

## Задание №19

### ТИП #1

1. *Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число  $n$ , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число  $n$ , а остальные числа, равные  $n$ , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.*
  - а) *Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.*
  - б) *Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?*
  - в) *Приведите все примеры задуманных чисел.*
  
2. *Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число  $n$ , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число  $n$ , а остальные числа, равные  $n$ , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.*
  - а) *Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.*
  - б) *Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?*
  - в) *Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.*

### ТИП #2

3. *Две девочки делают фотографии. Наташа  $P$  фотографий, Маша  $K$  - фотографий. И каждый день каждая делает на одну фотографию больше. В конце Наташа сделала на 1001 фотографию больше чем Маша.*
  - а) *Могло ли это произойти за 7 дней?*
  - б) *Могло ли это произойти за 8 дней?*
  - в) *максимальное количество фотографий Наташи, если Маша в последний день сделала меньше 40 фотографий.*

**ТИП #3**

4. На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 7, зелёные числа кратны 5. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными числами могут быть одинаковые.
- а) Может ли сумма зелёных чисел быть меньше 2325?
  - б) Может ли сумма чисел быть 1469, если только одно число красное?
  - в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1467.
5. На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 8, зелёные числа кратны 3. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными числами могут быть одинаковые.
- а) Может ли сумма зелёных чисел быть меньше 1395?
  - б) Может ли сумма чисел быть 1066, если только одно число красное?
  - в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1066.

**ТИП #4**

6. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5100.
- а) Может ли быть записано число 250?
  - б) Можно ли обойтись без числа 11?
  - в) Какое наименьшее количество чисел кратных 11 может быть на доске?
7. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.
- а) Может ли быть записано число 230?
  - б) Можно ли обойтись без числа 14?
  - в) Какое наименьшее количество чисел кратных 14 может быть на доске?
8. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5130.
- а) Может ли быть записано число 220?
  - б) Можно ли обойтись без числа 12?
  - в) Какое наименьшее количество чисел кратных 12 может быть на доске?
9. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5130.
- а) Может ли быть записано число 240?
  - б) Можно ли обойтись без числа 16?
  - в) Какое наименьшее количество чисел кратных 16 может быть на доске?

**ТИП #5**

10. На доске 30 различных натуральных чисел, каждое или оканчивается на 7, или четное, а сумма чисел равна 810.
- а) Может ли быть 24 четных числа?
  - б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7?
  - в) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 7 может быть на доске?
11. На доске 30 различных натуральных чисел, каждое или оканчивается на 9, или четное, а сумма чисел равна 877.
- а) Может ли быть 27 четных чисел?
  - б) Может ли быть на доске ровно 15 чисел, оканчивающихся на 9?
  - в) Какое наибольшее количество чисел с последней цифрой 9 может быть на доске?

**ТИП #6**

12. На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2946.
- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и 6?
  - б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
  - в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?
13. На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 7, или на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 2502.
- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 7 и 3?
  - б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 3?
  - в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть записано на доске?

**ТИП #7**

14. Задумано несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Эти числа и все их возможные произведения (по 2 числа, по 3 числа и т. д.) выписывают на доску. Если какое-то число  $n$ , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число  $n$ , а остальные числа, равные  $n$ , стирают. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.
- а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.
  - б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 105, 315, 945?
  - в) Приведите все примеры шести задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 82.

**ТИП #8**

15. 32 студента пишут две контрольные работы, каждый может написать или только одну или обе. За контрольную можно получить от 0 до 20 баллов. Средний балл за каждую из контрольных - 14. Студенты называют наивысший из полученных баллов профессору, если студент написал одну работу, то он называет балл за нее.
- Приведите пример, при котором среднее арифметическое меньше 14.
  - Может ли среднее арифметическое быть равно 11 если обе контрольные написали только два студента?
  - Какое наименьшее количество студентов должно написать обе контрольные чтобы среднее арифметическое было равно 11?
16. 28 студентов пишут две контрольные работы, каждый может написать или только одну или обе. За контрольную можно получить от 0 до 20 баллов. Средний балл за каждую из контрольных - 15. Студенты называют наивысший из полученных баллов профессору, если студент написал одну работу, то он называет балл за нее.
- Приведите пример, при котором среднее арифметическое меньше 15.
  - Может ли среднее арифметическое быть равно 13 если обе контрольные написали только два студента?
  - Какое наименьшее количество студентов должно написать обе контрольные чтобы среднее арифметическое было равно 13?
17. 28 студентов пишут две контрольные работы, каждый может написать или только одну или обе. За контрольную можно получить от 0 до 20 баллов. Средний балл за каждую из контрольных - 15. Студенты называют наивысший из полученных баллов профессору, если студент написал одну работу, то он называет балл за нее.
- Приведите пример, при котором среднее арифметическое меньше 15.
  - Может ли среднее арифметическое быть равно 5?
  - Какое наименьшее среднее арифметическое могло быть, если обе контрольные работы писали 10 студентов?
18. 28 студентов пишут две контрольные работы, каждый может написать или только одну или обе. За контрольную можно получить от 0 до 20 баллов. Средний балл за каждую из контрольных - 14. Студенты называют наивысший из полученных баллов профессору, если студент написал одну работу, то он называет балл за нее.
- Приведите пример, при котором среднее арифметическое меньше 14.
  - Может ли среднее арифметическое быть равно 17?
  - Какое наименьшее среднее арифметическое могло быть, если обе контрольные работы писали 12 студентов?