10 УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

10.1. Определение модуля числа

Модулем (абсолютной величиной) числа a называется число a, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, если a отрицательно: $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$.

Геометрический смысл модуля. Модуль числа – это расстояние от начала отсчета до точки на координатной прямой, соответствующей этому числу (рис. 10.1)

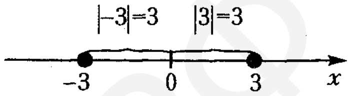

Рис. 10.1

Свойства модуля

$\lvert a\rvert \geq 0$;	(10.1)	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$;	(10.5)
$\lvert a\rvert^2 = a^2$;	(10.2)	$\lvert a-b\rvert \geq \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$;	(10.6)
$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \lvert b\rvert$;	(10.3)	$\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;	(10.7)
$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$;	(10.4)	$\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \leq -a. \end{array}\right.$	(10.8)

10.2. Раскрытие модуля

1. Если под знаком модуля положительная величина, то модуль просто опускаем.

Например, $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$.

2. Если под знаком модуля отрицательная величина, то модуль опускаем и меняем знак выражения, стоящего под модулем.

Например, $|1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2}$.

3. Если под знаком модуля переменная величина, то применяем метод промежутков.

Например, рассмотрим выражение $|x-1|$. Найдем нули функции, стоящей под знаком модуля: $x = 1$. Рассмотрим промежутки $(-\infty;\ 1]$, $(1;\ +\infty)$ и раскроем модуль на каждом из них:

1) если $x \in (-\infty;\ 1]$, то $|x-1| = 1-x$;

2) если $x \in (1;\ +\infty)$, то $|x-1| = x-1$.

10.3. Методы решений уравнений

1. Если уравнение имеет вид $|f(x)| = g(x)$ и $g(x) \geq 0$, то

$$|f(x)| = g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

2. Если уравнение содержит несколько модулей, например, имеет вид $|f_1(x)| \pm |f_2(x)| = g(x)$, то применяем метод интервалов:

1) находим нули функций, стоящих под знаком модуля, решая уравнения $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$;

2) наносим нули функций на ОДЗ уравнения;

3) раскрываем модули на каждом промежутке;

4) решаем полученные уравнения;

5) производим отбор корней на каждом промежутке, оставляя корни, принадлежащие рассматриваемому промежутку.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–2):

1. Модулем числа a называется:

1) число a, если $a \geq 0$;

2) число $-a$, если $a < 0$;

3) число a, если $a < 0$;

4) число $-a$, если $a \geq 0$;

5) число a, если $a \geq 0$ и число $-a$, если $a < 0$.

2. Свойства модуля:

1) $|a| > 0$;

2) $|a| \geq 0$;

3) $|a|^2 = a^2$;

4) $|a|^3 = a^3$;

5) $|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -a; \end{cases}$

6) $|x| \leq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq a, \\ x \geq -a; \end{array}\right.$

7) $|x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \leq -a; \end{array}\right.$

8) $|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -a. \end{cases}$

Установите соответствие:

3. Раскрытие модуля

УСЛОВИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
1) $\|a-b\|$, $a>b$;	а) $a-b$;
2) $\|a-b\|$, $a<b$;	б) $a+b$;
3) $\|a-b\|$, $a>0$, $b>0$;	в) $b-a$;
4) $\|a+b\|$, $a>0$, $b>0$.	г) $-a-b$;
	д) если $a>b$, то $a-b$, если $a<b$, то $b-a$;
	е) если $a>b$, то $b-a$, если $a<b$, то $a-b$.

Установите правильную последовательность:

4. Если уравнение имеет вид $|f_1(x)|\pm|f_2(x)|=g(x)$, то:
а) находим нули функций под знаками модулей;
б) раскрываем модули на каждом промежутке;
в) решаем уравнения на промежутках;
г) наносим нули функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на ОДЗ уравнения;
д) производим отбор корней на каждом промежутке, оставляя корни, принадлежащие рассматриваемому промежутку.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Правильный вариант ответа	5	2, 3, 5, 7	1 – а, 2 – в, 3 – д, 4 – б	а, г, б, в, д

Примеры

Пример 1. Найдите квадрат произведения корней уравнения

$$x^2+|x|-20=0.$$

Решение. Учитывая, что $x^2=|x|^2$, уравнение запишем в виде:

$$|x|^2+|x|-20=0.$$

По теореме Виета получим $|x|=4$, тогда $x=\pm4$ и $|x|=-5$, тогда $x\in\varnothing$. Найдем квадрат произведения корней уравнения:

$$(-4\cdot4)^2=256.$$

Ответ: 256.

Пример 2. Найдите произведение корней уравнения

$$|x+\sqrt{5}|=\sqrt{5}|x-\sqrt{5}|.$$

Решение. Учитывая, что обе части уравнения положительны и $|a|^2=a^2$, запишем:

$$\left(|x+\sqrt{5}|\right)^2=\left(\sqrt{5}|x-\sqrt{5}|\right)^2,\ \left(x+\sqrt{5}\right)^2=5\left(x-\sqrt{5}\right)^2,$$

$$x^2+2\sqrt{5}x+5-5x^2+10\sqrt{5}x-25=0,\ 4x^2-12\sqrt{5}x+20=0,$$

$x^2-3\sqrt{5}x+5=0$, откуда по теореме Виета $x_1\cdot x_2=5$.

Ответ: 5.

Пример 3. Решите уравнение $|||x-5|-5|-5|=5$.

Решение. Решая данное уравнение, будем помнить, что уравнение $|f(x)|=a$ при $a\geq 0$ равносильно совокупности уравнений $f(x)=a$ и $f(x)=-a$, а при $a<0$ решений не имеет.

Поскольку правая часть уравнения $|||x-5|-5|-5|=5$ положительна, то, оно равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}||x-5|-5|-5=5,\\ ||x-5|-5|-5=-5;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}||x-5|-5|=10,\\ ||x-5|-5|=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-5|-5=10,\\ |x-5|-5=-10,\\ |x-5|-5=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-5|=15,\\ |x-5|=-5,\\ |x-5|=5;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=15,\\ x-5=-15,\\ x-5=5,\\ x-5=-5;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=20,\\ x=-10,\\ x=10,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-10;\ 0;\ 10;\ 20\}$.

Пример 4. Найдите модуль разности квадратов корней уравнения $|x^2-4x-2|=4x+18$.

Решение. Уравнение имеет решение при условии, что

$$4x+18\geq 0 \text{ или } x\geq -3{,}6.$$

Заменим данное уравнение совокупностью уравнений

$$\left[\begin{array}{l}x^2-4x-2=4x+18,\\ x^2-4x-2=-4x-18;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-8x-20=0,\\ x^2=-16;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=10.\end{array}\right.$$

Найдем модуль разности квадратов корней уравнения:

$$|x_1^2-x_2^2|=|4-100|=96.$$

Ответ: 96.

Пример 5. Решите уравнение $|x-6|-|x+4|=10$.

Решение. Найдем нули функций, записанных под знаками модулей, решая уравнения $x-6=0$, откуда $x=6$ и $x+4=0$, откуда $x=-4$.

Нанесем числа -4 и 6 на координатную прямую (рис. 10.2). Рассмотрим полученные промежутки и раскроем модули на каждом из них.

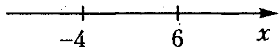

Рис. 10.2

1. На промежутке $(-\infty;-4]$ уравнение $|x-6|-|x+4|=10$ примет вид $-x+6+x+4=10$ или $10=10$. Следовательно, любое число, принадлежащее промежутку $(-\infty;-4]$, является решением уравнения.

2. На промежутке $(-4;6]$ получим $-x+6-x-4=10$, $-2x=8$, $x=-4$. Поскольку число -4 не принадлежит промежутку $(-4;6]$, то оно не является решением уравнения на этом промежутке.

3. На промежутке $(6;+\infty)$ получим $x-6-x-4=10$, или $-10=10$. Следовательно $x\in\varnothing$.

Ответ: $(-\infty;\ -4]$.

Пример 6. Решите уравнение $\dfrac{4-|2x+1|-|3-2x|}{\sqrt{x^2-5x-6}}=0$.

Решение. Запишем ОДЗ уравнения:

$$x^2-5x-6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -1)\cup(6;\ +\infty)\ \text{(рис. 10.3)}.$$

Рис. 10.3

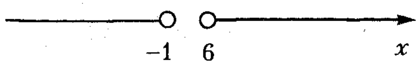

Рис. 10.4

Решим уравнение методом интервалов. Найдем нули функций под знаками модулей, решая уравнения $2x+1=0$, откуда $x=-0{,}5$ и $3-2x=0$, откуда $x=1{,}5$. Поскольку числа $-0{,}5$ и $1{,}5$ не принадлежат области допустимых значений уравнения (рис. 10.4), то решим уравнение на двух промежутках: $(-\infty;\ -1)$ и $(6;\ +\infty)$.

1. Если $x\in(-\infty;\ -1)$, то уравнение примет вид $-2x-1+2x-3-4=0$ или $-8=0$, следовательно $x\in\varnothing$.

2. Если $x\in(6;\ +\infty)$, то уравнение примет вид $2x+1-2x+3-4=0$ или $0=0$, следовательно $x\in(6;\ +\infty)$.

Ответ: $(6;\ +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–11):

1. $-|5x-x^2-6|=5x-x^2-6$.

2. $|6x-x^2-7|=x-1$.

3. $|x^2-3|-x|+1|=1$.

4. $|2-|1-|x|||=1$.

5. $|x|+|1-x|-1=0$.

6. $|x+1|+|4-2x|-|x+3|+6=2x$.

7. $|3-x|=-|y-2x|$.

8. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{|x|^2+|5-x|}=1$.

9. $|1-2x|=\sqrt{16+16x}-3$.

10. $|3-x|+|2+x|=3+|4-x|$.

11. $4(|x+1|-2)^{-1}=|1+x|$.

Решите системы уравнений (12–15):

12. $\begin{cases} x+0{,}5y=3{,}5, \\ |y-x|=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} |-x|+2|-y|=3, \\ 3{,}5x+2{,}5y=1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y=1-x, \\ |y|=1+x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5-|2x+3y|=0, \\ |3y-2x|-1=0. \end{cases}$

16. Найдите квадрат разности корней уравнения

$$2x^2+\sqrt{(-2x)^2}-6=0.$$

17. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{5(x-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2}$.

18. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$\sqrt[3]{|x+1|^3}=\sqrt[6]{|x+1|^2}.$$

19. Найдите сумму корней уравнения $|-x|^3+|1-x|^3-9=0$.

20. Найдите $-|x|$, если $|4-x|+5x+8=0$.

21. Найдите рациональные корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3x+6}}{|-x|}+\frac{\sqrt{3}|x|}{\sqrt{x+2}}=4.$$

22. Укажите наибольшее целое решение уравнения

$$\left|\frac{(-x)^3}{x^2-1}\right|-\frac{x^3}{1-x^2}=0.$$

23. Найдите сумму положительных корней уравнения

$$||x|-1|=\sqrt{|x-1|}.$$

24. Найдите произведение всех ординат точек пересечения кривых $|x+y|=5$ и $\sqrt{xy^{-1}+2+yx^{-1}}=2{,}5$.

Ответы: 1. $x\in(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$. **2.** $\left\{2;\ 3;\ \dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. **3.** $\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. **4.** $\{-4;\ -2;\ 0;\ 2;\ 4\}$. **5.** $x\in[0;\ 1]$. **6.** $x\geq 2$. **7.** $x=3$; $y=6$. **8.** $\left\{-\dfrac{2}{3};\ \dfrac{1}{2};\ 2\right\}$. **9.** $\{0;\ 3\}$. **10** .$\{-6;\ 2\}$. **11.** $\{-2-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$. **12.** $(3;\ 1)$, $\left(\dfrac{5}{3};\ \dfrac{11}{3}\right)$. **13.** $\left(-\dfrac{11}{19};\ \dfrac{23}{19}\right)$, $(1;\ -1)$. **14.** $(0;\ 1)$. **15.** $\left(-\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{2}{3}\right)$; $\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{2}{3}\right)$;$(-1;\ -1)$;$(1;\ 1)$. **16.** $\left(\sqrt{13}-1\right)^2$. **17.** 2,5. **18.** -1. **19.** 1. **20.** -3. **21.** $\left\{-\dfrac{2}{3};1\right\}$; **22.** 0. **23.** 3. **24.** 16.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Сумма корней уравнения $3x^2+\lvert x\rvert-2x=0$ равна	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) 6; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) $-\frac{2}{3}$.
2	Корни уравнения $(3x)^2=-\dfrac{3^4x}{\lvert x\rvert}$ принадлежат промежутку	1) $(0;\ 10]$; 2) $(2;\ 15)$; 3) $(-22;\ -10]$; 4) $(-5;\ 0)$; 5) $(-2;\ 5)$.
3	Среднее арифметическое корней уравнения $\left\lvert\lvert x\rvert^2+3\right\rvert+4x=0$ равно	1) 4; 2) −4; 3) −2; 4) 43; 5) 25.
4	Произведение наибольшего и наименьшего корней уравнения $\left\lvert\lvert -x\rvert^2+3\right\rvert=\lvert -4x\rvert$ равно	1) −1; 2) 0; 3) −3; 4) 6; 5) −9.

№	Задания	Варианты ответов
5	Удвоенное произведение корней уравнения $\left\|\left\|-\sqrt{3}x\right\|^2+6x+4\right\|=\left\|\left\|-x\right\|^2+x+2\right\|$ равно	1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 0,5; 5) −12.
6	Квадрат суммы корней уравнения $1{,}5x^2+\|0{,}5x-1\|=1$ равен	1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 1 5) 0.
7	Модуль среднего арифметического корней уравнения $(x+4)^2+1=\frac{1+\|x+4\|}{\|x+4\|}$ равен	1) 18; 2) 23; 3) 2; 4) 4; 5) 28.
8	Число корней уравнения $\left\|\left\|\left\|\left\|1-x\right\|+2\right\|-1\right\|+1\right\|=2$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 1.
9	Наименьший корень уравнения $2\|-x-6\|-\|x\|-\|x-6\|-18=0$ принадлежит промежутку	1) $(2;\ 7)$; 2) $(-4;\ 5)$; 3) $(-1;\ 6)$; 4) $[-2;\ 5]$; 5) $(-\infty;\ 0)$.
10	Количество целых значений x, для которых не выполняется равенство $\left\|\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}\right\|=\frac{\|x\|^2-10x+16}{\|x\|^2-10x+24}$ равно	1) 3; 2) 4; 3) 2; 4) 6; 5) 7.
11	Если k – количество различных корней уравнения $9-\left\|x^3+2\|x\|^2-9\right\|=(-x)^3$, а x_0 – наибольший корень этого уравнения, то значение выражения $0{,}5x_0k$ равно	1) 4,5; 2) 3; 3) 6; 4) 42; 5) 1.

№	Задания	Варианты ответов
12	Куб среднего арифметического корней уравнения $\sqrt{-2\lvert x\rvert^2+8x-6}\cdot(1-\lvert x-1\rvert)=0$ равен	1) 2; 2) −3; 3) 27; 4) 8; 5) 1.
13	Модуль суммы корней уравнения $-\lvert x-1\rvert\cdot(\lvert -x\rvert+\lvert 2-x\rvert)=8(1-x)$ равен	1) 6; 2) 16; 3) 28; 4) 4; 5) 51.
14	Если $(x_0;\ y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}2^{-1}y=1-2^{-1}x,\\ \lvert y-3x\rvert=1\end{cases}$ и $3^{-1}x_0y_0>2$, то значение выражения $-12\lvert y_0-x_0\rvert$ равно	1) 1; 2) 12; 3) −12; 4) 22; 5) −6.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	1	4	3	5	2	1	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	1	2	1	4	1	5