

13. а) Решите уравнение $3 \cdot \log_8^2(\sin x) - 5 \cdot \log_8(\sin x) - 2 = 0$.

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC=6$, $BC=3$.

15. Решите неравенство $\frac{3^x+9}{3^x-9} + \frac{3^x-9}{3^x+9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$.

16. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD , если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB=3$.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a - x) \cdot \ln(2x + 2a - 5) = \ln(3a - x) \cdot \ln(x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 2]$.

19. Каждый из 28 студентов или писал одну из двух контрольных работ, или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов оказалось равно S .

а) Приведите пример, когда $S < 15$.

б) Могло ли оказаться, что только два студента писали обе контрольные работы, если $S=13$?

в) Какое наименьшее количество студентов могло писать обе контрольные работы, если $S=13$?