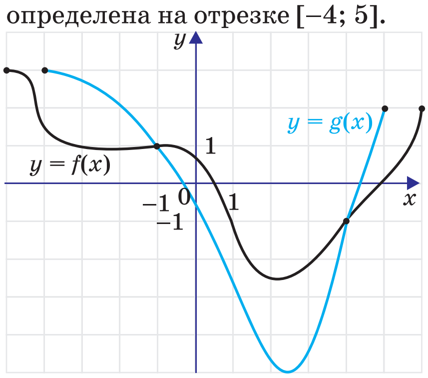


Рис. 3

Существенным при записи решений приведенных выше неравенств является тот факт, что каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывна в каждой части своей области определения. Понятие непрерывности — довольно сложное в смысле формального описания; для решения задач школьного курса достаточно представления о непрерывной функции как о функции, график которой в каждой части области определения может быть изображен непрерывной линией. Это означает, в частности, что изменить знак такая функция может только двумя «способами»: либо в тех точках, в которых функция не является непрерывной (в некоторых из таких точек ее график как бы перескакивает через ось абсцисс: на рис. 1 это точки x_2 и x_4, на рис. 2 — точки x_2 и x_6), либо в тех точках, где ее график пересекает ось абсцисс (напомним, что эти точки являются корнями уравнения $f(x) = 0$ и называются *нулями функции* $y = f(x)$: на рис. 1 — это точки x_1, x_3, x_5, x_6, на рис. 2 — это точки x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_9, x_{10}). Отсюда вытекает общий для таких функций метод решения неравенств, называемый *методом интервалов*, алгоритм которого состоит из следующих шагов.

Алгоритм метода интервалов

1. Приводим, используя равносильные преобразования, данное неравенство к виду $f(x) \vee 0$, где знаком «$\vee$» обозначен один из четырех знаков неравенств (такой вид неравенства будем называть *стандартным*). В случае, если неравенство сразу дано в стандартном виде, этот шаг пропускается.

2. Находим область определения функции $y = f(x)$ (напомним, что область определения функции обозначается $D_{f(x)}$, D_f, $D(f(x))$ или $D(f)$ по первой букве слова «определение» на латыни или любом романском языке) и отмечаем ее на числовой прямой (числовой оси). Заметим, что часто бывает целесообразно в начале решения сразу найти ОДЗ данного неравенства, а потом уже приводить неравенство к стандартному виду, поскольку ОДЗ неравенства и D_f в данном случае являются одним и тем же множеством (разумеется, если для приведения неравенства к стандартному виду использовать равносильные преобразования).

3. Находим нули функции $y = f(x)$, то есть корни уравнения $f(x) = 0$, и отмечаем их на числовой оси. Если данное неравенство является строгим, то нули отмечаются особым образом («выкалываются») и обычно изображаются пустыми кружочками. Если неравенство является нестрогим, нули функции должны обязательно попасть в ответ; чтобы не забыть ни один из них, лучше изобразить их жирными, бросающимися в глаза кружочками (как своего рода «сигнальные фонари»). Нули функции разбивают ее область определения на несколько интервалов. В каждом из этих интервалов функция определена, непрерывна и не обращается в нуль, поэтому поменять знак ни в одной из точек интервала не может и, следовательно, принимает в каждом из полученных интервалов значения одного знака.

4. Решаем неравенство методом интервалов, определяя знак функции $y = f(x)$ в каждом из полученных интервалов, например, по ее знаку в одной из точек интервала (такие точки иногда называют пробными). Записываем ответ.

Замечание. Если точка является нулем функции или не принадлежит области определения функции, это не означает, что в такой точке функция автоматически меняет знак. Так, функция, график которой изображен на рисунке 2, не меняет знака ни в одной из точек x_4, x_8, x_9. Таким образом, промежутки знакоположительности и промежутки знакоотрицательности функции не обязательно чередуются и на экзамене лучше подстраховаться и определить знак функции в одной из точек каждого интервала традиционно либо иными способами, например, так, как это сделано при решении следующих неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1} \le \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}.$$

Решение. 1. Перенесем все алгебраические выражения в левую часть неравенства:

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+1} \le 0.$$

Вынесем общий множитель:

$$\sqrt{4-x^2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\le 0.$$

Приведем разность дробей в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{4-x^2}\left(\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)\le 0.$$

Выполним действия в числителе и запишем неравенство в виде

$$\frac{2\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+1)}\le 0. \qquad (*)$$

Обозначим левую часть полученного неравенства через $f(x)$.

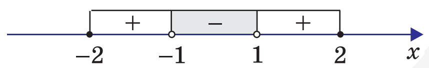
2. Найдем область определения функции $y = f(x)$. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} 4-x^2\ge 0,\\ x\ne -1,\\ x\ne 1. \end{cases}$$

Первое неравенство системы можно переписать в виде $x^2 - 4 \le 0$, откуда $(x - 2)(x + 2) \le 0$, то есть $-2 \le x \le 2$. Таким образом, $D_f = [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$.

3. Найдем нули функции $y = f(x)$, то есть корни уравнения $f(x) = 0$. В данном случае нулями являются числа $x = -2$ и $x = 2$.

4. Решим неравенство (*) методом интервалов.



Для рассматриваемого неравенства определение знака $f(x)$ на каждом из интервалов не представляет труда, ведь числитель $2\sqrt{4-x^2}$ дроби $\frac{2\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+1)}$ неотрицателен в области определения, а знак знаменателя $(x - 1)(x + 1)$ легко определить, воспользовавшись свойствами квадратного трехчлена или пробными точками: очевидно, что, например, при $x = 1{,}5$ знаменатель положителен, при $x = 0$ — отрицателен, при $x = -1{,}5$ — положителен. В ответ записываем промежуток, помеченный знаком «–», и не принадлежащие ему нули $f(x)$, выделенные жирными точками.

Ответ: $\{-2; 2\} \cup (-1; 1)$.

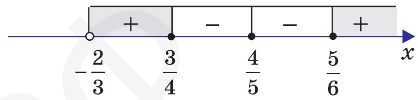
Разумеется, при решении неравенств методом интервалов не обязательно в явном виде указывать каждый шаг алгоритма решения, главное, иметь ясное представление о том, что все его шаги сделаны.

Пример 2. Решить неравенство
$\lg(3x + 2) + (4x - 3)^3(5x - 4)^4(6x - 5)^5 \ge \lg(3x + 2)$.

Решение. Левая и правая части неравенства определены при $x>-\frac{2}{3}$. При допустимых значениях переменной неравенство легко приводится к стандартному виду

$$(4x - 3)^3(5x - 4)^4(6x - 5)^5 \ge 0. \qquad (1)$$

Левая часть полученного неравенства (обозначим ее $f(x)$) обращается в нуль при $x=\frac{3}{4}$, $x=\frac{4}{5}$, $x=\frac{5}{6}$. Эти числа разбивают луч $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ на четыре интервала. Поскольку неравенство является нестрогим, каждое из этих чисел является его решением. Чтобы не забыть включить эти числа в ответ, отметим соответствующие им точки числовой оси жирными кружочками (теми самыми «сигнальными фонарями», о которых речь шла выше). Применим метод интервалов, определив знак $f(x)$ в каждом из полученных интервалов.



Ясно, что при $x>\frac{5}{6}$ (например, при $x = 100$) любой из множителей левой части неравенства (1) положителен, поэтому $f(100) > 0$. Следовательно, $f(x) > 0$ при всех $x>\frac{5}{6}$. Выбрать «хорошее» число для определения знака $f(x)$ на числовом промежутке $\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$ затруднительно, поскольку он не содержит ни одного целого числа. В таких случаях обычно используют рассуждения вроде следующих.

Так как $x\in\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$, то $x<\frac{5}{6}$. Поэтому $(6x-5)^5<0$. Далее, если $x>\frac{4}{5}$, то $(5x - 4)^4 > 0$ и $(4x - 3)^3 > 0$. Значит, $f(x) < 0$ на $\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$ (как произведение трех множителей, один из которых отрицателен, а два — положительны). Дальнейшее определение знаков проводится аналогично. В ответ включаются промежутки, помеченные знаком «+» и не принадлежащие таким промежуткам нули $f(x)$ (выписываем их, смотря на «сигнальные фонари»: в данном случае, это $x=\frac{4}{5}$).

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right] \cup \left\{\frac{4}{5}\right\} \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

Замечание. С помощью рассуждений, аналогичных сделанным при решении примера 2, можно найти промежутки знакоположительности и знакоотрицательности функции, не определяя ее знак в конкретной точке каждого из полученных интервалов. Это обычно возможно для тех неравенств, левая часть которых представляет собой произведение или частное нескольких (как правило, линейных) множителей. Если же эти множители не являются линейными и имеют довольно сложный вид, целесообразно сначала определить знак каждого из них, а затем уже — знак произведения или частного. В таких случаях это удобно делать с помощью одного рисунка, на котором изображены одна под другой оси с отмеченной ОДЗ неравенства и нулями для каждого из множителей и для их произведения (частного), то есть для левой части неравенства, так, что получается своего рода таблица. В строчках этой таблицы расставляют знаки множителей, а затем по столбцам определяют знак их произведения или частного. Как это делается, проиллюстрируем примером.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{\left(|x-3|-x-13\right)\left(\sqrt{x+6}-2x+3\right)}{x^2-16}\le 0.$$

Решение. Неравенство дано в стандартном виде. Разложим знаменатель на множители по формуле разности квадратов и обозначим через $f(x)$ левую часть полученного неравенства

$$\frac{\left(|x-3|-x-13\right)\left(\sqrt{x+6}-2x+3\right)}{(x-4)(x+4)}\le 0.$$

Область определения D_f или — что в данном случае то же самое — ОДЗ неравенства задается системой $\begin{cases} x\ge -6, \\ x\ne \pm 4. \end{cases}$ Найдем нули $f(x)$. Для этого решим уравнения

$$|x-3| = x+13 \text{ и } \sqrt{x+6}=2x-3.$$

Первое уравнение приводится к виду

$$\begin{cases} x\ge -13, \\ \left[\begin{array}{l} x-3=x+13 \\ x-3=-x-13, \end{array}\right. \end{cases} \quad x=-5.$$

Второе уравнение приводится к виду

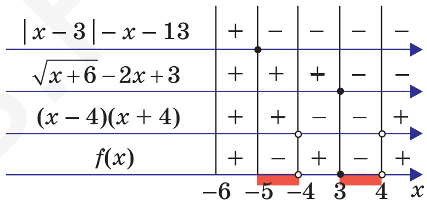
$$\begin{cases} x\ge 1{,}5, \\ x+6=4x^2-12x+9, \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1{,}5, \\ 4x^2-13x+3=0. \end{cases}$$

Корнями уравнения последней системы являются $x=\frac{1}{4}$ и $x = 3$, из которых только $x = 3$ удовлетворяет неравенству системы. Заметим, что для $x = -5$ и $x = 3$ выполняются неравенства $\begin{cases} x\ge -6, \\ x\ne \pm 4. \end{cases}$ Следовательно, эти числа и являются нулями $f(x)$. Теперь можно применить метод интервалов, изобразив соответствующую «таблицу», первые три строки которой, начиная с верхней, предназначены для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности алгебраических выражений

$$|x-3|-x-13,\ \sqrt{x+6}-2x+3,\ (x-4)(x+4),$$

а последняя (нижняя) — для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности $f(x)$. При этом на каждой оси отмечаются не все нули, а только нули соответствующих множителей.

Поскольку единственным нулем алгебраического выражения $f_1(x)=|x-3|-x-13$ является $x = -5$, с помощью «пробных» точек легко определить, что $f_1(x) > 0$ при $x < -5$ (например, $f_1(-6) = |-6-3| + 6 - 13 = 2 > 0$) и $f_1(x) < 0$ при $x > -5$ (например, $f_1(100) = |100-3| - 100 - 13 = -16 < 0$). Поскольку единственным нулем алгебраического выражения $f_2(x)=\sqrt{x+6}-2x+3$ является $x = 3$, аналогичным образом легко определить, что $f_2(x) > 0$ при $x < 3$ и $f_2(x) < 0$ при $x > 3$. Наконец, если $f_3(x) = (x-4)(x+4)$, то $f_3(x) < 0$ на $(-4; 4)$ и $f_3(x) > 0$ в остальных точках области определения (эти неравенства можно получить и без «пробных точек», воспользовавшись свойствами квадратичной функции).



Теперь, воспользовавшись «столбцами» таблицы, легко определить промежутки знакоположительности и знакоотрицательности $f(x)$, учитывая, что $f(x)=\frac{f_1(x)\,f_2(x)}{f_3(x)}$. Заметим еще, что $x = -6$ является граничной точкой области определения, но не нулем $f(x)$ (поэтому на рисунке эта точка никак не выделена). Поскольку $x = -6$ принадлежит промежутку знакоположительности $f(x)$, число −6 в ответ не включается. Таким образом, множеством решений данного неравенства является $[-5; -4) \cup [3; 4)$.

Ответ: $[-5; -4) \cup [3; 4)$.

Метод интервалов по сути сводит решение неравенства стандартного вида к решению уравнения (нахождению нулей функции) с последующим определением знаков функции на промежутках ее знакопостоянства. В принципе, он дает возможность при желании отказаться от изучения «специальных» схем решения неравенств (например, иррациональных, показательных, логарифмических) и упростить подготовку к экзаменам.

1.3. Разложение на множители и группировка

Решение неравенств методом интервалов или иным методом во многих случаях требует некоторых предварительных действий, прежде всего приведения неравенства к стандартному виду с помощью равносильных алгебраических преобразований. Одним из таких преобразований является вынесение общего множителя (не числа — на число обе части неравенства можно просто разделить, а алгебраического выражения), обычно после переноса всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства и — при необходимости — группировки слагаемых. Один из таких примеров был рассмотрен ранее. Рассмотрим еще два.

Пример 4. Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{2x-3}}{3x-1} \le \frac{\sqrt{2x-3}}{2x+1}.$$

Решение. Перенесем дробь из правой части неравенства в левую и вынесем общий множитель $\sqrt{2x-3}$ за скобку:
$$\sqrt{2x-3}\left(\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)\le 0.$$

Приведем разность алгебраических дробей в скобках к общему знаменателю:
$$\sqrt{2x-3}\left(\frac{2x+1-(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)}\right)\le 0,\quad -\frac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)}\le 0.$$

Разделив или умножив обе части полученного неравенства на -1, получим неравенство стандартного вида
$$\frac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)}\ge 0. \qquad (*)$$

Обозначим через $f(x)$ левую часть последнего неравенства. Область определения D_f или — что в данном случае то же самое — ОДЗ неравенства задается системой
$$\begin{cases} 2x-3\ge 0, \\ 3x-1\ne 0, \quad x\in[1,5;\,+\infty). \\ 2x+1\ne 0, \end{cases}$$

Найдем нули $f(x)$: $x = 1,5$, $x = 2$. Далее можно применить метод интервалов, а можно заметить, что при $x \in [1,5; +\infty)$ знаменатель дроби (*) положителен, поскольку положителен каждый из множителей $3x - 1$ и $2x + 1$. Поэтому неравенство выполняется, только если
$$\left[\begin{array}{l} x-2\ge 0 \\ x=1,5, \end{array}\right. \quad x\in\{1,5\}\cup[2;\,+\infty).$$

Ответ: $\{1,5\} \cup [2; +\infty)$.

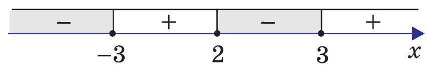
Пример 5. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 4x^2+9\cdot(0,5)^{-x}\ge x^2\cdot 2^x+36, \\ x^2+2x+\dfrac{2x+6}{x-4}\le 3. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы, переписав его в виде
$$x^2\cdot 2^x + 36 - 4x^2 - 9\cdot 2^x \le 0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части полученного неравенства:
$$(x^2\cdot 2^x - 4x^2) - (9\cdot 2^x - 36) \le 0.$$
Вынесем общий множитель в каждой из скобок:
$$x^2(2^x - 4) - 9(2^x - 4) \le 0.$$

Еще раз вынесем общий множитель:
$$(2^x - 4)(x^2 - 9) \le 0,\ \ (2^x - 4)(x - 3)(x + 3) \le 0.$$

Применим к полученному неравенству метод интервалов, учитывая, что его левая часть определена при любом действительном значении переменной, а ее нули легко найти устно:



Таким образом, решение первого неравенства системы: $(-\infty; -3] \cup [2; 3]$.

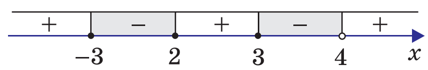
2. Решим второе неравенство системы, переписав его в виде
$$x^2+2x-3+\frac{2x+6}{x-4}\le 0.$$

Заметим, что если просто привести слагаемые в левой части полученного неравенства к общему знаменателю, то в числителе получится многочлен третьей степени. Попробуем поступить иначе, попытавшись выделить общий множитель. Для этого разложим квадратный трехчлен $x^2 + 2x - 3$ на множители. Его нулями являются числа -3 и 1, которые легко найти по формуле корней квадратного уравнения или формулам Виета. Поэтому неравенство можно переписать так:
$$(x+3)(x-1)+\frac{2(x+3)}{x-4}\le 0.$$

Теперь вынесем за скобку общий множитель:
$$(x+3)\left(x-1+\frac{2}{x-4}\right)\le 0.$$

Приведем слагаемые в скобках к общему знаменателю:
$$(x+3)\left(\frac{(x-1)(x-4)+2}{x-4}\right)\le 0,\quad \frac{(x+3)\left(x^2-5x+6\right)}{x-4}\le 0.$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 6$ являются числа 2 и 3. Разложив этот квадратный трехчлен на множители, получим неравенство
$$\frac{(x+3)(x-2)(x-3)}{x-4}\le 0,$$
которое легко решается методом интервалов:



Значит, решение второго неравенства системы: $[-3; 2] \cup [3; 4)$.

3. Остается найти решение системы. В данном случае это не представляет труда — решениями системы являются всего три числа: -3; 2; 3.

Ответ: $\{-3; 2; 3\}$.