Задача 19

Дано трехзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 20?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 81?

в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

(ЕГЭ 2013, основная волна)

Ответ

а) да

б) нет

в) 11

Решение

а) Пусть число $N = 100a + 10b + c$, где a, b, c – число сотен, десятков и единиц соответственно, следовательно, они могут принимать натуральные значения от 0 до 9 (только a не может быть равно 0).

Предположим, что

$$\frac{N}{a+b+c} = 20 \quad \Rightarrow \quad 10(8a - b) = 19c$$

Пусть $8a = b$, откуда, так как a, b – цифры, то $a = 1$ и $b = 8$. Тогда $10(8a - b) = 0$, следовательно, $19c = 0$, откуда $c = 0$. Таким образом, получили число 180.

Проверкой убеждаемся, что действительно $180 : (1 + 8 + 0) = 20$.

Ответ: да.

б) Предположим, что

$$\frac{N}{a+b+c} = 81 \quad \Rightarrow \quad N = 81(a + b + c)$$

Следовательно, N делится на 81, следовательно, его можно представить в виде $N = 81 \cdot k$, где k – некоторое натуральное число и $k = a + b + c$. Заметим, что так как N – трехзначное число, то $81 \cdot k \leqslant 999$, откуда $k \leqslant 12$.

Из того, что N делится на 81, можно сделать вывод, что N делится на 9. Следовательно, сумма его цифр должна делиться на 9. Но так как сумма его цифр равна k, а $k \leqslant 12$, то $k = 9$. Следовательно, $N = 9 \cdot 81 = 729$. Но у числа 729 сумма цифр не равна 9, следовательно, 729 не подходит. Так как это был единственный возможной вариант, то ответ: нет.

в) Рассмотрим $\dfrac{N}{a+b+c}$.

Попробуем поискать наименьшее трехзначное число с наибольшей суммой цифр. Значит, в нем должно быть мало сотен и много десятков и единиц. Возьмем 198. Сумма его цифр равна 18 и оно нацело делится на нее, в результате чего получаем 11.

Докажем, что 11 – наименьшее натуральное частное от деления числа на сумму его цифр.

Предположим противное. Пусть частное от деления $N = 100a + 10b + c$ на $a + b + c$ равно k, где $k \leqslant 10$ – натуральное число. Тогда:

$$\frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = k \quad \Leftrightarrow \quad (100 - k)a + (10 - k)b = (k - 1)c$$

Так как число сотен не может быть равно нулю, то $a \geqslant 1$. Так как $k \leqslant 10$, то $100 - k \geqslant 90$, следовательно, $(100 - k)a \geqslant 90$. Так как $b \geqslant 0$, то $(10 - k)b \geqslant 0$, следовательно, вся левая часть равенства $\geqslant 90$.

Так как число единиц не может быть больше 9, то есть $c \leqslant 9$, и $k-1 \leqslant 9$, то $(k-1)c \leqslant 9 \cdot 9 = 81$.

Следовательно, в нашем равенстве левая часть $\geqslant 90$, а правая $\leqslant 81$. Следовательно, равенство не имеет решений.
Значит, предположение неверно и 11 – наименьшее натуральное значение для частного трехзначного числа и суммы его цифр.

Задача 19

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 330. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

(ЕГЭ 2015, досрочная волна)

Ответ

а) $14 \times 19 + 64$, где запись 14×19 означает сумму из 14 слагаемых, каждое из которых равно 19

б) Нет

в) 1518

Решение

Пусть $i-$ое выписанное число имеет вид $10 \cdot a_i + b_i$, где $a_i, b_i \in \{1, 2, ..., 9\}$. Для суммы b_i по всем значениям индекса i, таким, что слагаемое b_i есть этой в сумме, используем обозначение $\sum\limits_i b_i$. Тогда сумма всех исходных чисел имеет вид

$$\sum_i (10a_i + b_i) = 10 \cdot \sum_i a_i + \sum_i b_i.$$

Обозначим $A = \sum\limits_i a_i$, $B = \sum\limits_i b_i$, тогда $330 = 10 \cdot A + B$.

После смены мест цифр $i-$ое полученное число имеет вид $10 \cdot b_i + a_i$. Тогда сумма всех полученных чисел имеет вид

$$\sum_i (10b_i + a_i) = 10 \cdot \sum_i b_i + \sum_i a_i = 10 \cdot B + A.$$

а) Увеличение суммы в 4 раза равносильно тому, что новая сумма равна $330 \cdot 4 = 1320$, что равносильно $10 \cdot B + A = 1320$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 10 \cdot A + B = 330 \\ A + 10 \cdot B = 1320 \end{cases}$$

вычитая из второго уравнения первое, находим, что $9 \cdot B - 9 \cdot A = 990$, откуда $B = 110 + A$. Подставляя это в первое уравнение системы, находим $A = 20$, тогда $B = 130$.

Попробуем брать в качестве b_i 9, пока их сумма не превосходит 130 – так можно положить

$$b_1 = ... = b_{14} = 9, \quad b_{15} = 130 - 14 \cdot 9 = 4,$$

то есть в сумме 15 слагаемых. Тогда можно положить

$$a_1 = ... = a_{14} = 1, \quad a_{15} = 20 - 14 \cdot 1 = 6.$$

б) Увеличение суммы в 2 раза равносильно тому, что новая сумма равна $330 \cdot 2 = 660$, что равносильно $10 \cdot B + A = 660$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 10 \cdot A + B = 330 \\ A + 10 \cdot B = 660 \end{cases}$$

вычитая из второго уравнения первое, находим, что $9 \cdot B - 9 \cdot A = 330$, но 330 не делится на 9, следовательно, такой случай не возможен.

в) Пусть сумма полученных чисел равна S, что равносильно системе

$$\begin{cases} 10 \cdot A + B = 330 \\ A + 10 \cdot B = S \end{cases}$$

вычитая из второго уравнения первое, находим, что

$$9 \cdot B - 9 \cdot A = S - 330,$$

откуда

$$B = \frac{S}{9} - \frac{110}{3} + A.$$

Подставляя это в первое уравнение системы, находим

$$A = \frac{100}{3} - \frac{S}{99},$$

откуда в частности следует, что

$$\frac{S}{99} = s + \frac{1}{3},$$

то есть $S = 99s + 33$ для некоторого целого неотрицательного s, тогда $A = 33 - s$, $B = 10s$.

Покажем, что $B < 170$:
в самом деле, если бы было $B \geqslant 170$, тогда число слагаемых в исходной сумме было бы не менее, чем 19 (так как $18 \cdot 9 < 170$), но тогда

$$10 \cdot A + B \geqslant 190 + 170 > 330.$$

Так как $B < 170$, то $10s < 170$, то есть $s \leqslant 16$.

При $s = 16$ получим $A = 17$, $B = 160$, но даже $17 \cdot 9 = 153 < B$, а количество чисел не может быть больше, чем 17 $(= A)$, следовательно, $s \leqslant 15$.

При $s = 15$ получим $A = 18$, $B = 150$

Аналогично примеру из пункта а) построим решение:

Попробуем брать в качестве b_i 9, пока их сумма не превосходит 150 – так можно положить

$$b_1 = ... = b_{16} = 9, \quad b_{17} = 150 - 16 \cdot 9 = 6\,,$$

то есть в сумме 17 слагаемых. Тогда можно положить

$$a_1 = ... = a_{16} = 1 \quad a_{17} = 18 - 16 \cdot 1 = 2,$$

итого, искомая сумма $16 \times 19 + 26$, максимальная $S = 99 \cdot 15 + 33 = 1518$.

Задача 19

Среди посетителей одного из магазинов был проведён опрос. Известно, что каждому опрошенному целое число лет. Участник опроса попадает в возрастную категорию А, если ему более 40 лет, иначе он попадает в категорию Б. Спустя 4 года опрос был проведён повторно, причём среди тех же людей, что и в первый раз.

а) Могло ли оказаться так, что во время повторного опроса средний возраст опрашиваемых, попавших в категорию Б, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что при повторном опросе средний возраст опрашиваемых, попавших в категорию А, понизился, и средний возраст опрашиваемых, попавших в категорию Б, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний возраст опрашиваемых составил 40 лет, средний возраст опрашиваемых, попавших в категорию Б, составил 28 лет, а средний возраст опрашиваемых, попавших в категорию А, составил 55 лет. При повторном опросе средний возраст опрашиваемых, попавших в категорию Б, стал равен 31 году, а попавших в категорию А – 57 годам. При каком наименьшем числе участников опроса возможна такая ситуация?

(ЕГЭ 2015, основная волна)

Ответ

а) Да

б) Да

в) 18

Решение

а) Это могло быть, например, в случае, когда в категорию Б попадали изначально три человека, одному из которых было 40 лет, а двум другим по 10 лет. Тогда их средний возраст при первом опросе был 20 лет, а при втором опросе в категории Б остались только двое, которым исполнилось по 14 лет, то есть их средний возраст стал 14 лет.

б) Это могло быть, например, в случае, когда в категорию Б попадали те же трое, что в пункте а), а в категорию А изначально попадали два человека, которым было по 70 лет.

в) Пусть количество опрошенных, которые попадали в категорию А при первом опросе, было равно n, а количество опрошенных, попадавших в категорию Б, было равно m, тогда суммарный возраст участников при первом опросе составлял $40(n+m)$, причём

$$40(n+m) = 55n + 28m \qquad \Leftrightarrow \qquad 5n = 4m\,,$$

откуда, в частности, следует, что n делится на 4, а m делится на 5.

Так как средний возраст в категории А вырос не на 4 года, то в категорию А должны были перейти опрошенные, которые ранее относились к категории Б. Пусть их ровно k человек. Так как при повторном опросе им могло быть не более 44 лет, то суммарный возраст участников категории А за счёт появления этих k человек не мог увеличиться более, чем на $44k$, тогда

$$57(n+k) \leqslant 59n + 44k \qquad \Rightarrow \qquad 2n \geqslant 13k\,.$$

Так как $k \geqslant 1$, то $n \geqslant 7$, но n делится на 4, следовательно, $n \geqslant 8$. При $n = 8$ имеем: $m = 10$. Этот случай возможен только при $k = 1$.

Проверим, подходит ли нам этот случай. Пусть возраст перешедшего в категорию А из категории Б стал

$41 \leqslant x \leqslant 44$, тогда

$$\begin{cases} 57(n+1) = 59n + x \\ 31(m-1) = 32m - x\,, \end{cases}$$

откуда $x = 41$ – подходит по условию.

Таким образом, менее 18 человек быть не могло, а 18 человек могло быть, например, так:
в первый раз опросили 8 человек, каждому из которых было по 55 лет, одного человека в возрасте 37 лет и 9 человек, каждому из которых было по 27 лет.

Задача 19

Руководство компании "Золото" приняло решение выдать сотрудникам новогодние премии слитками золота общей массой 300 кг. При этом у руководства есть 50 слитков по 1 кг и 50 слитков по 5 кг.

а) Удастся ли выдать премии, если их должны получить 20 сотрудников, причём все сотрудники должны получить поровну?

б) Удастся ли выдать премии, если ведущему специалисту надо выдать 20 кг золота, а остальное разделить поровну между 35 сотрудниками?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников премии удастся выдать при любом распределении, таком что каждому сотруднику полагается целое число килограмм золота?

(ЕГЭ 2015, резервный день)

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 13

Решение

а) Каждый сотрудник должен получить $300 : 20 = 15$ кг золота. Это можно сделать следующим образом:
шестнадцати сотрудникам выдать по 3 слитка массой 5 кг,
одному сотруднику выдать 2 слитка массой 5 кг и 5 слитков массой 1 кг,
остальным трём сотрудникам выдать по 15 слитков массой 1 кг.

б) тридцати пяти сотрудникам надо выдать $300 - 20 = 280$ кг золота, то есть по $280 : 35 = 8$ кг золота каждому из них. Тогда среди слитков по 1 кг каждый из этих сотрудников должен получить минимум по 3 слитка, но тогда слитков должно быть не менее $3 \cdot 35 = 105 > 50$, что неверно. Таким образом, так премии выдать не удастся.

в) Можно распределить премии так, что среди слитков по 1 кг каждый сотрудник, кроме одного, должен получить по 4 слитка:
все сотрудники получают по 4 кг золота, кроме одного, который получает всё остальное.

Отсюда следует, что ответ в задаче не может быть больше 13, иначе можно распределить тринадцати сотрудникам по 4 кг золота, но такую премию выдать нельзя, так как тогда среди слитков по 1 кг каждый из этих тринадцати сотрудников должен получить по 4 слитка, но ведь таких слитков $50 < 13 \cdot 4 = 52$.

Докажем, что тринадцати сотрудникам премии удастся выдать при любом допустимом распределении. Достаточно убедиться в том, что двенадцати сотрудникам можно выдать премии при любом допустимом распределении на 13 человек, ведь если 12 сотрудников смогут забрать свои премии, то тринадцатый автоматически должен забрать всё остальное, что он всегда сможет сделать.

Для первых двенадцати сотрудников (мы их как-то занумеровали, неважно, как именно) можно поступить так: пусть P_1, ..., P_{12} – массы золота, распределённые в качестве премий сотрудникам с первого по двенадцатого соответственно.

Пусть p_1, ..., p_{12} – остатки от деления на 5 чисел P_1, ..., P_{12} соответственно. Тогда каждому i-ому из первых двенадцати сотрудников можно сначала выдать часть премии в виде p_i слитков по 1 , после чего массы невыданных частей премий этих двенадцати сотрудников станут кратны 5, следовательно, оставшиеся части премий массами $P_1 - p_1$, ..., $P_{12} - p_{12}$ заведомо можно будет выдать при помощи оставшихся слитков.

Тринадцатый сотрудник может получить оставшееся золото после того, как первым двенадцати будут выданы их премии.

Задача 19

После того, как учитель прочитал классу своё новое стихотворение, выяснилось, что большая часть класса не расслышала первой его строчки. На перемене один ученик нашёл стихотворение на учительском столе и прочитал первую строчку (и только он). Также известно, что в классе учится не более 35, но не менее 25 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не видела и не слышала первой строчки?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, видевших или слышавших первую строчку, выражался целым числом, а после перемены – нецелым числом?

в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не услышавших и не увидевших первой строчки этого стихотворения?

(ЕГЭ 2016, досрочная волна)

Ответ

а) Да

б) Да

в) 96

Решение

а) Такое возможно, например, в случае, если в классе 25 учеников и 12 из них слышали первую строчку до перемены.

б) Такое возможно, например, в случае, если в классе 28 учеников и 7 из них слышали первую строчку до перемены – тогда до перемены первую строчку слышали или видели

$$\frac{7}{28} \cdot 100\% = 25\% \text{ учеников,}$$

а после перемены

$$\frac{8}{28} \cdot 100\% = \frac{200}{7}\% \text{ учеников.}$$

в) В случае, если в классе 25 человек и в итоге первую строчку этого стихотворения услышал/увидел только один человек, процент учеников класса, так и не услышавших и не увидевших первой строчки этого стихотворения равен

$$\frac{24}{25} \cdot 100 = 96\,.$$

Докажем, что большего целого значения эта величина принять не могла. В самом деле, если процент учеников, не слышавших и не видевших первую строчку – целое число, то и процент учеников, слышавших/видевших первую строчку тоже целое число.

Понятно также, что процент учеников, не слышавших и не видевших первую строчку, максимален тогда и только тогда, когда минимален процент учеников, слышавших/видевших первую строчку.

Сделать процент учеников, слышавших/видевших первую строчку, ещё меньше можно только в случае, когда ровно один ученик слышал/видел первую строчку, а в классе количество учеников больше, чем 25. Пусть в классе $u > 25$ учеников, тогда искомый процент равен

$$\frac{1}{u} \cdot 100\,.$$

Мы доказали, что это число должно быть целым, чтобы выполнилось условие задачи, но тогда 100 должно делиться на u, где $25 < u \leqslant 35$ – целое. Легко убедиться, что подходящих u нет, следовательно, окончательный ответ: 96.

Задача 19

Дана последовательность, состоящая из n целых чисел, причем $a_1 = 1,\ a_n = 235$. Сумма любых соседних членов данной последовательности равна либо 3, либо 5, либо 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли в такой последовательности $n = 1000$?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть в такой последовательности?

(ЕГЭ 2016, основная волна)

Ответ

б) нет

в) 23

Решение

а) Пример последовательности при $n = 23$:

$1, 2, 23, -18, 43, -38, 63, -58, 83, -78, 103, -100, 125, -122, 147, -144, 169, -166, 191, -188, 213, -210, 235.$

б) Исходя из условия, любые соседние числа данной последовательности будут разной четности. Следовательно, если бы такая последовательность существовала, то a_{1000} было бы четным, а 235 – нечетное число, следовательно, такой последовательности не существует.

в) Наименьшее n равно 23 (пример из пункта а).

Т.к. из пункта б) следует, что количество членов последовательности должно быть нечетным, нам нужно доказать, что $n > 21$. Докажем от противного. Предположим, что существует такая последовательность, где $n \leqslant 21$. Будем рассматривать последовательность справа налево. Заметим, что если какой-то член последовательности больше 25, то слева от него стоит отрицательное число. Также заметим, что слева от отрицательного числа обязано стоять положительное число. Поэтому до тех пор, пока, идя справа налево, мы не встретим первое положительное число $\leqslant 25$ (назовем его a_i), числа будут образовывать знакопеременную последовательность.

Среди чисел, стоящих правее a_i, любые числа, стоящие через один, отличаются по модулю либо на 0, либо на 2, либо на 20, либо на 22:

пусть a, b, c – три подряд идущих члена последовательности, стоящие правее a_i. Тогда $a + b = p,\ b + c = q\ \Rightarrow |a - c| = |p - q|$, где p, q принимают значения $3, 5, 25$ (из условия). Следовательно, $|p - q|$ принимает значения $0, 2, 20, 22$.

Таким образом, правее a_i стоит не менее 20 чисел, т.к. $235 - 22 \cdot 9 = 37 > 25$. То есть мы максимально быстро уменьшаем положительные числа:

$$235, *213, *, 191, *, 169, *, \dots \qquad \text{(* - отрицательные числа)}$$

Итак, мы имеем последовательность $1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, 235$, в которой как минимум 22 члена последовательности (т.к. $a_i \neq 1$). Но по предположению $n \leqslant 21$, следовательно, мы получили противоречие.

Задача 19

На доске написано 20 чисел: пять $<10>$, десять $<8>$ и пять $<6>$. Эти числа разбивают на две группы так, что в каждой группе есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно M, среднее арифметическое чисел во второй группе равно N. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел больше $\dfrac{M+N}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 10 чисел, то $\dfrac{M+N}{2}$ будет равно среднему арифметическому всех чисел.

в) Найдите наименьшее возможное значение выражения $\dfrac{M+N}{2}$.

(ЕГЭ 2016, резервный день)

Ответ

а) 6×5 и 8×10, 10×5

в) $7\frac{1}{19}$

Решение

а) В качестве первой группы чисел можно взять все $<6>$, тогда вторая группа будет состоять из всех $<8>$ и $<10>$.

$$M = \frac{5 \cdot 6}{5} = 6, \qquad N = \frac{10 \cdot 8 + 5 \cdot 10}{15} = \frac{130}{15} = 8\frac{2}{3}.$$

Среднее арифметическое всех чисел равно

$$\frac{5 \cdot 6 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 10}{20} = 8,$$

при этом

$$\frac{M+N}{2} = 3 + 4\frac{1}{3} = 7\frac{1}{3} < 8\,.$$

б) Количество $<10>$, попавших в первую группу, обозначим через A,
количество $<8>$, попавших в первую группу, обозначим через B,
количество $<6>$, попавших в первую группу, обозначим через C, тогда

$$M = \frac{A \cdot 10 + B \cdot 8 + C \cdot 6}{10}, \qquad N = \frac{(5-A) \cdot 10 + (10-B) \cdot 8 + (5-C) \cdot 6}{10},$$

откуда

$$M + N = \frac{A \cdot 10 + B \cdot 8 + C \cdot 6 + (5-A) \cdot 10 + (10-B) \cdot 8 + (5-C) \cdot 6}{10} = 16,$$

следовательно,

$$\frac{M+N}{2} = 8,$$

что и требовалось доказать.

в) Если количества чисел в группах одинаковы, то $\dfrac{M+N}{2} = 8$.

Пусть количество чисел в первой группе меньше, чем количество чисел во второй группе.
Пусть в первую группу попало m чисел, тогда во вторую – $20 - m$ ($m \in \{1, ..., 9\}$).

Согласно условию

$$mM + (20-m)N = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 6 = 160 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{160 - mM}{20 - m}\,.$$

Теперь
$$\frac{M+N}{2}=\frac{M+\frac{160-mM}{20-m}}{2}=\frac{20M-mM+160-mM}{2(20-m)}=\frac{M(10-m)+80}{20-m}\,.$$
Заметим, что $M(10-m)>0$. Кроме того, $M\geqslant 6$. Тогда
$$\frac{M+N}{2}\geqslant\frac{6(10-m)+80}{20-m}=\frac{140-6m}{20-m}=6+\frac{20}{20-m}\geqslant 6+\frac{20}{20-1}=7\frac{1}{19}\,.$$

При этом значение $7\frac{1}{19}$ достигается в случае, когда в первую группу попадает только одна шестёрка, следовательно, $7\frac{1}{19}$ и есть ответ.

Задача 19

На доске написано несколько различных натуральных чисел, причем известно, что произведение любых двух из них больше 40, но меньше 100.

а) Может ли на доске быть написано 5 чисел?

б) Может ли на доске быть написано 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их количество равно 4?

(ЕГЭ 2017, досрочная волна)

Ответ

а) да

б) нет

в) 35

Решение

а) Предположим, что может быть написано 5 чисел. Расположим их в порядке возрастания: $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$. Тогда произведение двух наименьших $a_1 \cdot a_2 > 40$. Пусть $a_1 = 6$, $a_2 = 7$ (тогда $a_1 \cdot a_2 = 42 > 40$). Произведение двух наибольших $a_4 \cdot a_5 < 100$. Пусть $a_4 = 9$, $a_5 = 10$. Следовательно, осталось подобрать еще одно число a_3, причем оно должно быть больше 7, но меньше 9. Возьмем, например, 8. Таким образом, мы получили 5 чисел:

$$6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10.$$

б) Предположим, что может быть написано 6 чисел. Расположим их в порядке возрастания: $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6$. Тогда произведение двух наибольших $a_5 \cdot a_6 < 100$. Отсюда можно сделать вывод, что $a_5 \leqslant 9$ (так как если $a_5 \geqslant 10$, то $a_6 \geqslant 11$ и их произведение $\geqslant 110$).
Произведение двух наименьших $a_1 \cdot a_2 > 40$, следовательно, $a_2 \geqslant 7$ (так как если $a_2 \leqslant 6$, то $a_1 \leqslant 5$, следовательно, их произведение $\leqslant 30$). Таким образом, на отрезке $[7; 9]$ должны быть расположены четыре натуральных числа $a_2; a_3; a_4; a_5$, что невозможно, так как на этом отрезке только три натуральных числа.

в) Пусть на доске написаны 4 числа, расположим их также в порядке возрастания: $a_1; a_2; a_3; a_4$. Аналогично предыдущему пункту, можно сделать вывод, что $a_2 \geqslant 7$, $a_3 \leqslant 9$. Следовательно, a_2 и a_3 могут принимать значения $7, 8$ или 9.

1. Пусть $a_2 = 7, a_3 = 8$. Тогда a_1 может быть равно только 6, потому что иначе произведение $a_1 \cdot a_2$ будет меньше 40. Максимальное значение для a_4 – это 12. Следовательно, в этом случае максимально возможная сумма чисел $6 + 7 + 8 + 12 = 33$.

2. Пусть $a_2 = 7, a_3 = 9$. Аналогично $a_1 = 6$. Максимальное значение для a_4 – это 11. Следовательно, в этом случае максимально возможная сумма чисел $6 + 7 + 9 + 11 = 33$.

3. Пусть $a_2 = 8, a_3 = 9$. Тогда максимальное значение для a_1 – это 7. Максимальное значение для a_4 – это 11. Следовательно, в этом случае максимально возможная сумма чисел $7 + 8 + 9 + 11 = 35$.

Так как мы рассмотрели все возможные случаи, то максимальная сумма чисел равна 35.

Задача 19

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в 3 раза.

а) Может ли на доске быть написано 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть написано 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько чисел может быть написано на доске, если их произведение равно 8000?

(ЕГЭ 2017, досрочная волна, резерв)

Ответ

а) да

б) нет

в) 2 или 3

Решение

а) Упорядочим числа в порядке возрастания: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$. Приведем пример. Пусть $a_1 = 6$, $a_5 = 17$. Тогда $a_2 + a_3 + a_4 = 24$. Следовательно, можно взять $a_2 = 7,\ a_3 = 8,\ a_4 = 9$.
Ответ: да.

б) Упорядочим числа в порядке возрастания: $a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_{10}$. Тогда $a_i \leqslant 3a_1$, $i = 2; 3; ...; 10$. Предположим, что сумма может быть равна 94. Тогда

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{10} = 94 \leqslant a_1 + 9 \cdot 3a_1 = 28a_1$$

откуда $a_1 \geqslant 4$.
Так как все числа натуральные и различные, то при $a_1 = 4$ наибольшее возможное значение a_{10} – это 12. Но тогда между 4 и 12 не умещается 8 различных чисел.
$(*)$ При $a = 5$ наименьшая сумма достигается, если числа равны

$$5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14,$$

и равна $0,5(5 + 14) \cdot 10 = 95 > 94$.
Заметим, что при увеличении a_1 будет увеличиваться и значение наименьшей возможной суммы, следовательно, таких чисел не существует и ответ: нет.

Приведем другое доказательство пункта б):
Так как можно сказать, что $a_{10} = 3a_1 - \alpha$, где α – некоторое неотрицательное целое число, то количество натуральных чисел, находящихся между a_{10} и a_1, будет равно $2a_1 - 1 - \alpha$. Так как чисел между a_{10} и a_1 должно быть 8, то $2a_1 - 1 - \alpha \geqslant 8$, откуда $a_1 \geqslant 4,5 + 0,5\alpha$. Следовательно, $a_1 \geqslant 5$.
Далее можно привести то же рассуждение $(*)$.

в) Заметим, что $8000 = 2^6 \cdot 5^3$. Следовательно, любое число, записанное на доске, имеет вид $2^x \cdot 5^y$ ($x, y \geqslant 0$ – натуральные).
Начнем пробовать привести пример для двух чисел. Такой пример удается привести: $a_1 = 2^6 = 64$ и $a_2 = 5^3 = 125$.

Приведя пример для двух чисел, пробуем привести пример для трех чисел: $a_1 = 2^4 = 16$, $a_2 = 2^2 \cdot 5 = 20$, $a_3 = 5^2 = 25$.

Попробовав привести пример для четырех чисел и безуспешно потратив на это не более 10 минут, задумываемся над тем, что, вполне возможно, примера для четырех чисел не существует. Докажем, что на доске не может быть написано 4 числа и более.

Пусть $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$, $n \geqslant 4$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть какое-то a_i содержит в разложении на простые множители как минимум две пятерки, то есть делится на 25: $a_i = 25 \cdot k$ ($k \geqslant 1$). Тогда оставшиеся числа (их не менее трех) $\geqslant \frac{25}{3} \cdot k \geqslant 9$. Тогда произведение всех чисел $\geqslant 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 25 = 18225$, что больше 8000. Получили противоречие, следовательно, такого числа среди написанных на доске быть не может.

Приведем другое объяснение невозможности существования такого числа.

Если такое число есть, то оно $\geqslant 25$. Но тогда произведение всех оставшихся чисел $\leqslant 320$. Но тогда среди оставшихся чисел есть число < 7, так как, если бы все они были $\geqslant 7$, то их произведение было бы $\geqslant 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ (так как оставшихся чисел как минимум три). Но $7 \cdot 3 < 25$, что противоречит условию о том, что любые два числа отличаются не более чем в 3 раза.

2) Пусть нет числа, в разложении которого на простые множители есть две пятерки, то есть все числа в разложении имеют максимум одну пятерку. Рассмотрим три числа a_i, a_j и a_m, имеющие в разложении одну пятерку: $a_i = 5k, a_j = 5l, a_m = 5p$, где k, l, p – степени двойки. Упорядочим их по возрастанию: пусть a_i – наименьшее среди них, a_m – наибольшее. Тогда $l \geqslant 2k$, а $p \geqslant 2l$, следовательно, $p \geqslant 4k$, что невозможно (тогда a_m более чем в 4 раза больше a_i). Чтд.