Решения заданий из книги

Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2017.

40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года.

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. О. Иванова,

издательства Легион.

## Решение варианта 2

**21.** $\dfrac{48^{n+5}}{4^{2n+9}\cdot 3^{n+4}} = \dfrac{(16\cdot 3)^{n+5}}{4^{2n+9}\cdot 3^{n+4}} = \dfrac{16^{n+5}\cdot 3^{n+5}}{4^{2n+9}\cdot 3^{n+4}} = \dfrac{(4^2)^{n+5}\cdot 3^{n+5}}{4^{2n+9}\cdot 3^{n+4}} =$
$= 4^{2n+10-(2n+9)}\cdot 3^{n+5-(n+4)} = 4^{2n+10-2n-9}\cdot 3^{n+5-n-4} = 4\cdot 3 = 12.$

*Ответ:* 12.

**22.** Пусть 17%-го раствора взяли $V$ литров, тогда из условия следует, что 35%-го раствора взяли также $V$ литров. В первом растворе объём растворяемого вещества составляет $\dfrac{17}{100}V$, а во втором растворе — $\dfrac{35}{100}V$. Суммарный объём этого вещества равен $\dfrac{17+35}{100}V = 0{,}52V$, а объём получившегося в результате смешивания раствора равен $V+V=2V$. Значит, искомая концентрация равна $\dfrac{0{,}52V}{2V} = 0{,}26 = 26\%$.

*Ответ:* 26.

**23.** Найдём корни уравнения $x^2-10x+9=0$, $x_{1,2} = 5\pm\sqrt{25-9} = 5\pm 4$, $x_1=1$, $x_2=9$. Тогда $x^2-10x+9=(x-1)(x-9)$. Исходная функция примет вид $y=\dfrac{(x-7)(x-1)(x-9)}{x-9} = (x-7)(x-1) = x^2-8x+7 = (x-4)^2-9$ при $x\neq 9$. Построим график функции. Графиком этой функции является парабола $y=(x-4)^2-9$ с выколотой точкой $(9;\ 16)$ и вершиной в точке $(4;\ -9)$ (см. рис. 1). Горизонтальная прямая $y=m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку при $m=-9$ и $m=16$.

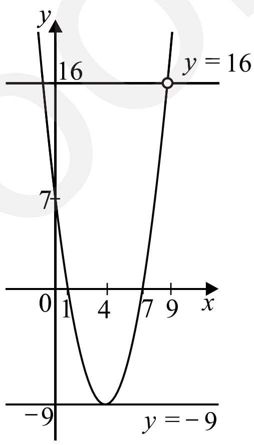


Рис. 1

*Ответ:* $-9$; 16.

**24.** По условию $BM$ — медиана, значит, $AM=MC$, следовательно, $MC=5$ (см. рис. 2). Рассмотрим прямоугольный треугольник $CBM$, в котором $BM$ является гипотенузой. Тогда по теореме Пифагора $BM=\sqrt{CM^2+CB^2}$. $BM=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

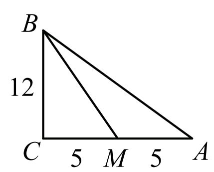


Рис. 2

*Ответ:* 13.

**25.** Воспользуемся вторым признаком подобия треугольников: $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых $AB$ и $CD$ и секущей $AC$, а $AC : AB = DC : AC$, так как $AC : AB = 30 : 12 = 2{,}5$, $DC : AC = 75 : 30 = 2{,}5$ (см. рис. 3). Значит, треугольники $ABC$ и $ACD$ подобны, так как у них есть равные углы и стороны, заключающие эти углы, пропорциональны. Что и требовалось доказать.

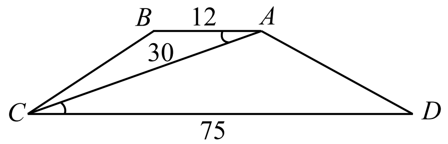


Рис. 3

**26.** В соответствии с условием делаем рисунок 4.

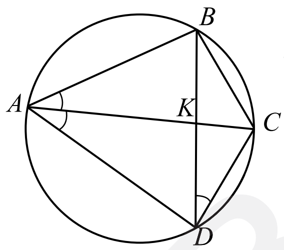


Рис. 4

Из равенства углов $BAC$ и $CAD$ вытекает, что дуга $BC$ равна дуге $CD$, значит, равны и хорды $BC$ и $CD$. Поэтому находим длину хорды $CD$.

Треугольники $ACD$ и $KCD$ подобны. У них угол $ACD$ общий, а угол $CAD$ равен углу $KDC$, так как они опираются на равные дуги.

Из подобия следует, что $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{CD}{KC}$. Значит, $CD^2 = AC \cdot KC$, $CD = \sqrt{AC \cdot KC}$.

$AC = AK + KC = 24 + 3 = 27$, $CD = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$.

*Ответ:* 9.

## Решение варианта 3

**21.** $\dfrac{(2x)^3 \cdot x^{-10}}{x^{-11} \cdot 16x^4} = \dfrac{2^3 \cdot x^3 \cdot x^{-10}}{x^{-11} \cdot 16x^4} = \dfrac{8x^{3-10}}{16x^{-11+4}} = \dfrac{8x^{-7}}{16x^{-7}} = 0{,}5.$

*Ответ:* 0,5.

**22.** Пусть 19%-го раствора взяли $V$ литров, тогда из условия следует, что 79%-го раствора взяли также $V$ литров. В первом растворе объём растворяемого вещества составляет $\dfrac{19}{100}V$, а во втором растворе — $\dfrac{79}{100}V$. Суммарный объём этого вещества равен $\dfrac{19+79}{100}V = 0{,}98V$, а объём получившегося в результате смешивания раствора равен $V + V = 2V$. Значит, искомая концентрация равна $\dfrac{0{,}98V}{2V} = 0{,}49 = 49\%$.

*Ответ:* 49.

**23.** Найдём корни уравнения $x^2+9x+20=0$,
$x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\dfrac{-9\pm 1}{2}$, $x_1=-5$, $x_2=-4$.
Тогда $x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$.

Найдём корни уравнения $x^2-3x+2=0$,
$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-2\cdot 4}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}$, $x_1=1$, $x_2=2$.
Тогда $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

Найдём корни уравнения $x^2+3x-4=0$,
$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 4}}{2}=\dfrac{-3\pm 5}{2}$, $x_1=-4$, $x_2=1$.
Тогда $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$.

Исходная функция примет вид
$y=\dfrac{(x+4)(x+5)(x-1)(x-2)}{(x+4)(x-1)}=(x+5)(x-2)$ при $x\neq -4$; $x\neq 1$.

Графиком функции $y=(x+5)(x-2)=x^2+3x-10$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины расположена посередине между корнями, то есть равна $\dfrac{-5+2}{2}=-\dfrac{3}{2}$. Тогда ордината вершины равна $\left(-\dfrac{3}{2}+5\right)\left(-\dfrac{3}{2}-2\right)=-\dfrac{49}{4}=-12{,}25$. График исходной функции получается из графика функции $y=(x+5)(x-2)$ путём выкалывания точек с абсциссами $x=-4$ и $x=1$. Найдём ординаты выкалываемых точек: $y(-4)=(-4+5)(-4-2)=-6$ и $y(1)=(1+5)(1-2)=-6$. Построим график исходной функции (см. рис. 5).

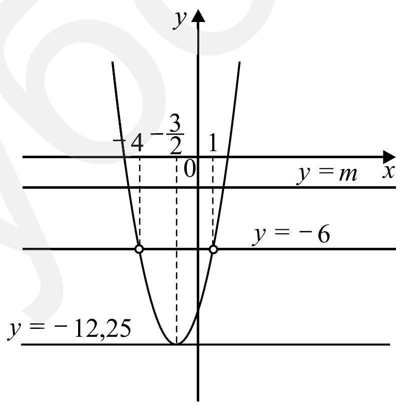


Рис. 5

Горизонтальная прямая $y=m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку при $m=-12{,}25$.

*Ответ:* $-12{,}25$

**24.** По условию $CM$ — медиана, значит, $AM=MB$, следовательно, $MB=24$ (см. рис. 6). Рассмотрим прямоугольный треугольник $CBM$, в котором $CM$ является гипотенузой. По теореме Пифагора $CM=\sqrt{BM^2+CB^2}$. $CM=\sqrt{24^2+7^2}=25$.

*Ответ:* 25.

**25.** Пусть $D$ — середина стороны $MN$, тогда $CK$ и $MD$ равны и параллельны, значит, $CKMD$ — параллелограмм, и отрезок $CD \parallel KM$ (см. рис. 7).

По условию $CM=CN$, то есть треугольник $CMN$ равнобедренный и медиана $CD$ является в нём высотой, $\angle CDM=90^\circ$. $CD\parallel KM\parallel PN$, следовательно,

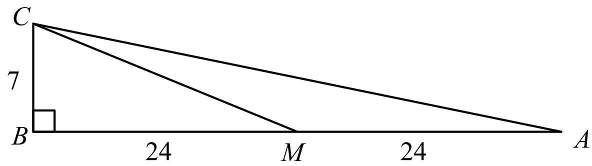


Рис. 6

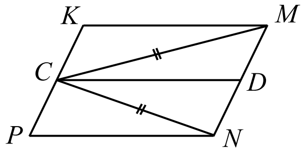


Рис. 7

$\angle PNM = \angle CDM = 90°$. Отсюда, все углы параллелограмма $PKMN$ прямые, следовательно, он является прямоугольником. Что и требовалось доказать.

**26.** Через вершину $B$ меньшего основания трапеции $ABCD$, лежащую на одной диагонали, проведём прямую, параллельную другой диагонали, до пересечения с бóльшим основанием (см. рис. 8). Точку пересечения с бóльшим основанием обозначим через $K$.

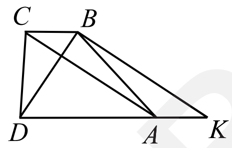


Рис. 8

По условию $DB = 8$ и $CA = 15$. Тогда $BK = CA = 15$ и $AK = BC$. Так как $DK = DA + AK = DA + BC$, то $DK$ является суммой оснований трапеции, которая в два раза больше средней линии трапеции.

Но средняя линия трапеции равна $8,5$, поэтому $DK = 17$. Замечаем, что стороны треугольника $DBK$ равны 8, 15 и 17 и $8^2 + 15^2 = 17^2$, поэтому треугольник $DBK$ — прямоугольный с прямым углом $B$.

Получаем, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, поэтому её площадь равна половине произведения этих диагоналей. $S_{ABCD} = \dfrac{8 \cdot 15}{2} = 60$.

*Ответ:* 60.

## Решение варианта 4

**21.** $\dfrac{(3x)^4 \cdot x^{-7}}{x^{-8} \cdot 27x^5} = \dfrac{3^4 \cdot x^4 \cdot x^{-7}}{x^{-8} \cdot 27x^5} = \dfrac{81x^{4-7}}{27x^{-8+5}} = \dfrac{81x^{-3}}{27x^{-3}} = 3.$

*Ответ:* 3.

**22.** Пусть 1%-го раствора взяли $V$ литров, тогда из условия следует, что 23%-го раствора взяли также $V$ литров. В первом растворе объём растворяемого вещества составляет $\dfrac{1}{100}V$, а во втором растворе — $\dfrac{23}{100}V$. Суммарный объём этого вещества равен $\dfrac{1+23}{100}V = 0{,}24V$, а объём получившегося в результате смешивания раствора равен $V + V = 2V$. Значит, искомая концентрация равна $\dfrac{0{,}24V}{2V} = 0{,}12 = 12\%$.

*Ответ:* 12.

**23.** Заметим, что $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 10x + 21 = 0$, $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 21} = 5 \pm 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 7$. Тогда $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$,
$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Тогда $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Отсюда исходная функция примет вид
$y = \dfrac{(x-2)(x+2)(x-3)(x-7)}{(x-2)(x-3)} = (x+2)(x-7)$ при $x \neq 2;\ x \neq 3$.

Графиком функции $y = (x+2)(x-7) = x^2 - 5x - 14$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины расположена посередине между корнями, то есть равна $\dfrac{-2+7}{2} = \dfrac{5}{2}$. Тогда ордината вершины равна $\left(\dfrac{5}{2} + 2\right)\left(\dfrac{5}{2} - 7\right) = -\dfrac{81}{4} = -20{,}25$. График исходной функции получается из графика функции $y = (x+2)(x-7)$ путём выкалывания точек с абсциссами $x = 2$ и $x = 3$. Найдём ординаты выкалываемых точек: $y(2) = (2+2)(2-7) = -20$ и $y(3) = (3+2)(3-7) = -20$. Построим график исходной функции (см. рис. 9).

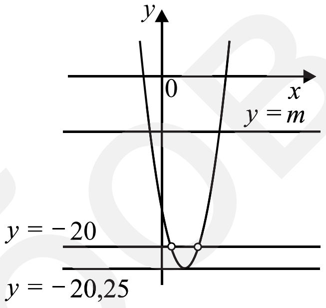


Рис. 9

Горизонтальная прямая $y = m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку при $m = -20{,}25$.

*Ответ:* $-20{,}25$

**24.** По условию $AM$ — медиана, значит, $BM = MC$, следовательно, $MC = 7$ (см. рис. 10). Рассмотрим прямоугольный треугольник $CAM$, в котором $AM$ является гипотенузой. Тогда по теореме Пифагора $AM = \sqrt{CM^2 + CA^2}$. $AM = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$.

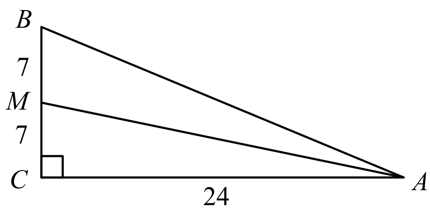


Рис. 10

*Ответ:* 25.

**25.** Пусть $K$ — середина стороны $AB$, тогда $CS$ и $BK$ равны и параллельны, значит, $CBKS$ — параллелограмм и тогда $CB \parallel SK$ (см. рис. 11).

По условию $SA = SB$, то есть треугольник $ASB$ равнобедренный и медиана $SK$ является в нём высотой, $\angle SKB = 90°$. $CB \parallel SK \parallel RA$, следовательно, $\angle RAB = \angle SKB = 90°$.

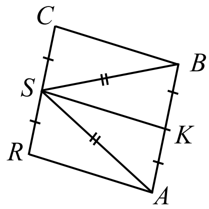

Рис. 11

Отсюда все углы ромба $ABCR$ прямые, следовательно, он является квадратом. Что и требовалось доказать.

**26.** Через вершину $B$ меньшего основания трапеции $ABCD$, лежащую на одной диагонали, проведём прямую, параллельную другой диагонали, до пересечения с бо́льшим основанием (см. рис. 12). Точку пересечения с бо́льшим основанием обозначим через $K$.

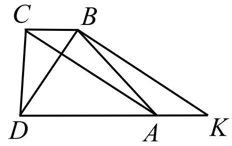

Рис. 12

Пусть в соответствии с условием $DB = 10$ и $CA = 24$. Тогда $BK = CA = 24$ и $AK = BC$. Так как $DK = DA + AK = DA + BC$, то $DK$ является суммой оснований трапеции, которая в два раза больше средней линии трапеции.

Но средняя линия трапеции равна 13, поэтому $DK = 26$. Замечаем, что стороны треугольника $DBK$ равны 10, 24, 26 и $10^2 + 24^2 = 26^2$, поэтому треугольник $DBK$ — прямоугольный с прямым углом $B$.

Получаем, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, поэтому её площадь равна половине произведения этих диагоналей. $S_{ABCD} = \dfrac{10 \cdot 24}{2} = 120$.

*Ответ:* 120.

## Решение варианта 6

**21.** $\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{7}{x} + 2 = 0$, $x \neq 0$.

$2x^2 - 7x + 5 = 0.$

$a = 2$, $b = -7$, $c = 5$.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9$, $\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$.

$x = \dfrac{7 \pm 3}{2 \cdot 2}$, $x_1 = \dfrac{7+3}{4} = 2{,}5$, $x_2 = \dfrac{7-3}{4} = 1$.

$x = 1$ и $x = 2{,}5$ удовлетворяют условию $x \neq 0$, следовательно, числа 1 и 2,5 — корни исходного уравнения.

*Ответ:* 1; 2,5.

**22.** За первые 2 часа автомобиль проехал $2 \cdot 90 = 180$ (км). За следующие 3 часа — $3 \cdot 65 = 195$ (км). За последний час было преодолено 45 км. Всего автомобиль был в пути

$2+3+1=6$ (часов) и проехал $180+195+45=420$ (км). Таким образом, средняя скорость равна $\dfrac{420}{6}=70$ (км/ч).

*Ответ:* 70 км/ч.

**23.** Заметим, что при $x \neq 0$, $x \neq 5$ $y=-2-\dfrac{x-5}{x^2-5x}=-2-\dfrac{x-5}{x(x-5)}=$

$=-2-\dfrac{1}{x}$. Таким образом, график исходной функции получается из графика функции $y=-2-\dfrac{1}{x}$ выкалыванием точки с абсциссой $x=5$, то есть точки $(5;\ -2{,}2)$. График функции $y=-2-\dfrac{1}{x}$ — это гипербола $y=-\dfrac{1}{x}$, смещённая на 2 единицы вниз. Построим искомый график (см. рис. 13) и определим, что горизонтальная прямая $y=m$ не имеет с ним ни одной общей точки при $m=-2$ и $m=-2{,}2$.

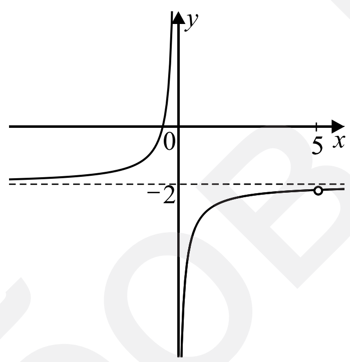


Рис. 13

*Ответ:* $-2$; $-2{,}2$.

**24.** $\triangle AMB \sim \triangle CMD$ по двум углам (см. рис. 14). Действительно, выполняется $\angle BAM=\angle CDM$ как накрест лежащие при $AB||CD$ и секущей $AD$; $\angle ABC=\angle BCD$ как накрест лежащие при $AB||CD$ и секущей $BC$.

Тогда $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{MD}{AM}$ или $\dfrac{51}{AB}=\dfrac{34}{68}$, откуда $AB=102$.

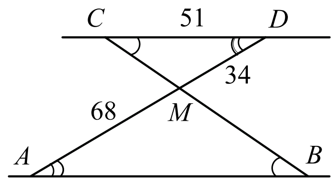


Рис. 14

*Ответ:* 102.

**25.** В прямоугольнике $BCNM$ стороны $BM \parallel CN$ (см. рис. 15). Рассмотрим секущие $CA$ и $NA$. Накрест лежащие углы равны, то есть $\angle 2=\angle 3$ и $\angle 4=\angle 6$. $CA$ и $NA$ — биссектрисы углов $C$ и $N$, значит, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 4=\angle 5$.

Получаем $\angle 1=\angle 3$ и $\angle 5=\angle 6$, поэтому треугольники $CBA$ и $AMN$ равнобедренные, при этом $CB=BA$ и $AM=MN$. Но $CB=MN$ как противоположные стороны прямоугольника, значит, $BA=MA$, то есть $A$ — середина $BM$.

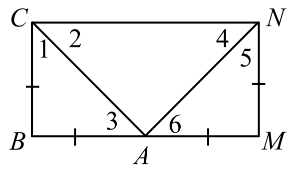


Рис. 15

**26.** По условию $AD$ является хордой окружности, проходящей через её центр, значит, $AD$ является диаметром этой окружности. Рассмотрим рисунок 16.

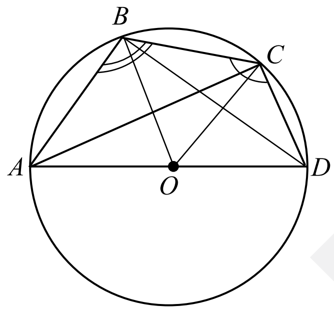


Рис. 16

Так как вписанный угол $BCD$ равен $125°$, то градусная мера дуги $BAD$ равна $250°$, а градусная мера дуги $AB$ получается вычитанием $180°$ от градусной меры дуги $BAD$. Поэтому градусная мера дуги $AB$ равна $70°$.

Аналогично, градусная мера дуги $CD$ равна $50°$. Следовательно, градусная мера дуги $BC$ равна $180° - 70° - 50° = 60°$.

Треугольник $BOC$ является равнобедренным, и угол $BOC = 60°$, так как он центральный угол в окружности и опирается на дугу в $60°$. Значит, треугольник $BOC$ равносторонний и $BO = BC = 8$. Но $AO = BO$.

Следовательно, $AD = 2AO = 2BC = 16$.

*Ответ:* 16.

## Решение варианта 7

**21.** $\dfrac{6}{x^2-4} + \dfrac{3}{x+2} + 1 = 0$, $x^2 - 4 \neq 0$.
$x^2 - 4 + 3(x-2) + 6 = 0$,
$x^2 - 4 + 3x - 6 + 6 = 0$,
$x^2 + 3x - 4 = 0$.

$a = 1, b = 3, c = -4.$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$, $\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$.

$x = \dfrac{-3 \pm 5}{2 \cdot 1}$, $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$, $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.

При $x = -4$ и $x = 1$ значение выражения $x^2 - 4$ отличается от нуля, следовательно, числа $-4$ и $1$ — корни исходного уравнения.

*Ответ:* $-4$; $1$.

**22.** Первые 300 км автомобиль преодолел за $\frac{300}{60} = 5$ (часов), следующие 150 км — за $\frac{150}{50} = 3$ (часа), последние 140 км — за $\frac{140}{70} = 2$ (часа). Таким образом автомобиль был в пути $5 + 3 + 2 = 10$ (часов) и проехал $300 + 150 + 140 = 590$ (км). Следовательно, его средняя скорость равна $\frac{590}{10} = 59$ км/ч.

*Ответ:* 59 (км/ч).

**23.** Заметим, что при $x \neq 0$, $x \neq -5$
$y = 4 + \frac{2x+10}{x^2+5x} = 4 + \frac{2(x+5)}{x(x+5)} = 4 + \frac{2}{x}$. Таким образом, график исходной функции получается из графика функции $y = 4 + \frac{2}{x}$ выкалыванием точки с абсциссой $x = -5$, то есть точки $(-5;\ 3{,}6)$. График функции $y = 4 + \frac{2}{x}$ — это гипербола $y = \frac{2}{x}$, смещённая на 4 единицы вверх. Построим искомый график (см. рис. 17) и определим, что горизонтальная прямая $y = m$ не имеет с ним ни одной общей точки при $m = 3{,}6$ и $m = 4$.

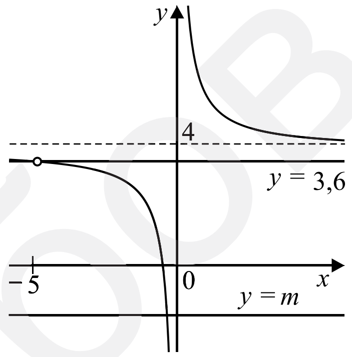


Рис. 17

При остальных значениях $m$ общая точка будет единственной. Искомые значения $m$ принадлежат множеству $(-\infty;\ 3{,}6) \cup (3{,}6;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

*Ответ:* $(-\infty;\ 3{,}6) \cup (3{,}6;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

**24.** Пусть $MB = x$, тогда $DM = 72 - x$ (см. рис. 18).
$\triangle AMB \sim \triangle CMD$ по двум углам. Действительно, $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие при $AB||CD$ и секущей $AC$; $\angle ABD = \angle BDC$ как накрест лежащие при $AB||CD$ и секущей $BD$. Тогда $\frac{CD}{AB} = \frac{MD}{MB}$, $\frac{75}{15} = \frac{72-x}{x}$,

$\frac{5}{1} = \frac{72-x}{x}$, $72 - x = 5x$, $6x = 72$, $x = 12$. Итак, $MB = 12$.

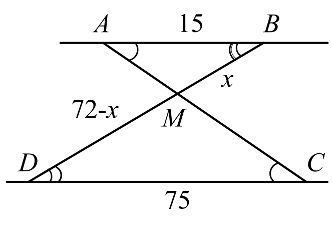


Рис. 18

*Ответ:* 12.

**25.** По условию $CE : BE = 2 : 3$, значит, $BE = 1{,}5EC$, $BC = 2{,}5EC$. В параллелограмме $ABCD$ противоположные стороны равны и параллельны, поэтому $AD = BC = 2{,}5EC$, $AB = CD$, $BC||AD$.

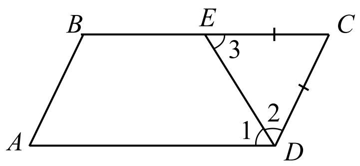


Рис. 19

Рассмотрим секущую $DE$. Накрест лежащие углы равны, то есть $\angle 1 = \angle 3$. $DE$ — биссектриса угла $D$, значит, $\angle 1 = \angle 2$. Получаем $\angle 2 = \angle 3$, поэтому треугольник $CDE$ равнобедренный, при этом $DC = EC$. Но $DC = AB$, значит, $DC + AB = 2AB$. Также $AD = BC = 2{,}5EC = 2{,}5AB$, значит, $AD + BC = 2 \cdot 2{,}5AB = 5AB$ и периметр параллелограмма $ABCD$ равен $7AB$.

**26.** Рассмотрим рисунок 20, на котором основание $H$ высоты, опущенной из вершины $B$ на прямую $AC$, лежит вне отрезка $AC$.

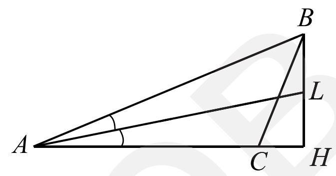


Рис. 20

Пусть $AL$ — биссектриса угла $A$. По свойству биссектрисы $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BL}{LH} = \dfrac{13}{12}$, поэтому

$AB = \dfrac{13}{12}AH$.

По теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AH^2$, $BH^2 = \left(\dfrac{13}{12}AH\right)^2 - AH^2 =$

$= \dfrac{169AH^2 - 144AH^2}{144} = \dfrac{25AH^2}{144}$.

Тогда $BH = \dfrac{5}{12}AH$ и $\sin\angle A = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\dfrac{5}{12}AH}{\dfrac{13}{12}AH} = \dfrac{5}{13}$.

По теореме синусов $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle A}$, где $R$ — радиус окружности, описанной около треугольника.

$R = \dfrac{BC}{2\sin\angle A} = \dfrac{15}{2 \cdot \dfrac{5}{13}} = \dfrac{15 \cdot 13}{2 \cdot 5} = 19{,}5$.

*Ответ:* 19,5.

Замечание. Решение задачи не изменяется, если вершина $B$ проектируется на сторону $AC$ или в точку $C$.

## Решение варианта 8

**21.** $2 - \dfrac{12}{x^2-9} - \dfrac{2}{x+3} = 0$, $x^2 - 9 \neq 0$.
$2(x^2-9) - 12 - 2(x-3) = 0$,
$2x^2 - 18 - 12 - 2x + 6 = 0$,
$2x^2 - 2x - 24 = 0$,
$x^2 - x - 12 = 0$.

По формулам Виета, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -12$. Получим $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

При $x = -3$ $x^2 - 9 = 0$, следовательно, число $-3$ не является корнем исходного уравнения.

При $x = 4$ $x^2 - 9 \neq 0$, следовательно, число 4 — корень исходного уравнения.

*Ответ:* 4.

**22.** Первые 90 км автомобиль преодолел за $\dfrac{90}{45} = 2$ (часа), следующие 320 км — за $\dfrac{320}{80} = 4$ (часа), последние 150 км — за $\dfrac{150}{75} = 2$ (часа). Таким образом, автомобиль был в пути $2+4+2 = 8$ (часов) и проехал $90+320+150 = 560$ (км). Следовательно, его средняя скорость равна $\dfrac{560}{8} = 70$ км/ч.

*Ответ:* 70 (км/ч).

**23.** Заметим, что при $x \neq 0$, $x \neq -1$ $y = -3 + \dfrac{(4x+4)}{x^2+x} = -3 + \dfrac{4(x+1)}{x(x+1)} =$
$= -3 + \dfrac{4}{x}$. Таким образом, график исходной функции получается из графика функции $y = -3 + \dfrac{4}{x}$ выкалыванием точки с абсциссой $x = -1$, то есть точки $(-1;\ -7)$. График функции $y = -3 + \dfrac{4}{x}$ — это гипербола $y = \dfrac{4}{x}$, смещённая на 3 единицы вниз. Построим искомый график (см. рис. 21) и определим, что горизонтальная прямая $y = m$ не имеет с ним ни одной общей точки при $m = -7$ и $m = -3$.

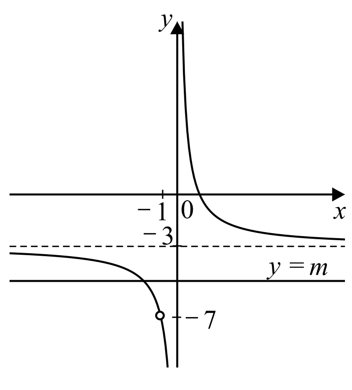


Рис. 21

При остальных значениях $m$ общая точка будет единственной. Искомые значения $m$ принадлежат множеству $(-\infty;\ -7) \cup (-7;\ -3) \cup (-3;\ +\infty)$.

**24.** Пусть $MB = x$, тогда $DM = 21 - x$ (см. рис. 22).
$\triangle AMB \sim \triangle CMD$ по двум углам. Действительно, $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие при $AB||CD$ и секущей $AC$; $\angle ABD = \angle BDC$ как накрест лежащие при $AB||CD$ и секущей $BD$. Тогда $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{MD}{MB}$, $\dfrac{42}{56} = \dfrac{21-x}{x}$,

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{21-x}{x}$, $84 - 4x = 3x$, $7x = 84$, $x = 12$. Итак, $MB = 12$.

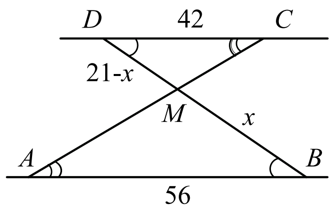


Рис. 22

*Ответ*: 12.

**25.** По условию $LA : AM = 1 : 2$, значит, $AM = 2AL$, $LM = 3AL$. В параллелограмме $KLMN$ противоположные стороны равны и параллельны, поэтому $ML = KN = 3AL$, $KL = MN$, $ML||KN$.

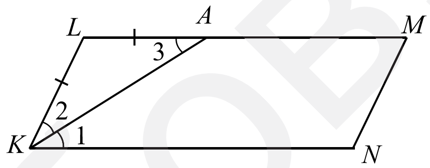


Рис. 23

Рассмотрим секущую $KA$. Накрест лежащие углы равны, то есть $\angle 1 = \angle 3$. $KA$ — биссектриса угла $K$, значит, $\angle 1 = \angle 2$. Получаем $\angle 2 = \angle 3$, поэтому треугольник $KLA$ равнобедренный, при этом $LK = LA$. Но $LK = MN$, значит, $KL + MN = 2LK$. Также $ML = KN = 3AL = 3LK$, значит, $LM + KN = 6LK$ и периметр параллелограмма $KLMN$ равен $8LK$.

**26.** Рассмотрим рисунок 24, на котором основание $H$ высоты, опущенной из вершины $B$ на прямую $AC$, лежит вне отрезка $AC$.

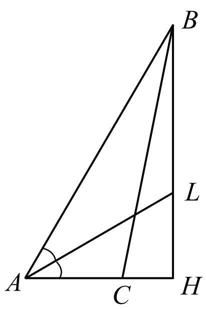


Рис. 24

Пусть $AL$ — биссектриса угла $A$. По свойству биссектрисы $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BL}{LH} = \dfrac{13}{5}$, поэтому

$AB = \dfrac{13}{5}AH$.

По теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AH^2$, $BH^2 = \left(\frac{13}{5}AH\right)^2 - AH^2 =$

$= \dfrac{169AH^2 - 25AH^2}{25} = \dfrac{144AH^2}{25}$.

Тогда $BH = \dfrac{12}{5}AH$ и $\sin\angle A = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\frac{12}{5}AH}{\frac{13}{5}AH} = \dfrac{12}{13}$.

По теореме синусов $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle A}$, где $R$ — радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

$R = \dfrac{BC}{2\sin\angle A} = \dfrac{10}{2\cdot\frac{12}{13}} = \dfrac{10\cdot 13}{2\cdot 12} = \dfrac{65}{12}$.

*Ответ:* $\dfrac{65}{12}$.

Замечание. Решение задачи не изменяется, если вершина $B$ проектируется на сторону $AC$ или в точку $C$.

## Решение варианта 10

**21.** $x(x^2 + 16x + 64) = 9(x + 8)$,
$x(x + 8)^2 - 9(x + 8) = 0$,
$(x + 8)(x(x + 8) - 9) = 0$.
1) $x + 8 = 0$, $x_1 = -8$.
2) $x(x + 8) - 9 = 0$,
$x^2 + 8x - 9 = 0$,
$p = 8$, $q = -9$,
$x = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$,
$x = -4 \pm \sqrt{16 + 9} = 4 \pm 5$,
$x_2 = -4 - 5 = -9$,
$x_3 = -4 + 5 = 1$.
*Ответ:* $-9$; $-8$; $1$.

**22.** Пусть скорость второго велосипедиста равна $x$ км/ч ($x > 0$), тогда скорость первого — $(x + 2)$ км/ч. Тогда первый велосипедист 180 км преодолеет за $\dfrac{180}{x+2}$ часов, а второй — за $\dfrac{180}{x}$ часов. Из условия задачи составим и решим уравнение $\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{x+2} = 3$, домножим обе части на $x(x + 2) \neq 0$ и разделим на 3, получим $60x + 120 - 60x = x(x + 2)$, $x^2 + 2x - 120 = 0$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (-120)} = -1 \pm 11$, $x_1 = -12$, $x_2 = 10$. Должно выполняться неравенство $x > 0$, поэтому $x = 10$ (км/ч).
*Ответ:* 10.

**23.** Заметим, что графиком функции $y = x^2 - 6x$ является парабола с вершиной в точке $(x_0,\ y_0)$, где $x_0 = -\dfrac{-6}{2} = 3$ и $y_0 = x_0^2 - 6x_0 = -9$, ветви параболы направлены вверх, при $x = 1$ значение выражения $x^2 - 6x$ равно $-5$.

Графиком функции $y = 2x + 3$ является прямая, при $x = 1$ значение выражения $2x + 3$ равно 5. Изобразим график кусочно заданной функции (см. рис. 25).

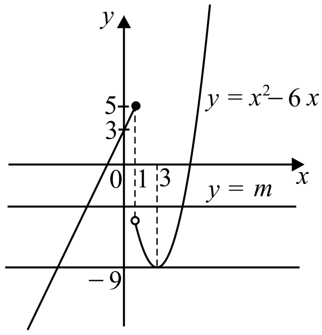


Рис. 25

Горизонтальная прямая $y = m$ будет иметь с кусочно заданным графиком ровно две общие точки при $m = -9$ и $-5 \leqslant m \leqslant 5$.

*Ответ:* $\{-9\} \cup [-5;\ 5]$

**24.** Пусть $O$ — центр вписанной окружности, $r$ — её радиус (см. рис. 26). $D$, $L$, $K$ — точки касания окружности со сторонами $AC, AB$ и $BC$ соответственно. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CDOK$ — квадрат со стороной, равной $r$. $AD = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, аналогично $BK = BL$. Катет $CB$ найдём по теореме Пифагора: $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2}$.
$CB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
$AD = 12 - r, BK = 5 - r, AB = AL + LB = (12 - r) + (5 - r) = 17 - 2r$. По условию $AB = 13$, следовательно, $13 = 17 - 2r$, откуда $r = 2$.

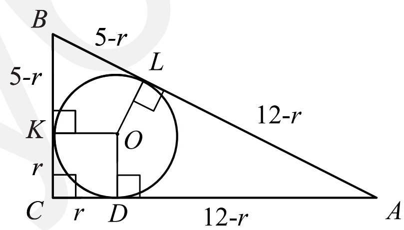


Рис. 26

*Ответ:* 2.

**25.** Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам, поэтому $AO = OC$. $\angle EAO = \angle FCO$ как накрест лежащие при $AD||BC$ и секущей $AC$, а $\angle EOA = \angle FOC$ как вертикальные. Значит, треугольники $AEO$ и $CFO$ равны по стороне и прилежащим к ней углам, тогда $AE = CF$.

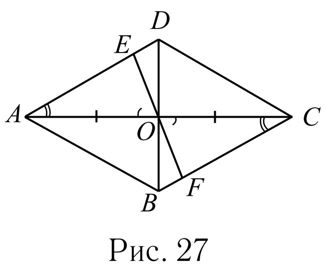


Рис. 27

**26.** Пусть $x$ и $y$ — катеты прямоугольного треугольника. Тогда по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 6^2$ и по формуле площади треугольника $\frac{1}{2}x \cdot y = 9$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x \cdot y = 18. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ 2x \cdot y = 36. \end{cases}$

Прибавляя ко второму уравнению первое, получим $(x + y)^2 = 72$. Отсюда, так как $x$ и $y$ — неотрицательны, получаем, что $x + y = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, $y = 6\sqrt{2} - x$. Подставляя $6\sqrt{2} - x$ вместо $y$ во второе уравнение системы, получаем: $x \cdot (6\sqrt{2} - x) = 18$; $x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = 0$;

$x_{1,2} = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 18} = 3\sqrt{2}$.

Квадратное уравнение $x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = 0$ имеет единственный корень: $x = 3\sqrt{2}$. Тогда $y = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Полученная пара чисел $(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ будет решением системы.

Отсюда следует, что катеты прямоугольного треугольника равны, значит он равнобедренный, поэтому острые углы равны и в сумме составляют 90°.

Это означает, что каждый из этих углов равен 45°.

*Ответ:* 45; 45.

## Решение варианта 11

**21.** $4x(16 - 8x + x^2) = 7(4 - x)$,
$4x(4 - x)^2 - 7(4 - x) = 0$,
$(4 - x)(4x(4 - x) - 7) = 0$.
1) $4 - x = 0$, $x_1 = 4$.
2) $16x - 4x^2 - 7 = 0$,
$4x^2 - 16x + 7 = 0$,
$a = 4$, $b = -16$, $c = 7$.

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

$$\frac{D}{4} = \left(-\frac{16}{2}\right)^2 - 4 \cdot 7 = 64 - 28 = 36,$$

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{36} = 6.$$

$$x = \frac{8 \pm 6}{4}, \ x_2 = \frac{8 + 6}{4} = 3{,}5, \ x_3 = \frac{8 - 6}{4} = 0{,}5.$$

*Ответ:* 0,5; 3,5; 4.

**22.** Пусть второй автомобиль едет со скоростью $v$ км/ч ($v > 0$), тогда первый едет со скоростью $(v + 12)$ км/ч. Второй автомобиль проехал 540 км за $\frac{540}{v}$ ч, а первый — за $\frac{540}{v + 12}$ ч.

По условию должно выполняться равенство $\frac{540}{v} - \frac{540}{v + 12} = 1{,}5$, $\frac{540(v + 12) - 540v}{v(v + 12)} = 1{,}5$; $540 \cdot 12 = 1{,}5v(v + 12)$; $v^2 + 12v - 4320 = 0$, $v_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 + 4320} = -6 \pm 66$. Должно выполняться неравенство $v > 0$, поэтому $v = 60$. Скорость первого автомобиля равна $v + 12 = 72$ км/ч.

*Ответ:* 72 км/ч.

**23.** Заметим, что графиком функции $y = -x^2 + 4x$ является парабола с вершиной в точке $(x_0,\ y_0)$, где $x_0 = -\dfrac{4}{-2} = 2$ и $y_0 = -x_0^2 + 4x_0 = 4$, ветви параболы направлены вниз, при $x = -1$ значение выражения $-x^2 + 4x$ равно $-5$.

Графиком функции $y = -x+8$ является прямая, при $x = -1$ значение выражения $-x+8$ равно 9. Изобразим график кусочно заданной функции (см. рис. 28).

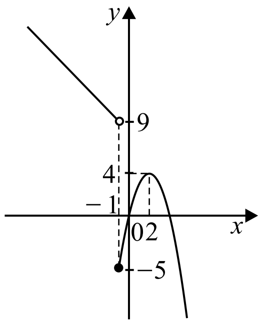


Рис. 28

Горизонтальная прямая $y = m$ будет иметь с кусочно заданным графиком ровно две общие точки при $-5 \leqslant m < 4$.

*Ответ:* $[-5;\ 4)$.

**24.** Пусть $O$ — центр вписанной окружности, $r$ — её радиус (см. рис. 29). $D$, $L$, $K$ — точки касания окружности со сторонами $AC$, $AB$ и $BC$ соответственно. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CDOK$ — квадрат со стороной, равной $r$. $AD = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, аналогично $BK = BL$. Гипотенузу $AB$ найдём по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$. $CB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$. $AD = 16 - r, BK = 12 - r$, $AB = AL + LB = (16 - r) + (12 - r) = 28 - 2r$. $AB = 20$, следовательно, $20 = 28 - 2r$, откуда $r = 4$.

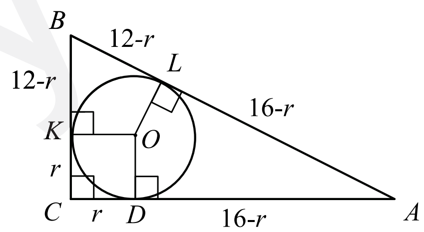


Рис. 29

*Ответ:* 4.

**25.** Противоположные стороны параллелограмма равны, значит, $AB = CD$ и $BC = AD$. $BP = \dfrac{1}{2}BC$, $MD = \dfrac{1}{2}AD$.

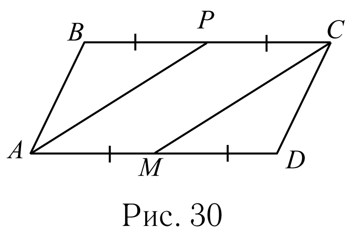


Рис. 30

Противоположные углы параллелограмма равны, значит, $\angle B = \angle D$.

$\triangle ABP = \triangle CDM$: $\angle ABP = \angle CDM$, $AB = CD$, $BP = MD$. Значит, $AP = CM$, так как они лежат против равных углов в равных треугольниках.

**26.** В соответствии с условием рассмотрим рисунок 31.

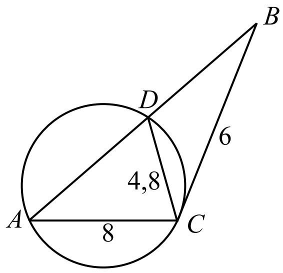


Рис. 31

Угол $BCD$ между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключённой между ними. Точно так же и вписанный угол $DAC$ измеряется половиной этой же дуги. Значит, $\angle DAC = \angle DCB$.

$\triangle BCD \sim \triangle BAC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle BAC = \angle BCD$), тогда $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DC}{AC}$; $\dfrac{BD}{6} = \dfrac{4{,}8}{8}$; $BD = 0{,}6 \cdot 6 = 3{,}6$.

По свойству касательной и секущей получаем $BC^2 = BA \cdot BD$; $6^2 = (AD + 3{,}6) \cdot 3{,}6$; $36 = (AD + 3{,}6) \cdot 3{,}6$; $10 = AD + 3{,}6$; $AD = 6{,}4$.

*Ответ:* 6,4.

## Решение варианта 12

**21.** $8x(4 - 4x + x^2) = 3{,}5(2 - x)$,
$8x(2 - x)^2 - 3{,}5(2 - x) = 0$,
$(2 - x)(8x(2 - x) - 3{,}5) = 0$.
1) $2 - x = 0$, $x_1 = 2$.
2) $8x(2 - x) - 3{,}5 = 0$,
$8x^2 - 16x + 3{,}5 = 0$,
$a = 8$, $b = -16$, $c = 3{,}5$.

$x = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$, где $\dfrac{D}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac$.

$\dfrac{D}{4} = \left(-\dfrac{16}{2}\right)^2 - 8 \cdot 3{,}5 = 64 - 28 = 36$,

$\sqrt{\dfrac{D}{4}} = \sqrt{36} = 6$.

$x = \dfrac{8 \pm 6}{8}$, $x_2 = \dfrac{8 + 6}{8} = 1{,}75$, $x_3 = \dfrac{8 - 6}{8} = 0{,}25$.

*Ответ:* 0,25; 1,75; 2.

**22.** Пусть второй едет со скоростью $v$ км/ч ($v > 0$), тогда первый едет со скоростью $(v + 5)$ км/ч. Первый автомобиль проехал 1200 км за $\dfrac{1200}{v+5}$ ч, а второй — за $\dfrac{1200}{v}$ ч. По условию должно выполняться равенство $\frac{1200}{v} - \frac{1200}{v+5} = 1$, $\frac{1200(v+5) - 1200v}{v(v+5)} = 1$; $1200 \cdot 5 = v(v+5)$; $v^2 + 5v - 6000 = 0$, $v_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24000}}{2} = \frac{-5 \pm 155}{2}$. Должно выполняться неравенство $v > 0$, поэтому $v = 75$. Скорость первого автомобиля равна $v + 5 = 80$ км/ч.

*Ответ:* 80 км/ч.

**23.** Заметим, что графиком функции $y = 2x - x^2$ является парабола с вершиной в точке $(x_0,\ y_0)$, где $x_0 = -\frac{2}{-2} = 1$ и $y_0 = -x_0^2 + 2x_0 = 1$, ветви параболы направлены вниз, при $x = -2$ значение выражения $-x^2 + 2x$ равно $-8$.

Графиком функции $y = -x - 11$ является прямая, при $x = -2$ значение выражения $-x - 11$ равно $-9$. Изобразим график кусочно заданной функции (см. рис. 32).

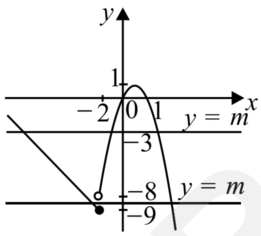


Рис. 32

Горизонтальная прямая $y = m$ будет иметь с кусочно заданным графиком ровно две общие точки при $m = 1$ и $-9 \leqslant m \leqslant -8$.

*Ответ:* $[-9;\ -8] \cup \{1\}$

**24.** Пусть $O$ — центр вписанной окружности (см. рис. 33), $r$ — её радиус. $D, L, K$ — точки касания окружности со сторонами $AC, AB$ и $BC$ соответственно. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CDOK$ — квадрат со стороной, равной $r$. $AD = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, аналогично $BK = BL$. Гипотенузу $AB$ найдём по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$. $CB = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$. $AD = 24-r$, $BK = 7-r$, $AB = AL+LB = (24-r)+(7-r) = 31-2r$. $AB = 25$, следовательно, $25 = 31 - 2r$, откуда $r = 3$.

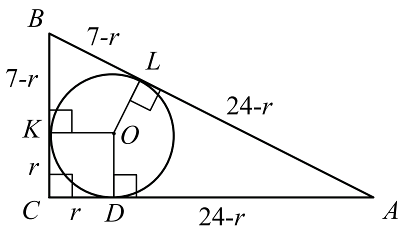


Рис. 33

*Ответ:* 3.

**25.** Докажем, что треугольники $ADK$ и $ABP$ равны.

$\triangle ADK = \triangle ABP$ по 1-му признаку равенства треугольников, $AD = AB$ как стороны ромба, $\angle B = \angle D$ как противоположные углы ромба, $BP = KD$ по условию. Значит, и стороны $AP$ и $AK$ равны, так как они лежат против равных углов в равных треугольниках.

**26.** В соответствии с условием рассмотрим рисунок 35.

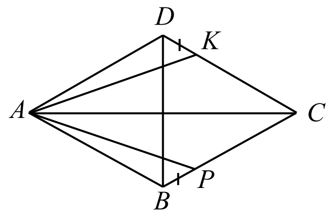


Рис. 34

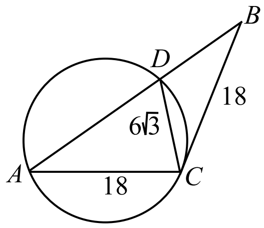


Рис. 35

Угол $BCD$ между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключённой между ними. Точно так же и вписанный угол $DAC$ измеряется половиной этой же дуги. Значит, $\angle DAC = \angle DCB$.

Пусть $\angle DAC = \alpha$, $AD = x$ и $BD = y$.

Тогда $\dfrac{1}{2} \cdot (x+y) \cdot 18 \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = S_{ABC} = S_{ADC} + S_{DCB} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot x \cdot \sin\alpha + \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin\alpha$.

Отсюда следует, что $18(x+y) = 18x + 18 \cdot 6\sqrt{3}$, $x + y = x + 6\sqrt{3}$, $y = 6\sqrt{3}$.

По свойству касательной и секущей получаем: $BC^2 = BA \cdot BD$; $18^2 = (x+y) \cdot y$, $324 = (x + 6\sqrt{3}) \cdot 6\sqrt{3}$; $324 = 6\sqrt{3}x + 108$, $216 = 6\sqrt{3} \cdot x$, $x = \dfrac{216}{6\sqrt{3}} = \dfrac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$.

*Ответ:* $12\sqrt{3}$.

## Решение варианта 14

**21.** $(x-7)^3 = 36(x-7)$,
$(x-7)^3 - 36(x-7) = 0$,
$(x-7)((x-7)^2 - 36) = 0$.

$x - 7 = 0$ или $(x-7)^2 - 36 = 0$,
$x_1 = 7$, $(x-7)^2 = 36$,
$x - 7 = 6$ или $x - 7 = -6$,
$x_2 = 13$ или $x_3 = 1$.

*Ответ:* 1; 7; 13.

**22.** Будем считать, что фрукты состоят из воды и «сухого вещества», масса которого не изменяется в процессе высушивания. В высушенных фруктах $100\% - 8\% = 92\%$ «сухого вещества», то есть $0{,}92 \cdot 20 = 18{,}4$ (кг). В свежих фруктах «сухого вещества» столько же, при этом оно составляет $100\% - 90\% = 10\%$ от общей массы.

Составим пропорцию.

$10\%$ — 18,4 кг
$100\%$ — $x$ кг.

Отсюда $x = \dfrac{18{,}4 \cdot 100\%}{10\%} = 184\,(\text{кг})$.

*Ответ:* 184 кг.

**23.** Прямая $y = 2kx$ имеет с параболой $y = x^2 + 4$ единственную общую точку, когда уравнение $x^2 + 4 = 2kx$ имеет единственное решение. В этом случае дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2kx + 4$ должен равняться 0, то есть $(2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, $4k^2 = 16$, $k = -2$ и $k = 2$.

Построим параболу, заданную формулой $y = x^2 + 4$ (это график функции $y = x^2$, смещённый на 4 единицы вверх) (см. рис. 36), а также прямые $y = -4x$ и $y = 4x$.

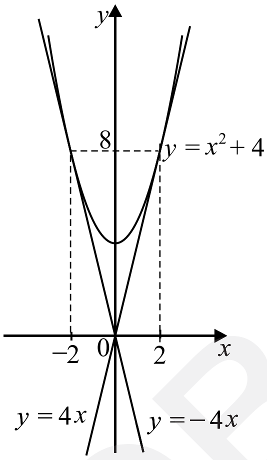


Рис. 36

*Ответ:* $-2;\ 2$

**24.** $\triangle ABH \sim \triangle ABC$ по двум углам. Действительно,
$\angle AHB = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC$ — общий. Тогда $AH : AB = AB : AC$, откуда $AC = \dfrac{AB^2}{AH}$.

$AC = \dfrac{25}{4} = 6{,}25$.

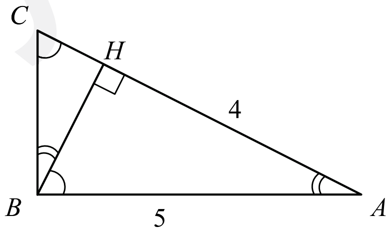


Рис. 37

*Ответ:* 6,25.

**25.** Опустим из точки $P$ перпендикуляры $PF$, $PK$, $PE$ на прямые $AB$, $BC$ и $AD$ соответственно.

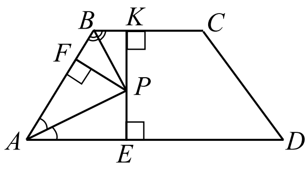


Рис. 38

Рассмотрим прямоугольные треугольники $AEP$ и $AFP$. $\angle FAP = \angle EAP$ ($AP$ — биссектриса), гипотенуза $AP$ — общая. Треугольники равны по гипотенузе и острому углу, и $PE = PF$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $FBP$ и $PBK$. $\angle FBP = \angle PBK$ ($BP$ — биссектриса), гипотенуза $BP$ — общая. Треугольники равны по гипотенузе и острому углу, и $FP = PK$.
Получили $PK = PF = PE$, то есть точка $P$ равноудалена от прямых $AB$, $BC$ и $AD$.

Замечание. При решении этой задачи можно воспользоваться теоремой: «любая точка биссектрисы угла равноудалена от его строн». Тогда получим, что $P$ равноудалена от $AD$, $AB$ и $BC$.

**26.** Рассмотрим рисунок 39, $AD$ — большее основание трапеции, $BC$ — меньшее основание трапеции, $AB$ и $CD$ — боковые стороны, $MH \perp AD$ и $BK \perp AD$.

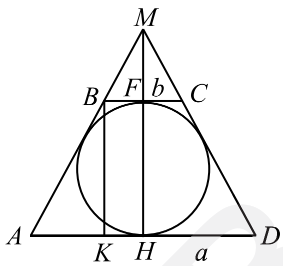


Рис. 39

Пусть $AD = a$, $BC = b$ и $BK = h$, тогда по условию и свойству описанного четырёхугольника получаем, что $AK = \dfrac{a-b}{2}$, $AB = \dfrac{a+b}{2}$. По теореме Пифагора

$h^2 = BK^2 = AB^2 - AK^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$

Согласно условию, $P = 2(a+b) = 40$, поэтому $a + b = 20$.

Так как $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$, то $50\sqrt{3} = \dfrac{20}{2} \cdot h$, $h = 5\sqrt{3}$. Но $h^2 = ab$, поэтому $\begin{cases} ab = 75, \\ a + b = 20. \end{cases}$

По теореме Виета получаем, что $a$ и $b$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 20x + 75 = 0$. Отсюда $x_1 = 5$ и $x_2 = 15$.

Так как $a > b$, то $a = 15$, $b = 5$.

$\triangle AKB \sim \triangle BFM$, $\dfrac{FM}{BF} = \dfrac{BK}{AK}$, $\dfrac{FM}{\frac{b}{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\frac{a-b}{2}}$, $\dfrac{FM}{\frac{5}{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\frac{15-5}{2}}$, $\dfrac{FM}{5} = \dfrac{5\sqrt{3}}{10}$,

$FM = \dfrac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

*Ответ:* $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

## Решение варианта 15

**21.** $x^3 + x^2 = 4x + 4$,
$x^2(x+1) = 4(x+1)$,

$(x+1)(x^2-4)=0.$

$x+1=0$ или $x^2-4=0,$

$x_1=-1$ $x^2=4,$

$x_2=-2$ или $x_3=2.$

*Ответ:* $-1;\ \pm 2.$

**22.** Будем считать, что фрукты состоят из воды и «сухого вещества», масса которого не изменяется в процессе высушивания. В свежих фруктах $100\%-75\%=25\%$ сухого вещества, то есть $0{,}25\cdot 760=190$ (кг). В высушенных фруктах «сухого вещества» столько же, при этом оно составляет $100\%-5\%=95\%$.

Составим пропорцию.

95% — 190 кг,

100% — $x$ кг.

Отсюда $x=\dfrac{190\cdot 100\%}{95\%}=200$ (кг).

*Ответ:* 200 кг.

**23.** Прямая $y=2kx$ имеет с параболой $y=-x^2-9$ единственную общую точку, когда уравнение $-x^2-9=2kx$ имеет единственное решение. В этом случае дискриминант квадратного трёхчлена $x^2+2kx+9$ должен равняться 0, то есть $(2k)^2-4\cdot 1\cdot 9=0$, $k=\pm 3$.

Построим параболу (см. рис. 40), заданную формулой $y=-x^2-9$, а также прямые $y=-6x$ и $y=6x$.

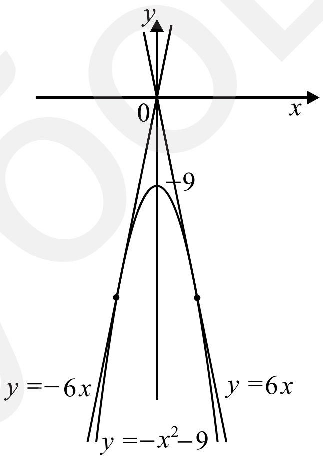


Рис. 40

*Ответ:* $-3;\ 3$

**24.** В прямоугольном треугольнике $ABH$ (см. рис. 41) найдём гипотенузу $AB$ по теореме Пифагора: $AB=\sqrt{HB^2+AH^2}$. $BH=\sqrt{9^2+12^2}=15$.

$\triangle ABH\sim\triangle CBH$ по двум углам. Действительно,

$\angle AHB=\angle BHC=90°$, $\angle BAC=\angle CBH$. ($\angle BAC+\angle ABH=90°$, $\angle CBH+\angle ABH=90°$). Тогда $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{AH}{AB}$, откуда $BC=\dfrac{BH\cdot AB}{AH}=\dfrac{9\cdot 15}{12}=11{,}25.$

*Ответ:* 11,25.

**25.** По условию $KN=\dfrac{KL}{2}$, $KN=ML$ как противоположные стороны параллелограмма. Треугольник $PLM$ равнобедренный, так как $PL=\dfrac{KL}{2}=ML$, значит, равны углы

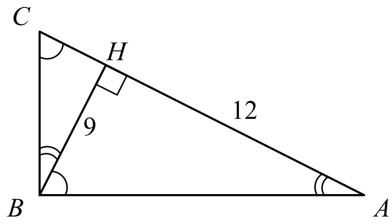


Рис. 41

при основании: $\angle PML = \angle MPL$. $\angle NMP = \angle MPL$ как накрест лежащие углы при прямых $NM \parallel KL$ и секущей $PM$. Следовательно, $\angle PML = \angle MPL = \angle NMP$, и $MP$ — биссектриса угла $NML$.

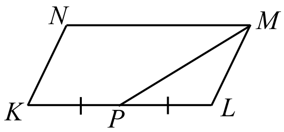


Рис. 42

**26.** В соответствии с условием получаем рисунок 43.

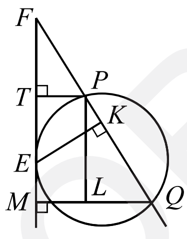


Рис. 43

Отрезки $PT$ и $QM$ перпендикулярны касательной (по условию $PT = 2$, $QM = 5$), $PL \parallel FM$, $EK \perp FQ$. Длина отрезка $EK$ и является расстоянием от точки $E$ до прямой $FQ$.

Треугольники $FPT$ и $PLQ$ подобны как прямоугольные, имеющие равные острые углы ($\angle PFT = \angle QPL$ как соответственные при $FM \parallel PL$, секущая $FQ$).

Из подобия следует, что $\dfrac{PT}{LQ} = \dfrac{FP}{PQ}$, $\dfrac{2}{5-2} = \dfrac{FP}{PQ}$, $FP = \dfrac{2}{3}PQ$. Отсюда $FQ = FP + PQ = \dfrac{2}{3}PQ + PQ = \dfrac{5}{3}PQ$.

По теореме о касательной и секущей получаем:

$FE^2 = FP \cdot FQ = \dfrac{2}{3}PQ \cdot \dfrac{5}{3}PQ = \dfrac{10}{9}PQ^2$, $FE = \dfrac{\sqrt{10}}{3}PQ$.

Треугольники $FPT$ и $FEK$ подобны (как прямоугольные, имеющие равные острые углы). Из подобия следует, что $\dfrac{PT}{FP} = \dfrac{EK}{EF}$. Отсюда $EK = \dfrac{PT \cdot EF}{FP} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{3}PQ}{\dfrac{2}{3}PQ} = \sqrt{10}$.

*Ответ:* $\sqrt{10}$.

## Решение варианта 16

**21.** $x^3 - x^2 = 49x - 49$,
$x^2(x-1) = 49(x-1)$,

$x^2(x-1)-49(x-1)=0.$
$(x-1)(x^2-49)=0,$
$x-1=0$ или $x^2-49=0,$
$x_1=1$ $x^2=49,$
$x_2=-7$ или $x_3=7.$

*Ответ:* 1; ±7.

**22.** Будем считать, что фрукты состоят из воды и «сухого вещества», масса которого не изменяется в процессе высушивания. В свежих фруктах $100\%-85\%=15\%$ сухого вещества, то есть $0{,}15\cdot 62=9{,}3$ (кг). В высушенных фруктах «сухого вещества» столько же, при этом оно составляет $100\%-7\%=93\%$.
Составим пропорцию.
93% — 9,3 кг,
100% — $x$ кг.

Отсюда $x=\dfrac{9{,}3\cdot 100\%}{93\%}=10$ (кг).

*Ответ:* 10 кг.

**23.** Прямая $y=kx$ имеет с параболой $y=-3x^2-3$ единственную общую точку, когда уравнение $-3x^2-3=kx$ имеет единственное решение. В этом случае дискриминант квадратного трёхчлена $3x^2+kx+3$ должен равняться 0, то есть $k^2-4\cdot 3\cdot 3=0$, $k=\pm 6$.

Построим параболу (см. рис. 44), заданную формулой $y=-3x^2-3$, а также прямые $y=-6x$ и $y=6x$.

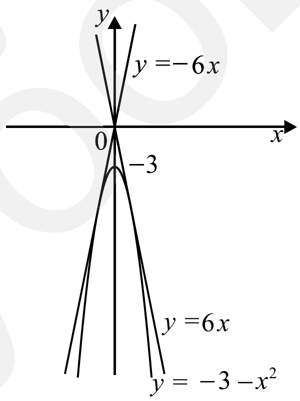


Рис. 44

*Ответ:* −6; 6

**24.** В прямоугольном треугольнике $ABH$ (см. рис. 45) найдём гипотенузу $AB$ по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{HB^2 + AH^2}$. $BH = \sqrt{9^2 + 40^2} = 41$.
$\triangle ABH \sim \triangle CBH$ по двум углам. Действительно,
$\angle AHB = \angle BHC = 90°$, $\angle BAC = \angle CBH$. Тогда $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AH}{AB}$, откуда $BC = \dfrac{BH \cdot AB}{AH}$.

$BC = \dfrac{9 \cdot 41}{40} = 9{,}225$.

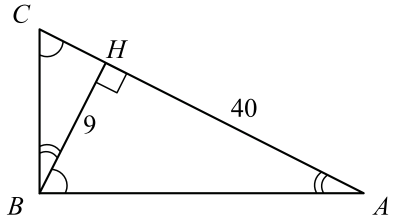


Рис. 45

*Ответ:* 9,225.

**25.** Треугольник $ABC$ равнобедренный, так как $AB = BC$, значит, равны углы при основании: $\angle BAC = \angle BCA$. $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие углы при прямых $AB \parallel CD$ и секущей $AC$. Следовательно, $\angle BCA = \angle DCA$, и $CA$ — биссектриса угла $DCB$.

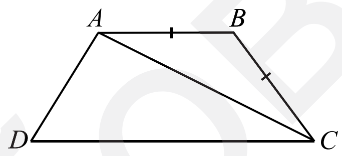


Рис. 46

**26.** В соответствии с условием получаем рисунок 47.

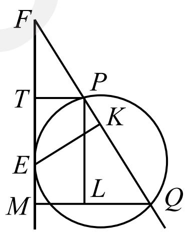


Рис. 47

Отрезки $PT$ и $QM$ перпендикулярны касательной (по условию $PT = 3$, $QM = 5$), $PL \parallel FM$, $EK \perp FQ$. Длина отрезка $EK$ и является расстоянием от точки $E$ до прямой $FQ$.

Треугольники $FPT$ и $PLQ$ подобны (как прямоугольные, имеющие равные острые углы).

Из подобия следует, что $\dfrac{PT}{LQ} = \dfrac{FP}{PQ}$, $\dfrac{3}{5-3} = \dfrac{FP}{PQ}$, $FP = \dfrac{3}{2}PQ$. Отсюда $FQ = FP + PQ = \dfrac{3}{2}PQ + PQ = \dfrac{5}{2}PQ$.

По теореме о касательной и секущей получаем:
$FE^2 = FP \cdot FQ = \dfrac{3}{2}PQ \cdot \dfrac{5}{2}PQ = \dfrac{15}{4}PQ^2$, $FE = \dfrac{\sqrt{15}}{2}PQ$.

Треугольники $FPT$ и $FEK$ подобны (как прямоугольные, имеющие равные острые углы). Из подобия следует, что $\dfrac{PT}{FP} = \dfrac{EK}{EF}$. Отсюда $EK = \dfrac{PT \cdot EF}{FP} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{2} PQ}{\dfrac{3}{2} PQ} = \sqrt{15}$.

*Ответ:* $\sqrt{15}$.

## Решение варианта 18

**21.** $(7-x)^4 - 50(7-x)^2 + 49 = 0$.

Пусть $(7-x)^2 = t$, $t \geqslant 0$.
Уравнение примет вид $t^2 - 50t + 49 = 0$.
$p = -50$, $q = 49$,
$t = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$,
$t_{1,2} = 25 \pm \sqrt{625-49} = 25 \pm \sqrt{576} = 25 \pm 24$,
$t_1 = 25 + 24 = 49$,
$t_2 = 25 - 24 = 1$.

Решим уравнения $(7-x)^2 = 49$ и $(7-x)^2 = 1$.
1. $(7-x)^2 = 49$,
$7 - x = 7$ или $7 - x = -7$,
$x_1 = 0$ $x_2 = 14$.
2. $(7-x)^2 = 1$,
$7 - x = 1$ или $7 - x = -1$,
$x_3 = 6$ $x_4 = 8$.

*Ответ:* 0; 6; 8; 14.

**22.** Пусть второй рабочий делает в час $x$ деталей ($x > 0$), тогда первый — $(x+4)$. Следовательно, на выполнение заказа в 48 деталей первый рабочий потратит $\dfrac{48}{x+4}$ часов, а второй — $\dfrac{48}{x}$ часов. Для наглядности внесём эти данные в таблицу.

| | **Количество изготавливаемых деталей в час** | **Объём заказа (в деталях)** | **Время на выполнение заказа (в часах)** |
|---|---|---|---|
| **I рабочий** | $x+4$ | 48 | $\dfrac{48}{x+4}$ |
| **II рабочий** | $x$ | 48 | $\dfrac{48}{x}$ |

По условию задачи должно выполняться равенство
$\dfrac{48}{x} - \dfrac{48}{x+4} = 2$, отсюда $\dfrac{24}{x} - \dfrac{24}{x+4} = 1$.
Домножим обе части на $x(x+4) \neq 0$, получим $24(x+4) - 24x = x(x+4)$;
$x^2 + 4x - 96 = 0$;

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 + 96} = -2 \pm 10;$
$x_1 = 8$, $x_2 = -12 < 0$ — не удовлетворяет условию.
Таким образом, второй рабочий изготавливает в час 8 деталей.

*Ответ:* 8.

**23.** Графиком функции $y = x^2 - 4x + 10$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины равна $-\dfrac{-4}{2} = 2$, а ордината равна $2^2 - 4 \cdot 2 + 10 = 6$. При $x = 1$ значение выражения $x^2 - 4x + 10$ равно 7, то есть парабола проходит через точку $(1;\ 7)$.

Графиком функции $y = 7x$ является прямая, проходящая через точку $(1;\ 7)$ и начало координат.

Построим график исходной кусочно заданной функции (см. рис. 48).

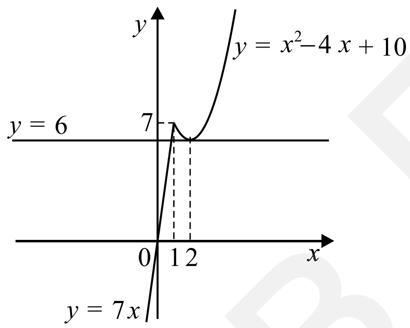


Рис. 48

Из графика видно, что у построенного графика и горизонтальной прямой $y = m$ будет ровно две общие точки при $m = 6$ и $m = 7$.

*Ответ:* 6; 7

**24.** Параллельные прямые пересекают стороны угла $B$ треугольника и отсекают от них пропорциональные отрезки (см. рис. 49). Тогда $\dfrac{KB}{AK} = \dfrac{MB}{MC}$. По условию $AK : KB = 3 : 8$, следовательно, $MC = 24 \cdot 3 : 8 = 9$.

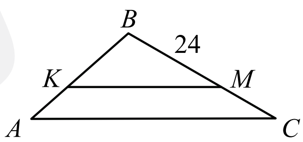


Рис. 49

*Ответ:* 9.

**25.** Обозначим $h$ — расстояние между прямыми $BC$ и $AD$. Тогда высоты трапеций $ABCE$ и $BCDE$ равны $h$. Так как $AE = ED$, то площади трапеций $ABCE$ и $BCDE$ равны:

$$S_{ABCE} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BC + AE) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BC + ED) = S_{BCDE}.$$

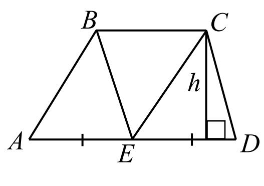


Рис. 50

**26.** Продолжим боковые стороны трапеции и точку их пересечения обозначим через $M$. Получим следующий рисунок 51.

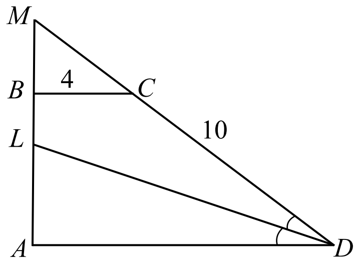


Рис. 51

Пусть $AD = a, BM = x, CM = y$. Треугольники $AMD$ и $BMC$ подобны (по двум углам).

Из подобия следует, что $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AD}{BC}, \dfrac{6+x}{x} = \dfrac{a}{4}, x = \dfrac{24}{a-4}$ и $\dfrac{DM}{CM} = \dfrac{AD}{BC}, \dfrac{10+y}{y} = \dfrac{a}{4}$, $y = \dfrac{40}{a-4}$.

$\dfrac{a}{10+y} = \dfrac{4}{y}, x = 0{,}6y.$

По условию $AB$ состоит из 3 одинаковых частей, при этом $AL$ из двух частей, а $LB$ из одной части. Так как $AB = 6$, то $AL = 4$, а $LB = 2$.

По свойству биссектрисы угла $MDA$ получаем: $\dfrac{AL}{LM} = \dfrac{AD}{DM}, \dfrac{4}{2+x} = \dfrac{a}{10+y}$; $\dfrac{4}{2+x} = \dfrac{4}{y}, 2+x = y, 2+0{,}6y = y, y = 5, \dfrac{a}{15} = \dfrac{4}{5}, a = 12.$

$AM = 9, AD = 12, MD = 10 + 5 = 15$. Так как $9^2 + 12^2 = 15^2$, то треугольник $AMD$ — прямоугольный и угол $MAD$ — прямой. Значит, $AB$ — высота трапеции и её площадь равна $\dfrac{12+4}{2} \cdot 6 = 48$.

*Ответ:* 48.

## Решение варианта 19

**21.** $(5+x)^4 - (5+x)^2 - 12 = 0.$

Обозначим $(5+x)^2 = t, t \geqslant 0$.
Уравнение примет вид $t^2 - t - 12 = 0$.
По теореме Виета при $p = -1$ и $q = -12$,
$t_1 + t_2 = 1$ и $t_1 \cdot t_2 = -12$ получим
$t_1 = 4, t_2 = -3$.

Значение $t_2 = -3$ не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$.
Решим уравнение $(5+x)^2 = 4$,

$5 + x = 2$ или $5+x = -2$,
$x_1 = -3$ $x_2 = -7$.
*Ответ:* $-7$; $-3$.

**22.** Пусть первая труба пропускает в минуту $x$ литров воды ($x > 0$), тогда вторая — ($x+12$). Следовательно, на наполнение резервуара объёмом 80 литров первая труба затратит $\dfrac{80}{x}$ минут, а вторая — $\dfrac{80}{x+12}$ минут. Для наглядности внесём эти данные в таблицу.

| | **Количество литров в минуту** | **Объём воды (в литрах)** | **Время (в минутах)** |
|---|---|---|---|
| **I труба** | $x$ | 80 | $\dfrac{80}{x}$ |
| **II труба** | $x+12$ | 80 | $\dfrac{80}{x+12}$ |

По условию задачи должно выполняться равенство
$\dfrac{80}{x} - \dfrac{80}{x+12} = 15$, отсюда $\dfrac{16}{x} - \dfrac{16}{x+12} = 3$.
Домножим обе части на $x(x+12) \neq 0$, получим
$16(x+12) - 16x = 3x(x+12)$;
$3x^2 + 36x - 192 = 0$;
$x^2 + 12x - 64 = 0$;
$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{6^2 + 64} = -6 \pm 10$;
$x_1 = 4$, $x_2 = -16 < 0$ — не удовлетворяет условию.
Таким образом, первая труба пропускает в минуту 4 литра воды.

*Ответ:* 4.

**23.** Графиком функции $y = x - 2$ является прямая, проходящая через точки $(0;\ -2)$ и $(2;\ 0)$. Графиком функции $y = -2{,}5x + 5$ является прямая, проходящая через точки $(2;\ 0)$ и $(5;\ -7{,}5)$. Графиком функции $y = 2{,}5x - 20$ является прямая, проходящая через точки $(5;\ -7{,}5)$ и $(8;\ 0)$.

Построим график исходной кусочно заданной функции (см. рис. 52).

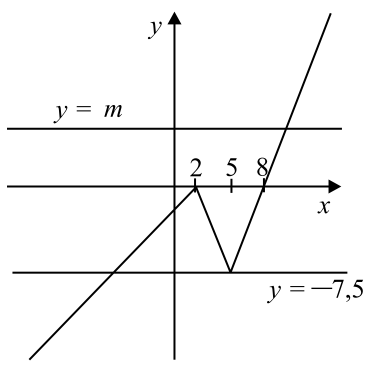


Рис. 52

Из рисунка видно, что у построенного графика и горизонтальной прямой $y = m$ ровно две общие точки будет при $m = 0$ и $m = -7{,}5$.

*Ответ:* $-7{,}5;\ 0$

**24.** Прямая, параллельная стороне треугольника (см. рис. 53), отсекает от него подобный ему треугольник: $\triangle BLK \sim \triangle ABC$ ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle BLK$ как соответственные при $LK || AC$ и секущей $AB$). Тогда $\dfrac{LB}{AB} = \dfrac{BK}{BC}$. По условию $AL : LB = 1 : 6$, следовательно, $LB : AB = 6 : 7$, значит, $\dfrac{6}{7} = \dfrac{BK}{42}$, откуда $BK = 36$. $KC = BC - BK$, $KC = 42 - 36 = 6$.

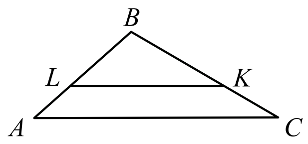


Рис. 53

*Ответ:* 6.

**25.** Обозначим $LK = MN = a$, высоту параллелограмма, опущенную на сторону $KL$ — $h$, высоты треугольников $NAM$ и $ALK$, проведённые из точки $A$, — $h_1$ и $h_2$ соответственно.

Так как точка $A$ находится внутри параллелограмма, то $h = h_1 + h_2$. Площадь параллелограмма: $S_{KLMN} = h \cdot LK = ah = a(h_1 + h_2)$,

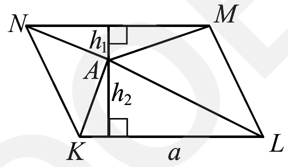


Рис. 54

площади треугольников $NAM$ и $ALK$:

$$S_{NAM} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot NM = \frac{ah_1}{2},\ S_{ALK} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot KL = \frac{ah_2}{2},$$

поэтому сумма равна $S_{NAM} + S_{ALK} = \dfrac{ah_1}{2} + \dfrac{ah_2}{2} = \dfrac{a(h_1 + h_2)}{2} = \dfrac{S_{KLMN}}{2}$.

**26.** Так как треугольник $ABC$ является остроугольным, то вершина $A$ лежит вне указанной в условии полуокружности, но внутри полосы, образованной касательными полуокружности в точках $B$ и $C$ (см. рис. 55).

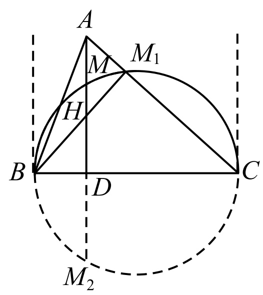


Рис. 55

Обозначим через $M_1$ точку пересечения стороны $AC$ с заданной полуокружностью. Так как угол $BM_1C$ — вписанный в полуокружность и опирается на её диаметр, то он прямой.

Поэтому $BM_1$ является высотой треугольника $ABC$ и точка пересечения высоты $AD$ и высоты $BM_1$ совпадает с точкой $H$, являющейся точкой пересечения высот треугольника $ABC$.

Треугольники $BHD$ и $ADC$ подобны, так как они прямоугольные и углы $HBD$ и $DAC$ равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия следует, что $\dfrac{BD}{HD} = \dfrac{AD}{CD}$. Отсюда $HD = \dfrac{BD \cdot CD}{AD}$.

Пусть прямая $AD$ пересекает вторую половину окружности (см. рис. 55) в точке $M_2$.

Диаметр $BC \perp MM_2$, значит, $MD = DM_2 = 8$.

По свойству пересекающихся хорд окружности справедливо равенство $BD \cdot CD = MD \cdot M_2D = 8 \cdot 8 = 64, HD = \dfrac{64}{12} = \dfrac{16}{3}$.

Поэтому $AH = AD - HD = 12 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{20}{3}$.

*Ответ:* $\dfrac{20}{3}$.

## Решение варианта 20

**21.** $(1-x)^4 - 7(1-x)^2 - 18 = 0$.

Пусть $t = (1-x)^2$.
Уравнение примет вид $t^2 - 7t - 18 = 0$.
$a = 1, b = -7, c = -18.$ $t = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$,
$\sqrt{D} = \sqrt{121} = 11$.
$t = \dfrac{7 \pm 11}{2 \cdot 1}$,

$t_1 = \dfrac{7+11}{2} = 9, t_2 = \dfrac{7-11}{2} = -2$.

Решим уравнения $(1-x)^2 = 9$ и $(1-x)^2 = -2$.

1. $(1-x)^2 = 9$,

$1 - x = 3$ или $1-x = -3$,
$x_1 = -2$ $x_2 = 4$.

2. Уравнение $(1-x)^2 = -2$ действительных корней не имеет.

*Ответ:* $-2;\ 4$.

**22.** Пусть первая труба пропускает в минуту $x$ литров воды ($x > 0$), тогда вторая — ($x+10$). Следовательно, на наполнение резервуара объёмом 240 литров первая труба затратит $\dfrac{240}{x}$ минут, а вторая — $\dfrac{240}{x+10}$ часов. Для наглядности внесём эти данные в таблицу.

| | **Количество литров в минуту** | **Объём (в литрах)** | **Время (в минутах)** |
|---|---|---|---|
| **I труба** | $x$ | 240 | $\frac{240}{x}$ |
| **II труба** | $x+10$ | 240 | $\frac{240}{x+10}$ |

По условию задачи должно выполняться равенство
$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+10} = 25$, отсюда $\frac{48}{x} - \frac{48}{x+10} = 5$.
Домножим обе части на $x(x+10) \neq 0$, получим
$48(x+10) - 48x = 5x(x+10)$;
$5x^2 + 50x - 480 = 0$; $x^2 + 10x - 96 = 0$;
$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5^2 + 96} = -5 \pm 11$;
$x_1 = 6$, $x_2 = -16 < 0$ — не удовлетворяет условию.
Таким образом, первая труба пропускает в минуту 6 литров воды.

*Ответ:* 6.

**23.** Графиком функции $y = -x + 3$ является прямая, проходящая через точки $(-2;\ 5)$ и $(-1;\ 4)$. Графиком функции $y = 1{,}5x + 5{,}5$ является прямая, проходящая через точки $(-1;\ 4)$ и $(1;\ 7)$. Графиком функции $y = -3{,}5x + 10{,}5$ является прямая, проходящая через точки $(1;\ 7)$ и $(3;\ 0)$.

Построим график исходной кусочно заданной функции (см. рис. 56).

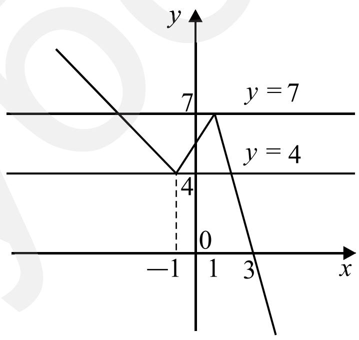


Рис. 56

Из графика видно, что у построенного графика и горизонтальной прямой $y = m$ будет ровно две общие точки при $m = 4$ и $m = 7$.

*Ответ:* 4; 7

**24.** Прямая, параллельная стороне треугольника (см. рис. 57), отсекает от него подобный ему треугольник: $\triangle BLK \sim \triangle ABC$ ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle BLK$ как соответственные при $LK || AC$ и секущей $AB$). Тогда $\frac{LB}{AB} = \frac{BK}{BC}$. По условию $AL : LB = 3 : 5$, следовательно, $LB : AB = 5 : 8$, значит, $\frac{5}{8} = \frac{BK}{56}$, откуда $BK = 35$. $KC = BC - BK$, $KC = 56 - 35 = 21$.

*Ответ:* 21.

**25.** Проведём через точку $E$ отрезок, перпендикулярный стороне прямоугольника $BC$ до пересечения со сторонами $AD$ и $BC$. Так как противоположные стороны прямоугольни-

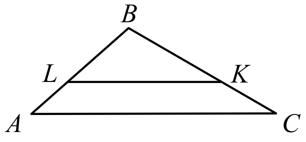


Рис. 57

ка параллельны, этот отрезок будет перпендикулярен и стороне $AD$. Этот отрезок равен стороне прямоугольника $AB$.

Обозначим $AD = BC = a$, $AB = b$, высоты треугольников $ADE$ и $BCE$, проведённые из точки $E$, — $h_1$ и $h_2$ соответственно.

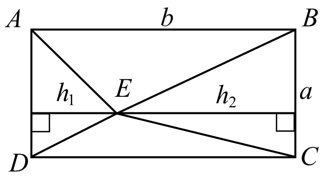


Рис. 58

Так как точка $E$ находится внутри прямоугольника, то $h_1 + h_2 = AB = b$. Площадь прямоугольника:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = ab = a(h_1 + h_2),$$

площади треугольников $ADE$ и $BCE$:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot AD = \frac{ah_1}{2}, \ S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot BC = \frac{ah_2}{2},$$

поэтому сумма равна

$$S_{ADE} + S_{BCE} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{a(h_1 + h_2)}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

**26.** Так как треугольник $ABC$ является остроугольным, то вершина $A$ лежит вне указанной в условии полуокружности, но внутри полосы, образованной касательными к полуокружности в точках $B$ и $C$ (см. рис. 59).

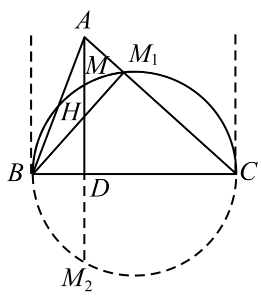


Рис. 59

Обозначим через $M_1$ точку пересечения стороны $AC$ с заданной полуокружностью. Так как угол $BM_1C$ вписанный в полуокружность и опирается на её диаметр, то он прямой. Поэтому $BM_1$ является высотой треугольника $ABC$ и точка пересечения высоты $AD$ и высоты $BM_1$ совпадает с точкой $H$, являющейся точкой пересечения высот треугольника $ABC$.

Треугольники $BHD$ и $ADC$ подобны, так как они прямоугольные и углы $HBD$ и $DAC$ равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия следует, что $\dfrac{BD}{HD} = \dfrac{AD}{CD}$. Отсюда $HD = \dfrac{BD \cdot CD}{AD}$.

Пусть прямая $AD$ пересекает вторую половину окружности (см. рис. 59) в точке $M_2$.

Диаметр $BC$ перпендикулярен хорде $MM_2$, значит, $MD = DM_2 = 8$.

По свойству пересекающихся хорд окружности справедливо равенство $BD \cdot CD = MD \cdot M_2D = 8 \cdot 8 = 64$, $HD = \dfrac{64}{10} = \dfrac{32}{5}$. Поэтому

$AH = AD - HD = 10 - \dfrac{32}{5} = \dfrac{18}{5}$.

*Ответ:* $\dfrac{18}{5}$.

## Решение варианта 22

**21.** $x + 2 - x^3 - 2x^2 = 0$,
$(x + 2) - (x^3 + 2x^2) = 0$,
$(x + 2) - x^2(x + 2) = 0$,
$(x + 2)(1 - x^2) = 0$,
$(x + 2)(1 - x)(1 + x) = 0$,
$x + 2 = 0$, или $1 - x = 0$, или $1 + x = 0$.
$x = -2$, $x = 1$, $x = -1$.

*Ответ:* $-2$; $-1$; $1$.

**22.** Обозначим длину всего пути через $S$, тогда первую половину автомобиль преодолеет за $\dfrac{S}{2 \cdot 63}$ (ч), а вторую — за $\dfrac{S}{2 \cdot 84}$ (ч). Тогда весь путь он преодолеет за $\dfrac{S}{2 \cdot 63} + \dfrac{S}{2 \cdot 84}$ (ч), отсюда средняя скорость равна $\dfrac{S}{\dfrac{S}{2 \cdot 63} + \dfrac{S}{2 \cdot 84}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{42}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{42 \cdot 12}{7} = 72$ (км/ч).

*Ответ:* 72 км/ч.

**23.** Разложим многочлен $x^4 - 5x^2 + 4$ на множители. Сделаем замену $x^2 = t$, получим квадратный трёхчлен $t^2 - 5t + 4$. Решив уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$, получим $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. Следовательно, $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$. Отсюда, $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Исходная функция примет вид

$y = \dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x + 1)(x - 2)$ при $x \neq -2$ и $x \neq 1$.

Графиком исходной функции является парабола, задаваемая уравнением $y = (x + 1)(x - 2)$, из которой выколоты точки с абсциссами $-2$ и $1$. При $x = -2$ выражение $(x+1)(x-2)$ равно 4. При $x = 1$ выражение $(x-2)(x+1)$ равно $-2$. Абсцисса вершины параболы расположена посередине между корнями и равна $\dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$. Ордината вершины параболы равна $\left(\dfrac{1}{2} + 1\right)\left(\dfrac{1}{2} - 2\right) = -2{,}25$. Таким образом, вершина параболы расположена в точке $(0{,}5;\ -2{,}25)$.

Построим график исходной функции (см. рис. 60) и определим, что горизонтальная прямая $y = b$ будет иметь с ним ровно одну общую точку при $b = -2{,}25$; $b = -2$ и $b = 4$.

*Ответ:* $-2{,}25$; $-2$; $4$

**24.** Диагональ $AC$ трапеции пересекает отрезок $EF$ в точке $K$ (см. рис. 61). $EF = EK + KF$. $\triangle CFK \sim \triangle ACD$, так как отрезок, параллельный основанию треугольника, отсекает подобный ему треугольник ($\angle C$ — общий, $\angle CFK = \angle CDA$ как

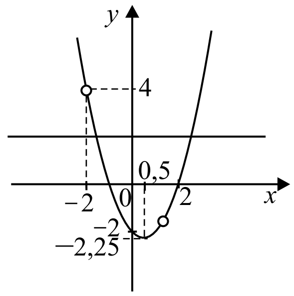


Рис. 60

соответственные при $EF||AD$ и секущей $CD$). $\dfrac{KF}{AD} = \dfrac{CF}{CD}$, $\dfrac{KF}{54} = \dfrac{7}{9}$, откуда $KF = 42$. Аналогично, $\triangle AEK \sim \triangle ABC$. $\dfrac{EK}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$. Из теоремы Фалеса следует, что $\dfrac{CF}{FD} = \dfrac{BE}{AE}$ $(EF||BC||AD)$. Тогда $\dfrac{EK}{18} = \dfrac{2}{9}$, откуда $EK = 4$. $EF = 4 + 42 = 46$.

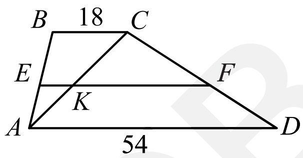


Рис. 61

*Ответ*: 46.

**25.** Докажем, что равны площади треугольников $ABD$ и $ACD$. Треугольники имеют совпадающее основание $AD$ и высоты, равные высоте $h$ трапеции $ABCD$, поэтому их площади равны:
$S_{ABD} = AD \cdot h$, $S_{ACD} = AD \cdot h$.

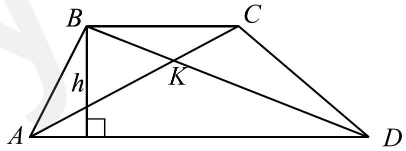


Рис. 62

Площадь треугольника $ABD$ равна сумме площадей треугольников $ABK$ и $ADK$.
$S_{ABD} = S_{ABK} + S_{ADK}$.
Аналогично $S_{ACD} = S_{CDK} + S_{ADK}$.
$S_{ABK} = S_{ABD} - S_{ADK}$.
Аналогично $S_{CDK} = S_{ACD} - S_{ADK}$.

Значит, площади треугольников $ABK$ и $CDK$ равны. Что и требовалось доказать.

**26.** Обозначим через $O$ точку пересечения общих касательных, через $O_1$ и $O_2$ — центры окружностей, а через $r_1$ и $r_2$— радиусы окружностей соответственно $(r_2 > r_1)$. Рассмотрим рисунок 63.

По свойству вписанной в угол окружности и свойствам касательных к окружности получаем, что точки $O$, $O_1$ и $O_2$ лежат на биссектрисе угла $AOB$; $O_1A$ и $O_2C$ перпендикулярны

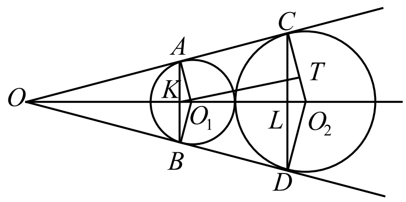


Рис. 63

касательной $OC$ (значит, $O_1A \parallel O_2C$), $AB$ и $CD$ перпендикулярны биссектрисе $OO_2$. Пусть $K$ и $L$ — точки пересечения $AB$ и $CD$ соответственно с биссектрисой $OO_2$.

Тогда искомое расстояние $l$ между прямыми $AB$ и $CD$ равно $KO_1 + O_1L = KO_1 + r_1 + r_2 - O_2L = KO_1 - O_2L + O_1O_2$, $O_1O_2 = 3 + 5 = 8$.

Через точку $O_1$ проведём прямую $O_1T$, параллельную $AC$, тогда $O_1T \perp O_2C$.

Обозначим через $\alpha$ угол $AOO_1$. Тогда из сказанного выше получаем, что $\angle KAO_1 = \angle LCO_2 = \angle TO_1O_2 = \alpha$.

Поэтому $\sin\alpha = \dfrac{KO_1}{r_1} = \dfrac{O_2L}{r_2} = \dfrac{TO_2}{O_1O_2} = \dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$. Отсюда получаем, что

$KO_1 = \dfrac{r_1 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} = \dfrac{3}{4}$.

$O_2L = \dfrac{r_2 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} = 5 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$,

Отсюда $l = \dfrac{3}{4} + 8 - \dfrac{5}{4} = 8 - \dfrac{1}{2} = 7{,}5$.

*Ответ:* 7,5.

## Решение варианта 23

**21.** $x^4 = (x - 12)^2$,
$x^4 - (x - 12)^2 = 0$,
$(x^2 + (x - 12))(x^2 - (x - 12)) = 0$,

$x^2 + x - 12 = 0$ или $x^2 - x + 12 = 0$.

По формулам Виета при $p = 1$ и $q = -12$

$x_1 + x_2 = -1$,
$x_1x_2 = -12$;
имеем $x_1 = -4$,
$x_2 = 3$.

$D = b^2 - 4ac$,
$a = 1, b = -1$,
$c = 12$;

$D = 1 - 48 < 0$,

корней нет.

*Ответ:* $-4$; 3.

**22.** Пусть первая бригада изготовила $x$ деталей, тогда вторая — $4x$ деталей, а третья на 56 больше, то есть $4x + 56$. Всего было изготовлено $x + 4x + (4x + 56) = 9x + 56$ (деталей), что по условию равно 317. Получаем уравнение $9x + 56 = 317$, $9x = 261$, $x = 29$. Значит, первая бригада изготовила 29 деталей, а третья $4 \cdot 29 + 56 = 172$ (детали). Искомая разность равна $172 - 29 = 143$.

*Ответ:* 143.

**23.** При $x \neq -3$ функция примет вид

$y = \dfrac{(x^2+3x)|x|}{x+3} = \dfrac{x(x+3)|x|}{x+3} = x \cdot |x|$. При $x \geqslant 0$ получим $y = x^2$, при $x < 0$ $y = -x^2$. Построим график исходной функции (см. рис. 64).

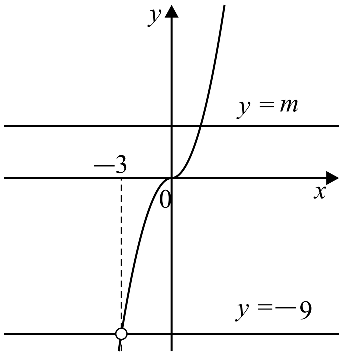


Рис. 64

Из рисунка видно, что у горизонтальной прямой $y = b$ не будет ни одной общей точки с построенным графиком при $m = -9$.

*Ответ:* $-9$.

**24.** $AD = BC = BK + KC = 13$. $ABK$ равнобедренный, т.к. $\angle BAK = \angle BKA$ (см. рис. 65). Действительно, по условию $AK$ — биссектриса, следовательно, $\angle BAK = \angle KAD$; $\angle AKB = \angle KAD$ как накрест лежащие при $BC||AD$ и секущей $AK$. Итак, $AB = BK = 9$. $P = 2(AB+BC) = 2(9+13) = 44$.

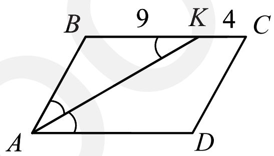


Рис. 65

*Ответ:* 44.

**25.** Рассмотрим треугольники $ABN$ и $CBN$. Их основания $AN$ и $CN$ равны, потому что $BN$ — медиана, и высота $BH$ общая. Найдём площади этих треугольников.

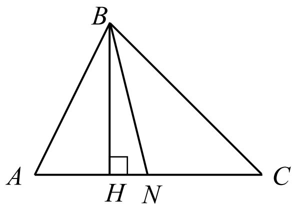


Рис. 66

$S_{ABN} = \dfrac{1}{2} \cdot AN \cdot BH$, $S_{CBN} = \dfrac{1}{2} \cdot CN \cdot BH$. Получили, что площади треугольников $ABN$ и $CBN$ равны. Что и требовалось доказать.

**26.** В соответствии с условием рассмотрим рисунок 67, на котором боковые стороны трапеции продолжены до пересечения в точке $O$, $OM$ — медиана $\triangle ODA$, которая пересекает основание $BC$ в точке $M_1$.

Так как сумма углов при основании треугольника $ODA$ равна $79^\circ + 11^\circ = 90^\circ$, то треугольник $ODA$ прямоугольный с прямым углом $O$.

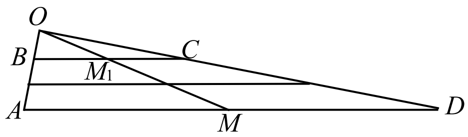


Рис. 67

$\triangle AOM \sim \triangle BOM_1$ и $\triangle MOD \sim \triangle M_1OC$, откуда $\dfrac{AM}{BM_1} = \dfrac{MO}{M_1O} = \dfrac{MD}{M_1C}$. Но $AM = MD$. Поэтому $BM_1 = M_1C$ и $M_1M$ является линией, соединяющей середины оснований.

Пусть $a$ и $b$ — основания трапеции ($a > b$), тогда средняя линия трапеции равна $\dfrac{a+b}{2}$.

Так как $M$– середина гипотенузы, то $OM = AM = MD = \dfrac{a}{2}$. Аналогично, $OM_1 = BM_1 = M_1C = \dfrac{b}{2}$. Отсюда следует, что $M_1M = OM - OM_1 = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} = \dfrac{a-b}{2}$.

Согласно условию, справедливы равенства: $\dfrac{a+b}{2} = 15$; $\dfrac{a-b}{2} = 7$. Отсюда $a = 22$, $b = 8$.

*Ответ:* 22; 8.

## Решение варианта 24

**21.** $x^6 = (5x-4)^3$,
$\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{(5x-4)^3}$,
$x^2 = 5x - 4$,
$x^2 - 5x + 4 = 0$,
$a = 1$, $b = -5$, $c = 4$.

Заметим, что $a + b + c = 1 - 5 + 4 = 0$, следовательно, $x_1 = 1$. Отсюда $x_2 = \dfrac{c}{a} = 4$.

*Ответ:* 1; 4.

**22.** Пусть первая бригада изготовила $x$ деталей, тогда вторая — $3x$ деталей, а третья на 29 больше, то есть $3x+29$. Всего было изготовлено $x + 3x + (3x+29) = 7x + 29$ (деталей), что по условию равно 498. Получаем уравнение $7x+29 = 498$, $7x = 469$, $x = 67$. Значит, первая бригада изготовила 67 деталей, а третья $3\cdot 67+29 = 230$ (деталей). Искомая разность равна $230 - 67 = 163$.

*Ответ:* 163.

**23.** При $x \neq 2$ функция примет вид
$y = \dfrac{(3x^2-6x)|x|}{x-2} = \dfrac{3x(x-2)|x|}{x-2} = 3x \cdot |x|$. При $x \geqslant 0$ получим $y = 3x^2$, при $x < 0$ $y = -3x^2$. Построим график исходной функции (см. рис. 68).

Из рисунка видно, что у горизонтальной прямой $y = b$ не будет ни одной общей точки с построенным графиком при $m = 12$.

*Ответ:* 12.

**24.** $AD = BC = BK + KC = 17$. $ABK$ равнобедренный, т.к. $\angle BAK = \angle BKA$ (см. рис. 69). Действительно, по условию $AK$ — биссектриса, следовательно, $\angle BAK = \angle KAD$; $\angle AKB = \angle KAD$ как накрест лежащие при $BC||AD$ и секущей $AK$. Итак, $AB = BK = 12$.
$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (12 + 17) = 58$.

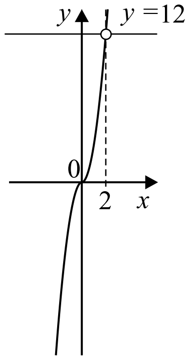


Рис. 68

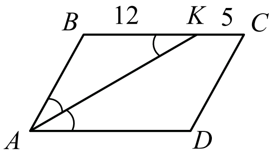


Рис. 69

*Ответ:* 58.

**25.** Проведём высоту $CH$ (см. рис. 70). Это высота как треугольника $ABC$, так и треугольника $ACD$.

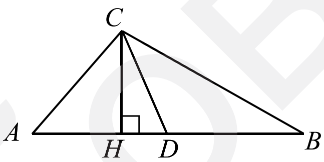


Рис. 70

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CH$, $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}AD \cdot CH$. Но $CD$ — медиана, и $AD = \dfrac{1}{2}AB$, то есть $AB = 2AD$, получаем $S_{ABC} = AD \cdot CH = 2S_{ACD}$. Что и требовалось доказать.

**26.** В соответствии с условием рассмотрим рисунок 71, на котором боковые стороны трапеции продлены до пересечения в точке $O$, $OM$ — медиана треугольника $ODA$, которая пересекает основание $BC$ в точке $M_1$.

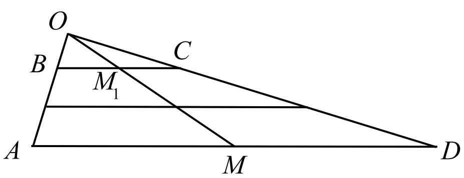


Рис. 71

Так как сумма углов при основании треугольника $ODA$ равна $73^\circ + 17^\circ = 90^\circ$, то треугольник $ODA$ прямоугольный с прямым углом $O$.

$\triangle AOM \sim \triangle BOM_1$ и $\triangle MOD \sim \triangle M_1OC$, откуда $\dfrac{AM}{BM_1} = \dfrac{MO}{M_1O} = \dfrac{MD}{M_1C}$. Но $AM = MD$. Поэтому $BM_1 = M_1C$ и $M_1M$ является линией, соединяющей середины оснований.

Пусть $a$ и $b$ — основания трапеции ($a > b$), тогда средняя линия трапеции равна $\dfrac{a+b}{2}$.

Так как $M-$ середина гипотенузы, то $OM = AM = MD = \frac{a}{2}$. Аналогично, $OM_1 = BM_1 = M_1C = \frac{b}{2}$. Отсюда следует, что $M_1M = OM - OM_1 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Согласно условию, справедливы равенства: $\frac{a+b}{2} = 17$; $\frac{a-b}{2} = 9$. Отсюда $a = 26$, $b = 8$.

*Ответ:* 26; 8.

## Решение варианта 26

**21.** Найдём область определения, решив неравенство $x - 2 \geqslant 0$, $x \geqslant 2$, $x \in [2;\ +\infty)$.

Решим исходное уравнение при условии $x \geqslant 2$.

$x^2 + 3x - \sqrt{x-2} = 10 - \sqrt{x-2}$,

$x^2 + 3x - 10 = 0$.

По формулам Виета $x_1 + x_2 = -3$, $x_1x_2 = -10$, получим $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $-5 \notin [2;\ +\infty)$, следовательно, не является корнем исходного уравнения.

*Ответ:* 2.

**22.** Так как поезд и пешеход движутся в одном направлении, скорость поезда относительно пешехода равна $76 - 4 = 72$ (км/ч). В одном часе 60 минут, в каждой минуте 60 секунд, значит, в одном часе $60 \cdot 60 = 3600$ секунд. Отсюда, 40 секунд составляют $\frac{40}{3600} = \frac{1}{90}$ часа.

Пусть длина поезда равна $x$ км, тогда мимо человека он пройдёт за $\frac{x}{72}$ часов. Получим уравнение $\frac{x}{72} = \frac{1}{90}$, следовательно, $x = \frac{72}{90} = 0{,}8$. Значит, длина поезда равна 0,8 км, то есть 800 метров.

*Ответ:* 800.

**23.** Прямая $y = 8x$ имеет с параболой $y = x^2 + 2p$ единственную общую точку, когда уравнение $x^2 + 2p = 8x$ имеет единственное решение, то есть когда дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 8x + 2p$ равен нулю (см. рис. 72). Это будет выполнено, если $(-8)^2 - 4 \cdot (2p) = 0$, то есть $p = 8$. График функции $y = x^2 + 2 \cdot 8$ получается из графика функции $y = x^2$ смещением на 16 единиц вверх.

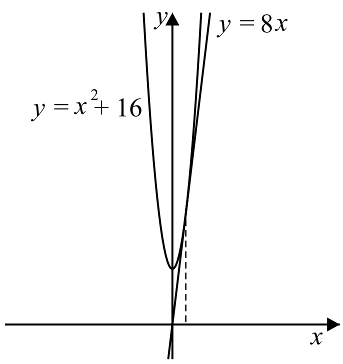


Рис. 72

*Ответ:* 8.

**24.** Рассмотрим ромб $ABCD$ с острым углом $A$, $O$ — точка пересечения его диагоналей (см. рис. 73). Расстояние $OH$ от точки пересечения диагоналей ромба до стороны $AD$ равно 17.

В прямоугольном треугольнике $AOH$ гипотенуза $AO$, равная 34, в два раза больше катета $OH$, значит, $\angle OAH = 30°$, а $\angle BAH = 60°$ (диагональ ромба является биссектрисой угла ромба).
$\angle A + \angle B = 180°$, тогда $\angle B = 180° - \angle A = 120°$. Противоположные углы ромба равны, поэтому $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$.

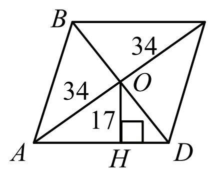

Рис. 73

Замечание. Если предположить, что диагональ $BD = 68$, то, рассуждая аналогично, получим, в прямоугольном треугольнике $ODH$ $\angle ODH = 30°$, тогда $\angle ADC = 60°$, что противоречит тому, что этот угол тупой.

*Ответ:* $120; 60$.

**25.** Обозначим основания трапеции $BC = a$, $AD = b$, высоту трапеции $CH = h$ (см. рис. 74). Площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BC + AD) = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Проведём среднюю линию трапеции $EF$, которая параллельна основаниям и длина которой $EF = \dfrac{a+b}{2}$. Треугольник $ABE$ разбился на два треугольника $BEF$ и $AEF$.

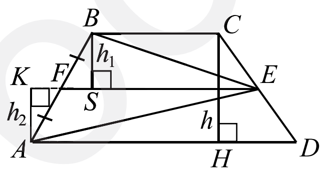

Рис. 74

Проведём из точек $A$ и $B$ высоты $BS \perp EF$ и $AK \perp EF$ и обозначим их $h_1$ и $h_2$ соответственно. Так как $EF$, $CB$ и $AD$ параллельны, $h = h_1 + h_2$.

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot EF = \frac{(a+b)h_1}{4}, \quad S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot EF = \frac{(a+b)h_2}{4}.$$

$$S_{ABE} = S_{BEF} + S_{AEF} = \frac{(a+b)h_1}{4} + \frac{(a+b)h_2}{4} = \frac{(a+b)(h_1+h_2)}{4} =$$

$$= \frac{(a+b)h}{4}.$$

Значит, $S_{ABE} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$.

**26.** Пусть $M$, $N$ и $P$ — точки касания окружности, вписанной в треугольник $ABC$, со сторонами $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно. Тогда $\sin \angle OAP = \dfrac{8}{17} < \dfrac{1}{2}$, поэтому $\angle OAP < 30°$. Так как точка $O$ лежит на биссектрисе угла $BAC$, то $\angle BAC = 2\angle OAP < 60°$.

В соответствии с этим рассмотрим рисунок 75.

По свойствам касательной $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$ и $OM = ON = OP = 5$.

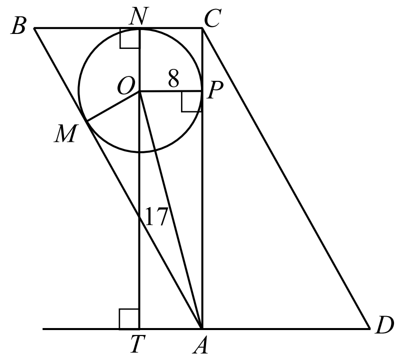


Рис. 75

В прямоугольном треугольнике $AOP$ гипотенуза $AO$ равна 17, катет $OP = 8$, поэтому по теореме Пифагора $AP = 15$. В прямоугольном треугольнике $AOT$ гипотенуза $AO$ равна 17, катет $OT = 15$ по условию, поэтому $\triangle AOT = \triangle AOP$. Кроме этого, $\triangle AOM = \triangle AOP$. Пусть $\angle OAM = \alpha$, тогда $\angle OAP = \alpha$ и $\angle AOT = \alpha$. Значит, $\angle OAT = 90^\circ - \alpha$ и $\angle TAC = \angle TAO + \angle OAC = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$.

Отсюда следует, что $AC \perp AD$, следовательно, $BC \perp AC$. Но $NC \perp AC$ и $OP \perp AC$, значит, $NC \parallel OP$. Аналогично, $ON \parallel CP$. Учитывая, что $MO = OP$, получаем, что $CPON$ — квадрат со стороной 8.

Значит, точки $T$, $O$ и $N$ лежат на одной прямой, перпендикулярной $AD$.

$BN = BM$, $AP = AM$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из точек $B$ и $A$.

Пусть $NB = x$, тогда по свойству касательных $BM = x$.

По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, поэтому

$$(15+8)^2+(8+x)^2 = (15+x)^2,\ 529+64+16x+x^2 = 225+30x+x^2,\ 14x = 368,\ x = \frac{368}{14} = \frac{184}{7}.$$

$$S_{ABCD} = AC \cdot BC = 23 \cdot \left(8 + \frac{184}{7}\right) = \frac{23 \cdot 240}{7} = \frac{5520}{7}.$$

*Ответ:* $\frac{5520}{7}$.

## Решение варианта 27

**21.** Заметим, что числитель дроби $12 > 0$, следовательно, неравенство выполняется, если $x^2 - x - 6 < 0$. Левую часть последнего неравенства разложим на множители. Решим уравнение $x^2 - x - 6 = 0$. По формулам Виета $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -6$, отсюда имеем $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Неравенство примет вид $(x+2)(x-3) < 0$.

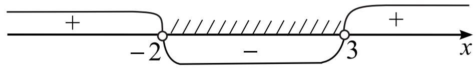


Рис. 76

$-2 < x < 3$ (см. рис. 76).

*Ответ:* $(-2;\ 3)$.

**22.** Предположим, что, работая самостоятельно, Кристина красит забор за $x$ часов, Оля — за $y$ часов, Марина — за $z$ часов. Тогда за 1 час Кристина и Оля покрасят $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть забора, что по условию равно $\frac{1}{24}$, Оля и Марина — $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{18}$ часть забора, Кристина и Марина — $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{36}$ часть забора. Отсюда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{24}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$, $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{9}{72}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{16}$. Таким образом, работая втроём, девочки за 1 час покрасят $\frac{1}{16}$ от всего забора. Тогда весь забор они покрасят за 16 часов.

*Ответ:* 16.

**23.** Построим график заданной функции при $x \geqslant 3$ и при $x < 3$. При $x \geqslant 3$ уравнение примет вид $y = x^2 - 12x + 30 = (x-6)^2 - 6$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(6;\ -6)$, ветви направлены верх.

При $x < 3$ уравнение примет вид $y = x^2 - 2x$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(1;\ -1)$, ветви направлены верх.

Ясно, что $y(3) = 3$.

Построим график заданной функции (см. рис. 77).

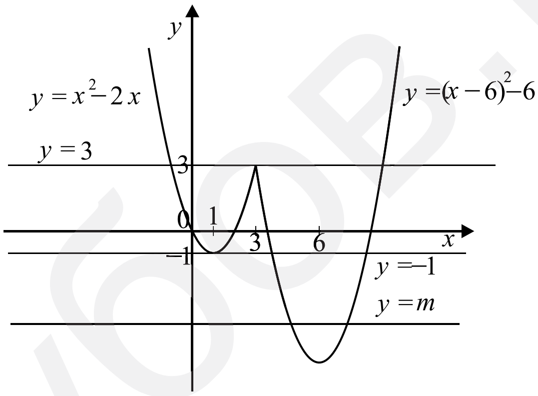


Рис. 77

По рисунку определим, что график заданной функции имеет ровно 3 общие точки с горизонтальной прямой $y = m$ при $m = -1$ и $m = 3$.

*Ответ:* $-1;\ 3$

**24.** $AD = DC = DH + HC = 40 + 1 = 41$ (см. рис. 78). Из прямоугольного треугольника $ADH$ высоту $AH$ найдём по теореме Пифагора: $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$, $AH = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9$.

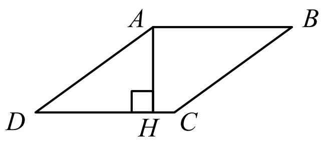


Рис. 78

*Ответ:* 9.

**25.** Треугольник $BAC$ подобен треугольнику $BAD$, так как $\angle B$ общий, а $\angle BAC = \angle BDA$ как угол между касательной и хордой и вписанный угол, опирающийся на ту же дугу. Поэтому $BA : BC = BD : BA$, откуда $BA^2 = BC \cdot BD$.

**26.** В соответствии с условием, рассмотрим рисунок 80.

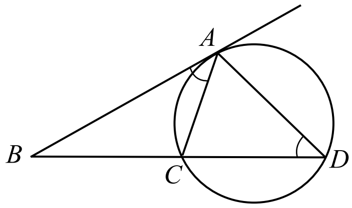


Рис. 79

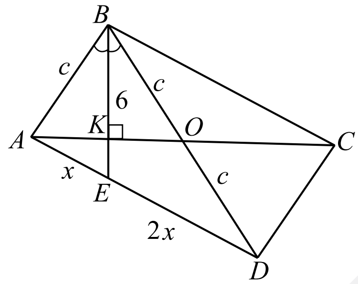


Рис. 80

$\triangle ABK$ и $\triangle BKO$ — прямоугольные, $\angle ABK = \angle KBO$, так как $BE$ — биссектриса, поэтому $\triangle ABK = \triangle BKO$, $AB = BO$. Пусть $AB = c$. Тогда по свойству диагоналей параллелограмма $OD = c$, а по свойству биссектрисы $AE : ED = c : 2c = 1 : 2$. Полагая $AE = x$, получим $ED = 2x$.

По теореме косинусов, учитывая, что $BE = 6$ и $\angle ABE = \angle DBE$ получаем:

$x^2 = c^2 + 36 - 2c \cdot 6 \cdot \cos\angle ABE$; $x^2 = c^2 + 36 - 12c \cdot \cos\angle ABE$.

$(2x)^2 = (2c)^2 + 36 - 2 \cdot 2c \cdot 6 \cdot \cos\angle DBE$; $4x^2 = 4c^2 + 36 - 24c \cdot \cos\angle DBE$, $2x^2 = 2c^2 + 18 - 12c \cdot \cos\angle ABE$.

Вычитая из последнего равенства полученное ранее равенство $x^2 = c^2 + 36 - 12c \cdot \cos\angle ABE$, получаем

$x^2 = c^2 - 18$.

По условию $BE = \frac{1}{4}AC$, поэтому $AC = 4BE = 24$. По свойству параллелограмма получаем:

$$24^2 + 4c^2 = 2 \cdot (c^2 + 9x^2);\ 576 + 4c^2 = 2c^2 + 18x^2;\ x^2 = \frac{c^2 + 288}{9}.$$

Учитывая ранее найденное значение $x^2$, получаем:

$c^2 - 18 = \frac{c^2 + 288}{9}$; $8c^2 = 450$; $c^2 = \frac{225}{4}$; $c = \frac{15}{2} = AB$;

$$x = \sqrt{c^2 - 18} = \sqrt{\frac{225}{4} - 18} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2};$$

$$3x = AD = \frac{9\sqrt{17}}{2}.$$

*Ответ:* $\frac{15}{2}$; $\frac{9\sqrt{17}}{2}$.

## Решение варианта 28

**21.** Заметим, что числитель дроби $-12 < 0$, следовательно, неравенство выполняется, если $(x-1)^2 - 1 > 0$. Разложим на множители левую часть последнего неравенства по формуле $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:
$(x-1-1)(x-1+1) > 0$,
$x(x-2) > 0$,
$x(x-2) = 0$.
$x = 0$ или $x - 2 = 0$; $x = 2$.

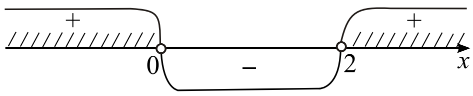


Рис. 81

Решением неравенства будут значения $x < 0$ и $x > 2$ (см. рис. 81).

*Ответ:* $(-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

**22.** Предположим, что, работая самостоятельно, Николай красит забор за $x$ часов, Юрий — за $y$ часов, Алексей — за $z$ часов. Тогда за 1 час Николай и Юрий покрасят $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть забора, что по условию равно $\frac{1}{9}$, Юрий и Алексей — $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{18}$ часть забора, Николай и Алексей — $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{12}$ часть забора. Отсюда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$, $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{9}{36}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8}$. Таким образом, работая втроём, мальчики за 1 час покрасят $\frac{1}{8}$ от всего забора. Тогда весь забор они покрасят за 8 часов.

*Ответ:* 8.

**23.** Построим график заданной функции отдельно при $x \geqslant -2$ и при $x < -2$. При $x \geqslant -2$ уравнение примет вид $y = 3x + 6 - x^2 - 3x - 7 = -1 - x^2$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(0;\ -1)$, ветви направлены вниз.

При $x < -2$ уравнение примет вид $y = -x^2 - 6x - 13 = -(x+3)^2 - 4$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(-3;\ -4)$, ветви направлены вниз.

Ясно, что $y(-2) = -5$.

Построим график заданной функции (см. рис. 82).

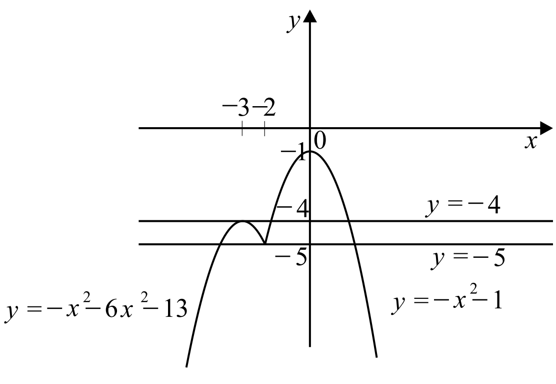


Рис. 82

По рисунку определим, что график заданной функции имеет ровно 3 общие точки с горизонтальной прямой $y = m$ при $m = -5$ и $m = -4$.

*Ответ:* $-5$; $-4$.

**24.** $CD = DA = DH + HA = 24 + 1 = 25$ (см. рис. 83). Из прямоугольного треугольника $CDH$ высоту $CH$ найдём по теореме Пифагора: $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2}$, $CH = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.

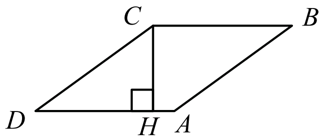


Рис. 83

*Ответ:* 7.

**25.** Проведём касательную $BA$ ($A$ — точка касания). Треугольник $BAC$ подобен треугольнику $BAD$, так как $\angle B$ общий, а $\angle BAC = \angle BDA$ как угол между касательной и хордой и вписанный угол, опирающийся на ту же дугу. Поэтому $BA : BC = BD : BA$, откуда $BA^2 = BC \cdot BD$.

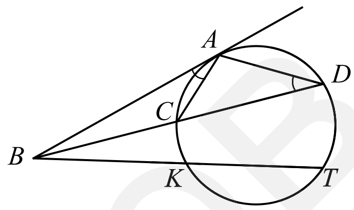


Рис. 84

Аналогично можно доказать, что треугольник $BAK$ подобен треугольнику $BAT$ и $BA^2 = BK \cdot BT$.

Получили, что $BC \cdot BD = BK \cdot BT$.

**26.** В соответствии с условием рассмотрим рисунок 85.

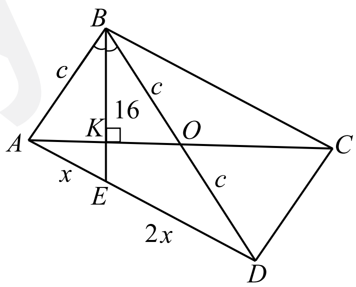


Рис. 85

$\triangle ABK$ и $\triangle BKO$ — прямоугольные, $\angle ABK = \angle KBO$, так как $BE$ — биссектриса, поэтому $\triangle ABK = \triangle BKO$, $AB = BO$. Пусть $AB = c$. Тогда по свойству диагоналей параллелограмма $OD = c$, а по свойству биссектрисы $AE : ED = c : 2c = 1 : 2$. Полагая $AE = x$, получим $ED = 2x$.

По теореме косинусов, учитывая, что $BE = 16$ и $\angle ABE = \angle DBE$, получаем:

$x^2 = c^2 + 256 - 2c \cdot 16 \cdot \cos\angle ABE$; $x^2 = c^2 + 256 - 32c \cdot \cos\angle ABE$;

$(2x)^2 = (2c)^2 + 256 - 2 \cdot 2c \cdot 16 \cdot \cos\angle DBE$;

$4x^2 = 4c^2 + 256 - 64c \cdot \cos\angle DBE$, $2x^2 = 2c^2 + 128 - 32c \cdot \cos\angle ABE$.

Вычитая из последнего равенства полученное ранее равенство $x^2 = c^2 + 256 - 32c \cdot \cos\angle ABE$, получаем: $x^2 = c^2 - 128$.

По условию $BE = \frac{1}{2}AC$, поэтому $AC = 2BE = 32$. По свойству параллелограмма получаем:

$32^2 + 4c^2 = 2 \cdot (c^2 + 9x^2)$; $1024 + 4c^2 = 2c^2 + 18x^2$; $x^2 = \dfrac{c^2 + 512}{9}$.

Учитывая ранее найденное значение $x^2$, получаем: $c^2 - 128 = \dfrac{c^2 + 512}{9}$;

$8c^2 = 128 \cdot 13$; $c^2 = 16 \cdot 13$; $c = 4\sqrt{13} = AB$,
$x = \sqrt{c^2 - 128} = \sqrt{208 - 128} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
$3x = AD = 12\sqrt{5}$.
*Ответ:* $4\sqrt{13}$; $12\sqrt{5}$.

## Решение варианта 30

**21.** $(b^3 - 25b)\left(\dfrac{1}{b-5} - \dfrac{1}{b+5}\right) = b(b-5)(b+5)\dfrac{b+5-b+5}{(b-5)(b+5)} = 10b$.
При $b = 15$ получим $10b = 10 \cdot 15 = 150$.
*Ответ:* 150.

**22.** Пусть спуск составляет $x$ км, тогда протяжённость подъёма равна $(13 - x)$ км. Пусть скорость на спуске $v$ км/ч, тогда скорость на подъёме равна $(v - 3)$ км/ч. Спуск занял $\dfrac{x}{v}$ ч, что по условию равно 3 ч. Подъём занял $\dfrac{13 - x}{v - 3}$ ч, что равно $4 - 3 = 1$ (ч). Получим два уравнения $\dfrac{x}{v} = 3$, $\dfrac{13 - x}{v - 3} = 1$. Из первого уравнения $x = 3v$. Второе уравнение примет вид $\dfrac{13 - 3v}{v - 3} = 1$, отсюда $13 - 3v = v - 3$, $4v = 16$, $v = 4$.

На спуске турист шёл со скоростью $v = 4$ км/ч.
*Ответ:* 4 км/ч.

**23.** При $x \neq 3$ исходная функция примет вид $y = -x^2 - 9$. Это парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём, при каких значениях параметра $k$ прямая $y = 2kx$ касается указанной параболы. Это будет выполнено в том случае, когда уравнение $-x^2 - 9 = 2kx$ имеет единственное решение, то есть дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 2kx + 9 = 0$ равен нулю: $(2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, $k = \pm 3$.

График исходной функции получится, если из рассмотренной параболы выколоть точку $(3;\ -18)$. Прямая $y = 2kx$ будет проходить через выколотую точку, если $-18 = 2k \cdot 3$, $k = -3$.

Из рисунка 86 видно, что график функции $y = \dfrac{(x^2 + 9)(x - 3)}{(3 - x)}$ имеет ровно одну общую точку с прямой $y = 2kx$ при $k = 3$.
*Ответ:* 3.

**24.** Пусть $O$ — центр окружности, проведём $OH \perp AB$ (см. рис. 87), $H$ — середина отрезка $AB$ (радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам), $OF \perp CD$, $F$ — середина отрезка $CD$. $OH = 7$, $OF = 15$.

Из прямоугольного треугольника $AOH$ с катетами $AH = 24$, $OH = 7$ найдём гипотенузу $AO$, которая является радиусом окружности, по теореме Пифагора:

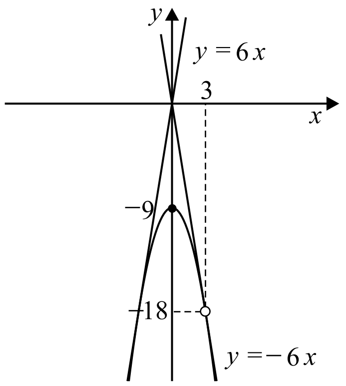


Рис. 86

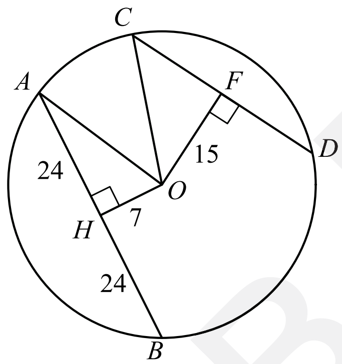


Рис. 87

$AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. $CD = 2CF$, $CF$ найдём по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $COF$ с гипотенузой $CO$, равной радиусу окружности. $CD = 2CF = 2\sqrt{CO^2 - OF^2} = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40$.

*Ответ:* 40.

**25.** В треугольниках $BDA$ и $CAE$ угол $A$ общий. $\angle ABD = 180° - \angle CBD$ как смежные углы, $\angle CED = 180° - \angle CBD$ как противоположные углы вписанного четырёхугольника $BCED$. Значит, $\angle ABD = \angle AEC$ и треугольник $BDA$ подобен треугольнику $CAE$.

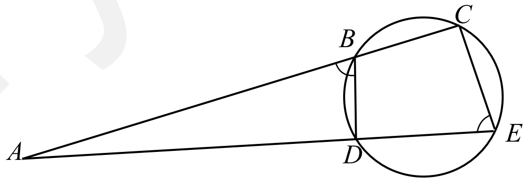


Рис. 88

**26.** Так как $\cos\angle DAC > 0$, то $\angle DAC$ — острый. По свойству ромба $\angle DAC = \angle BAC$, поэтому $\angle BAC$ — острый. Обозначим через $O$ центр окружности, указанной в условии, через $T$ — точку касания её с лучом $AB$, через $L$ — середину отрезка $MN$, через $K$ — точку пересечения прямой $OL$ с лучом $AB$. Рассмотрим рисунок 89.

В соответствии с рисунком, искомый радиус равен $OT$.

По свойству касательной к окружности $AB \perp OT$, по свойству хорд окружности $OK \perp MN$, поэтому $OK \perp AC$. Отсюда по свойству углов с взаимно перпендикулярными сторонами получаем, что $\angle KAL = \angle KOT$. Поэтому $\dfrac{TK}{OT} = \operatorname{tg}\angle KOT = \operatorname{tg}\angle KAL = \operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}\angle DAC$.

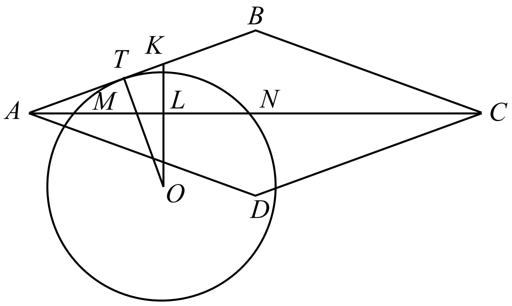


Рис. 89

Значит, $OT = \dfrac{TK}{tg\angle BAC} = \dfrac{TK \cdot \cos\angle DAC}{\sin\angle DAC}$. Так как $\angle DAC$ — острый, то $\sin\angle DAC = \sqrt{1-\cos^2\angle DAC} = \sqrt{1-\dfrac{16}{18}} = \sqrt{\dfrac{2}{18}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$.

Поэтому $OT = \dfrac{TK \cdot \dfrac{4}{\sqrt{18}}}{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{TK \cdot 4}{\sqrt{2}}$.

Из свойства касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем: $AT^2 = AM \cdot AN = 3 \cdot 6 = 18$; $AT = \sqrt{18}$.

$AL = AM + ML = 3 + \dfrac{MN}{2} = 3 + \dfrac{AN - AM}{2} = 3 + \dfrac{6-3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

$\dfrac{AL}{AK} = \cos\angle DAC = \dfrac{4}{\sqrt{18}}$, $AK = \dfrac{AL}{\dfrac{4}{\sqrt{18}}} = \dfrac{\dfrac{9}{2}}{\dfrac{4}{\sqrt{18}}} = \dfrac{9\sqrt{18}}{8}$,

$TK = AK - AT = \dfrac{9\sqrt{18}}{8} - \sqrt{18} = \dfrac{\sqrt{18}}{8}$.

Наконец, $OT = \dfrac{TK \cdot 4}{\sqrt{2}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{18}}{8} \cdot 4}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$.

*Ответ:* $\dfrac{3}{2}$.

Замечание. Решение задачи будет точно таким же при другом возможном расположении центра окружности, указанной в условии.

## Решение варианта 31

**21.** $\dfrac{4x-25y}{2\sqrt{x}-5\sqrt{y}} - 3\sqrt{y} = \dfrac{(2\sqrt{x}-5\sqrt{y})(2\sqrt{x}+5\sqrt{y})}{2\sqrt{x}-5\sqrt{y}} - 3\sqrt{y} =$
$= 2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} - 3\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

Если $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 6$, то $2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 2 \cdot 6 = 12$.

*Ответ:* 12.

**22.** Скорость сближения автомобилистов равна $42+48 = 90$ (км/ч). Первый автомобилист останавливался на 15 мин $= \dfrac{1}{4}$ ч, за это время второй автомобилист проехал $48 \cdot \dfrac{1}{4} = 12$ км.

Оставшиеся $222 - 12 = 210$ км между автомобилями были ими преодолены за $\frac{210}{90} = \frac{7}{3}$ ч. За это время второй автомобилист проехал $\frac{7}{3} \cdot 48 = 112$ км. Значит, всего второй автомобилист преодолел $112 + 12 = 124$ км, это и есть искомое расстояние.

*Ответ:* 124 км.

**23.** Построим отдельно график функции при $x \geqslant 0$ и при $x < 0$.

При $x \geqslant 0$ исходная функция примет вид $y = x^2 - 8x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(4;\ -16)$, ветви направлены вверх.

При $x < 0$ исходная функция примет вид $y = -x^2 + 2x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(1; 1)$, ветви направлены вниз. Построим график исходной функции (см. рис. 90).

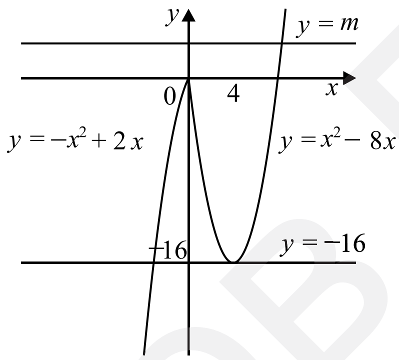


Рис. 90

Из графика видно, что у горизонтальной прямой $y = m$ будет ровно 2 точки с построенным графиком при $m = 0$ и $m = -16$.

*Ответ:* $-16; 0$

**24.** Дуга окружности содержит $360^\circ$ (см. рис. 91). Пусть $t$ — общая мера дуг, длины которых по условию относятся как $4 : 6 : 14$, тогда $4t + 6t + 14t = 360^\circ$, $24t = 360^\circ$, $t = 15^\circ$. Тогда дуги равны соответственно $60^\circ, 90^\circ, 210^\circ$. Угол треугольника измеряется половиной дуги, на которую опирается (это вписанный угол), поэтому углы треугольника равны $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$. Меньшая сторона треугольника лежит против меньшего угла, воспользуемся теоремой синусов

$\frac{a}{\sin A} = 2R$, $\frac{15}{\sin 30^\circ} = 30$.

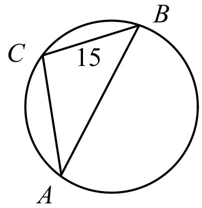


Рис. 91

*Ответ:* 30.

**25.** $OA = OB$ и $PA = PB$ как радиусы (см. рис. 92). Треугольник $ABO$ равнобедренный, поэтому высота $OK$ треугольника $ABO$ является его медианой, то есть $K$ — середина $AB$. Но медиана $PK$ равнобедренного треугольника $ABP$ будет его высотой. Следовательно,

$\angle OKA + \angle AKP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ и точки $O, K$ и $P$ лежат на одной прямой. Тогда $OP \perp AB$.

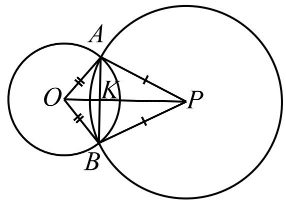


Рис. 92

**26.** Рассмотрим рисунок 93.

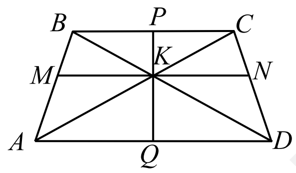


Рис. 93

На рисунке $MN \parallel AD$, $PQ \perp AD$ и проходит через точку $K$, $\dfrac{BK}{KD} = \dfrac{2}{3}$. Заметим, что четырёхугольники $MBCN$ и $AMND$ являются трапециями.

$\triangle BKC \sim \triangle AKD$, так как $\angle KBC = \angle KDA$ и $\angle KCB = \angle KAD$ по свойствам углов при параллельных прямых и секущей. Тогда $\dfrac{2}{3} = \dfrac{BK}{KD} = \dfrac{KC}{KA} = \dfrac{BC}{AD}$, поэтому $BK = \dfrac{2KD}{3}$, $BC = \dfrac{2AD}{3}$, $KC = \dfrac{2KA}{3}$.

$\triangle ABD \sim \triangle MKB$, так как $MK \parallel AD$, тогда

$$\frac{MK}{AD} = \frac{BK}{BD} = \frac{BK}{BK + KD} = \frac{\dfrac{2KD}{3}}{\dfrac{2KD}{3} + KD} = \frac{2}{5},\ MK = \frac{2AD}{5}.$$

Аналогично, из подобия треугольников $ACD$ и $NKC$ получаем, что $NK = \dfrac{2AD}{5}$. Значит, $MN = \dfrac{4AD}{5}$.

Наконец, $\triangle BPK \sim \triangle QKD$, откуда $\dfrac{PK}{QK} = \dfrac{BK}{KD} = \dfrac{2}{3}$.

Следовательно, $\dfrac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} \cdot (MN + BC) \cdot PK}{\dfrac{1}{2} \cdot (MN + AD) \cdot KQ} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\dfrac{4AD}{5} + \dfrac{2AD}{3}}{\dfrac{4AD}{5} + AD} =$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{4}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{22}{15}}{\frac{27}{15}} = \frac{44}{81}.$$

*Ответ:* $\frac{44}{81}$.

## Решение варианта 32

**21.** $\frac{49x - 36y}{7\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} - \sqrt{y} = \frac{(7\sqrt{x} - 6\sqrt{y})(7\sqrt{x} + 6\sqrt{y})}{7\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} - \sqrt{y} =$
$= 7\sqrt{x} - 6\sqrt{y} - \sqrt{y} = 7\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

Если $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5$, то $7(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 7 \cdot 5 = 35$.

*Ответ:* 35.

**22.** Скорость сближения трактористов равна $32 + 40 = 72$ (км/ч). Первый тракторист останавливался на 45 мин $= \frac{3}{4}$ ч, за это время второй тракторист проехал $40 \cdot \frac{3}{4} = 30$ км. Оставшиеся $120 - 30 = 90$ км между тракторами были ими преодолены за $\frac{90}{72} = \frac{5}{4}$ (ч). За это время второй тракторист проехал $\frac{5}{4} \cdot 40 = 50$ (км). Значит, всего второй тракторист преодолел $50 + 30 = 80$ км, это и есть искомое расстояние.

*Ответ:* 80 км.

**23.** Построим отдельно график функции при $x \geqslant 0$ и при $x < 0$.

При $x \geqslant 0$ исходная функция примет вид $y = x^2 - 2x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(1;\ -1)$, ветви направлены вверх.

При $x < 0$ исходная функция примет вид $y = -x^2 + 4x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(2; 4)$, ветви направлены вниз. Построим график исходной функции (см. рис. 94).

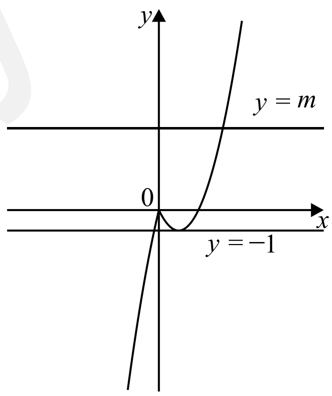


Рис. 94

Из графика видно, что у горизонтальной прямой $y = m$ будет ровно 2 точки с построенным графиком при $m = 0$ и $m = -1$.

*Ответ:* $-1;\ 0$

**24.** Дуга окружности содержит $360^\circ$ (см. рис. 95). Пусть $t$ - общая мера дуг, длины которых по условию относятся как $10 : 18 : 32$, тогда $10t + 18t + 32t = 360^\circ$, $60t = 360^\circ$, $t = 6^\circ$. Тогда дуги равны соответственно $60^\circ, 108^\circ, 192^\circ$. Угол треугольника измеряется половиной дуги, на которую опирается (это вписанный угол), поэтому углы треугольника равны $30°, 54°, 96°$. Меньшая сторона треугольника лежит против меньшего угла, воспользуемся теоремой синусов

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R,\ \dfrac{13}{\sin 30°} = 26.$

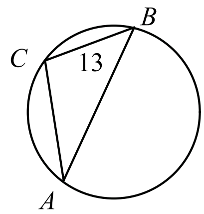


Рис. 95

*Ответ:* 26.

**25.** $OA = OB$ и $PA = PB$ как радиусы (см. рис. 96). Треугольник $ABO$ равнобедренный, поэтому высота $OK$ треугольника $ABO$ является его медианой, то есть $K$ — середина $AB$. Но медиана $PK$ равнобедренного треугольника $ABP$ будет его высотой. Следовательно, $\angle OKA + \angle AKP = 90° + 90° = 180°$ и точки $O, K$ и $P$ лежат на одной прямой. Тогда $OP \perp AB$.

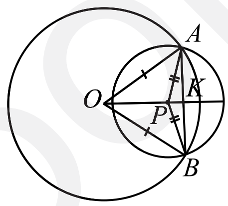


Рис. 96

**26.** Рассмотрим рисунок 97.

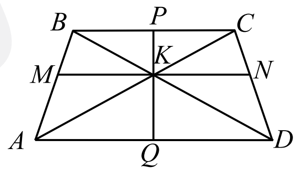


Рис. 97

На рисунке $MN \parallel AD$, $PQ \perp AD$ и проходит через точку $K$ , $\dfrac{BK}{KD} = \dfrac{2}{5}$. Заметим, что четырёхугольники $MBCN$ и $AMND$ являются трапециями.

$\triangle BKC \sim \triangle AKD$, так как $\angle KBC = \angle KDA$ и $\angle KCB = \angle KAD$ по свойствам углов при параллельных прямых и секущей. Тогда $\dfrac{2}{5} = \dfrac{BK}{KD} = \dfrac{KC}{KA} = \dfrac{BC}{AD}$, поэтому $BK = \dfrac{2KD}{5}$, $BC = \dfrac{2AD}{5}$, $KC = \dfrac{2KA}{5}$.

$\triangle ABD \sim \triangle MKB$, так как $MK \parallel AD$, тогда

$$\frac{MK}{AD} = \frac{BK}{BD} = \frac{BK}{BK+KD} = \frac{\frac{2KD}{5}}{\frac{2KD}{5}+KD} = \frac{2}{7},\ MK = \frac{2AD}{7}.$$

Аналогично, из подобия треугольников $ACD$ и $NKC$ получаем, что $NK = \frac{2AD}{7}$. Значит, $MN = \frac{4AD}{7}$.

Наконец, $\triangle BPK \sim \triangle QKD$, откуда $\frac{PK}{QK} = \frac{BK}{KD} = \frac{2}{5}$.

Следовательно, $\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(MN+BC)\cdot PK}{\frac{1}{2}\cdot(MN+AD)\cdot KQ} =$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{\frac{4AD}{7}+\frac{2AD}{5}}{\frac{4AD}{7}+AD} = \frac{2}{5}\cdot\frac{\frac{4}{7}+\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}+1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{\frac{34}{35}}{\frac{55}{35}} = \frac{68}{275}.$$

*Ответ:* $\frac{68}{275}$.

## Решение варианта 34

**21.** $\begin{cases}(5x+y)^2 = 6y, & (1)\\ (5x+y)^2 = 6x. & (2)\end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение.
Получим $6y = 6x$, $y = x$.

Подставим $y = x$ во второе уравнение системы:
$(5x+x)^2 = 6x$,
$(6x)^2 = 6x$,
$36x^2 = 6x$,
$36x^2 - 6x = 0$, $6x(6x-1) = 0$.
$x_1 = 0$ или $6x - 1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{6}$.

$(0;\ 0)$ и $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$ — решения исходной системы уравнений.

*Ответ:* $(0;\ 0)$, $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$.

**22.** Расстояние в 60 км плот, двигаясь со скоростью течения, проходит за $\frac{60}{3} = 20$ (часов). Моторная лодка была в пути на 5 часов меньше, то есть $20-5 = 15$ (часов). Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна $x$ км/ч ($x > 3$). Тогда 108 км по течению лодка пройдёт за $\frac{108}{x+3}$ (часов), а 108 (км) против течения — за $\frac{108}{x-3}$ часов. Составим и решим уравнение

$\dfrac{108}{x-3}+\dfrac{108}{x+3}=15$; $\dfrac{36}{x-3}+\dfrac{36}{x+3}=5$; домножим числитель и знаменатель на $(x-3)(x+3)$; получим $36(x+3)+36(x-3)=5(x-3)(x+3)$; $5(x^2-9)-72x=0$; $5x^2-72x-45=0$; $x_{1,2}=\dfrac{36\pm\sqrt{1296+5\cdot 45}}{5}=\dfrac{36\pm\sqrt{1521}}{5}=\dfrac{36\pm 39}{5}$; $x_1=15$; $x_2=-\dfrac{3}{5}$. Учитывая, что $x>3$, получим, что скорость моторной лодки в неподвижной воде равна 15 км/ч.

*Ответ:* 15 км/ч.

**23.** ОДЗ $x\neq 0$.

Если $3x-\dfrac{3}{x}\geqslant 0$, то исходная функция примет вид $y=\dfrac{1}{2}\left(\left(3x-\dfrac{3}{x}\right)-3x-\dfrac{3}{x}\right)=-\dfrac{3}{x}$.

Если $3x-\dfrac{3}{x}<0$, то исходная функция примет вид $y=\dfrac{1}{2}\left(-\left(3x-\dfrac{3}{x}\right)-3x-\dfrac{3}{x}\right)=-3x$.

Решим неравенство $3x-\dfrac{3}{x}\geqslant 0$, $\dfrac{3x^2-3}{x}\geqslant 0$, $\dfrac{3(x-1)(x+1)}{x}\geqslant 0$, $x\in[-1;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$.

Аналогично, $3x-\dfrac{3}{x}<0$ при $x\in(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 1)$.

Заметим, что $y(-1)=3$, $y(1)=-3$.

Для $x\in[-1;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$ построим график функции $y=-\dfrac{3}{x}$, а для $x\in(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 1)$ график функции $y=-3x$.

Из рисунка 98 видно, что горизонтальная прямая $y=m$ имеет ровно 2 общие точки с построенным графиком при $-3<m<0$ и $m>3$.

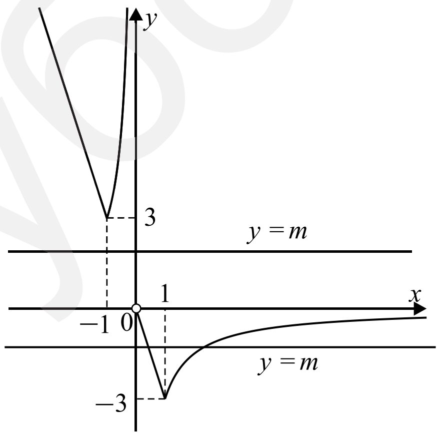


Рис. 98

*Ответ:* $(-3;0)\cup(3;\ +\infty)$.

**24.** Треугольник $BKM$ равнобедренный ($BM=BK$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки) (см. рис. 99). $\angle BMK$ измеряется половиной дуги $MK$, заключённой между касательной $BM$ и хордой $MK$. $\angle MPK=\angle BMK$ как вписанный угол, который измеряется половиной дуги $MK$. Получим
$\angle MPK=\angle BMK=\angle BKM=68°$.

$\angle MBK=180°-2\cdot 68°=44°$. $\angle AMP=180°-55°-68°=57°$. Из равнобедренного треугольника $AMP$ ($AM=AP$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки) $\angle BAC=180°-2\cdot 57°=66°$. $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=180°-(66°+44°)=70°$.

*Ответ:* 66; 44; 70.

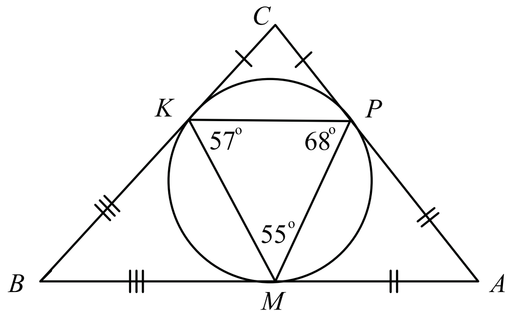


Рис. 99

**25.** Опишем около треугольника $KBN$ окружность и на её дуге $KN$ отметим произвольную точку $E$, расположенную в той полуплоскости, в которой нет точек $B$ и $M$ (см. рис. 100). По построению четырёхугольник $KBNE$ вписан в эту окружность, поэтому $\angle KBN + \angle KEN = 180°$. По условию $\angle KBN = \angle KMN$, поэтому $\angle KMN + \angle KEN = 180°$. Значит, в четырёхугольнике $KMNE$ сумма противоположных углов $KMN$ и $KEN$ равна $180°$, а следовательно, четырёхугольник $KMNE$ также вписан в эту окружность. Значит, точки $K, B, M, N$ лежат на одной окружности.

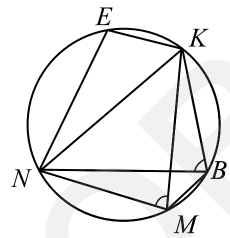


Рис. 100

Тогда углы $NKM$ и $NBM$ вписанные и опираются на одну дугу $NM$ и, следовательно, равны.

**26.** Обозначим угол $B$ треугольника $ABC$ через $\beta$ (см. рис. 101).

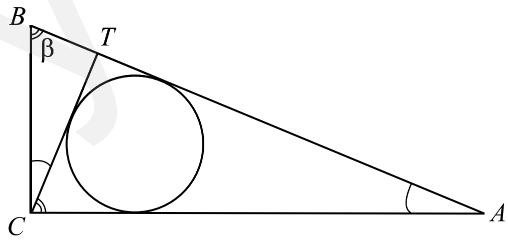


Рис. 101

Тогда $\angle ACT = \angle TBC = \beta$ и $\angle TCB = \angle TAC = 90° - \beta$. Значит $\triangle TCB \sim \triangle TCA$ по двум углам. При этом парами сходственных сторон будут $BC$ и $AC$, $CT$ и $AT$, $TB$ и $CT$.

Отсюда, $\dfrac{15}{8} = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AT}{CT} = \dfrac{CT}{TB}$.

Поэтому $AC = \dfrac{15}{8}BC, AT = \dfrac{15}{8}CT, CT = \dfrac{15}{8}BT$.

Обозначим через $S_1$ площадь треугольника $TCB$, через $r_1$ радиус окружности, вписанной в треугольник $TCB$, а через $p_1$ полупериметр треугольника $TCB$. Аналогично, через $S_2$, $r_2$ и $p_2$ соответственно площадь, радиус вписанной окружности и полупериметр треугольника $TCA$.

Известно, что радиус $r$ вписанной в треугольник окружности находится по формуле $r=\dfrac{S}{p}$, где $S$ — площадь треугольника, а $p$ — полупериметр.

Тогда $r_2=\dfrac{S_2}{p_2}=\dfrac{\frac{1}{2}AC\cdot TC\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}(TC+AC+AT)}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{8}BC\cdot\frac{15}{8}BT\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}\left(\frac{15}{8}BT+\frac{15}{8}BC+\frac{15}{8}CT\right)}=\frac{\frac{15}{8}\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BT\cdot\sin\beta}{\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot(BT+BC+CT)}=$$

$$=\frac{\frac{15}{8}S_1}{p_1}=\frac{15}{8}r_1.$$

Так как $r_2=30$, то $r_1=\dfrac{8}{15}r_2=\dfrac{8}{15}\cdot 30=16$.

*Ответ:* 16.

## Решение варианта 35

**21.** $f(x-2)=4^{9-x}$.
По условию надо найти $f(5)$, следовательно, $x-2=5$, $x=7$. $f(5)=4^{9-7}=4^2=16$.
*Ответ:* 16.

**22.** По условию скорость первого человека равна 2,5 км/ч, а второго — 3,5 км/ч. Тогда от точки отправления до опушки леса второй человек доберётся за $\dfrac{4{,}8}{3{,}5}$ ч, за это время первый пройдёт $\dfrac{4{,}8}{3{,}5}\cdot 2{,}5$ км. Таким образом, в момент, когда второй человек поворачивает обратно, между первым и вторым человеком будет расстояние $\left(4{,}8-\dfrac{4{,}8}{3{,}5}\cdot 2{,}5\right)$ км. Скорость их сближения равна $2{,}5+3{,}5=6$ (км/ч). Поэтому они встретятся через $\dfrac{4{,}8-\frac{4{,}8}{3{,}5}\cdot 2{,}5}{6}=\dfrac{4{,}8}{6}\cdot\left(1-\dfrac{2{,}5}{3{,}5}\right)=0{,}8\cdot\dfrac{10}{35}=\dfrac{8}{35}$ ч после поворота второго человека. Значит, от момента начала движения пройдёт $\dfrac{4{,}8}{3{,}5}+\dfrac{8}{35}=\dfrac{48+8}{35}=\dfrac{8}{5}$ ч. За это время первый человек пройдёт $\dfrac{8}{5}\cdot 2{,}5=4$ км. Значит, встреча произойдёт на расстоянии 4 км от точки отправления.

*Ответ:* 4

**23.** Построим график функции $y=x^2+3x-10$ (см. рис. 102).

Это парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с абсциссой $x_0=-\dfrac{3}{2}=-1{,}5$ и ординатой $y_0=x_0^2+3x_0-10=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}-10=-12{,}25$. График функции $y=|x^2+3x-10|$ получится, если отразить часть параболы, находящуюся ниже оси абсцисс, относительно оси абсцисс. Из рисунка видно, что горизонтальная прямая

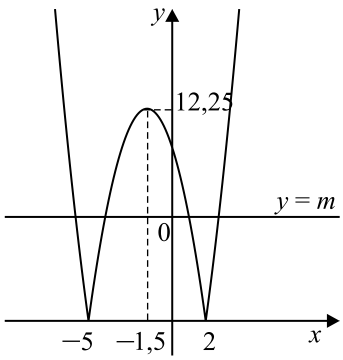


Рис. 102

$y = m$ пересекает график функции $y = |x^2 + 3x - 10|$ в двух, трёх, четырёх точках, либо вообще не пересекает. Наибольшее количество общих точек равно 4.

*Ответ:* 4

**24.** По условию прямой угол $PBK$ вписан в окружность (см. рис. 103), следовательно, он опирается на диаметр $PK$, равный диаметру $BH$, значит,
$PK = 17$.

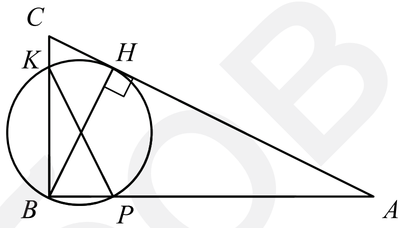


Рис. 103

*Ответ:* 17.

**25.** Углы $PTK$ и $PSK$ прямые, поэтому точки $S$ и $T$ лежат на окружности с диаметром $PK$. Треугольник $PKM$ остроугольный, поэтому основания высот лежат на сторонах треугольника.

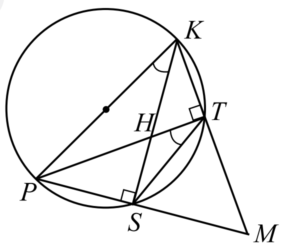


Рис. 104

Значит, точки $P, S, T, K$ лежат на одной окружности в указанном порядке, и углы $PTS$ и $PKS$ равны как вписанные и опирающиеся на одну дугу.

**26.** Обозначим через $O$ точку пересечения боковых сторон трапеции, а через $T$ — точку касания указанной в условии окружности с прямой $CD$. Рассмотрим рисунок 105.

Заметим, что указанная в условии задачи окружность является описанной около треугольника $ABT$. Для нахождения радиуса $R$ этой окружности найдём площадь треуголь-

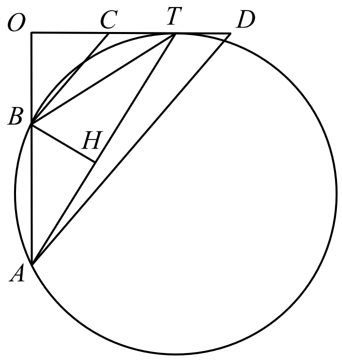


Рис. 105

ника $ABT$. Из формулы $S = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ (где $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника) получаем $R = \dfrac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}}$.

В треугольнике $AOD$ сумма углов $A$ и $D$ по условию равна $90°$, значит, в треугольнике $AOD$ угол $O$ является прямым. Так как $BC \parallel AD$, то $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, поэтому $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{21}{7} = 3 = \dfrac{AO}{BO}$, $AO = 3BO$, $AB = 2BO$. Но $AB = 12$, поэтому $BO = 6$ и $AO = 18$.

По свойству касательной $OT$ и секущей $OA$, проведённых из одной точки к окружности, получаем: $OT^2 = OA \cdot OB$; $OT^2 = 18 \cdot 6$; $OT^2 = 108$.

По теореме Пифагора $BT^2 = BO^2 + OT^2 = 36 + 108 = 144$, $BT = 12$.

$AT^2 = AO^2 + OT^2 = 18^2 + 108 = 324 + 108 = 432$, $AT = 12\sqrt{3}$.

На рисунке 105 $BH \perp AT$, поэтому $S_{ABT} = \dfrac{1}{2}AT \cdot BH$. Так как треугольник $ABT$ является равнобедренным, то $S_{ABT} = \dfrac{1}{2}AT \cdot \sqrt{AB^2 - (\dfrac{1}{2}AT)^2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{144 - (6\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}.$$

$$R = \frac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3} \cdot 12}{4 \cdot 36\sqrt{3}} = 12.$$

*Ответ:* 12.

## Решение варианта 36

**21.** $f(2x - 3) = 21 - 5x$.

По условию надо найти $f(7)$, следовательно, $2x - 3 = 7$, $x = 5$.

$f(7) = 21 - 5 \cdot 5 = 21 - 25 = -4$.

*Ответ:* $-4$.

**22.** По условию скорость пешехода равна 2,8 км/ч, а велосипедиста — 12,6 км/ч. Тогда от точки отправления до опушки леса велосипедист доберётся за $\dfrac{5{,}5}{12{,}6} = \dfrac{55}{126}$ (ч), за это время пешеход пройдёт $\dfrac{55}{126} \cdot 2{,}8 = \dfrac{154}{126} = \dfrac{11}{9}$ км. Таким образом, в момент, когда велосипедист поворачивает обратно, между пешеходом и велосипедистом будет расстояние $\left(5{,}5 - \dfrac{11}{9}\right) = 11 \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{77}{18}$ км. Скорость их сближения равна $2{,}8 + 12{,}6 = 15{,}4$ (км/ч).

Поэтому они встретятся через $\dfrac{\frac{77}{18}}{15{,}4} = \dfrac{770}{18 \cdot 154} = \dfrac{5}{18}$ ч после поворота велосипедиста. Значит, от момента начала движения пройдёт $\dfrac{55}{126} + \dfrac{5}{18} = \dfrac{90}{126} = \dfrac{5}{7}$ ч. За это время пешеход пройдёт $\dfrac{5}{7} \cdot 2{,}8 = 2$ км. Значит, встреча произойдёт на расстоянии 2 км от точки отправления.

*Ответ:* 2.

**23.** Построим график функции $y = x^2 - 3x - 4$. Это парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{-3}{2} = 1{,}5$ и ординатой $y_0 = x_0^2 - 3x_0 - 4 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} - 4 = -6{,}25$. График функции $y = |x^2 - 3x - 4|$ получится, если отразить часть параболы, находящуюся ниже оси абсцисс, относительно оси абсцисс. Из рисунка 106 видно, что горизонтальная прямая $y = m$ пересекает график функции $y = |x^2 - 3x - 4|$ в двух, трёх, четырёх точках, либо вообще не пересекает. Наибольшее количество общих точек равно 4.

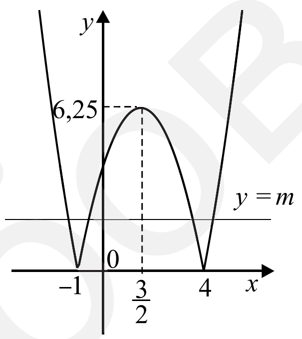


Рис. 106

*Ответ:* 4

**24.** По условию прямой угол $PBK$ вписан в окружность (см. рис. 107), следовательно, он опирается на диаметр $PK$, равный диаметру $BH$, значит,
$PK = 15$.

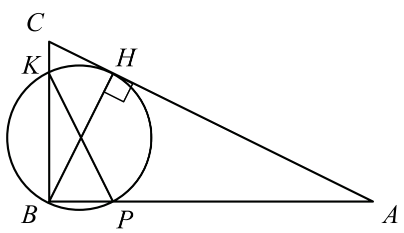


Рис. 107

*Ответ:* 15.

**25.** Углы $RTK$ и $RCK$ прямые, поэтому точки $C$ и $T$ лежат на окружности с диаметром $RK$. Треугольник $RKN$ остроугольный, поэтому основания высот лежат на сторонах треугольника.

Значит, точки $R$, $C$, $T$, $K$ лежат на одной окружности в указанном порядке, хорды $RT$ и $KC$ пересекаются в точке $A$ и по теореме о хордах $RA \cdot AT = KA \cdot AC$.

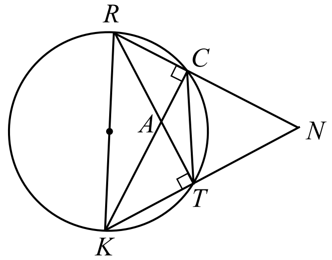


Рис. 108

**26.** Обозначим через $O$ точку пересечения боковых сторон трапеции, а через $T$ точку касания указанной в условии окружности с прямой $CD$. Рассмотрим рисунок 109.

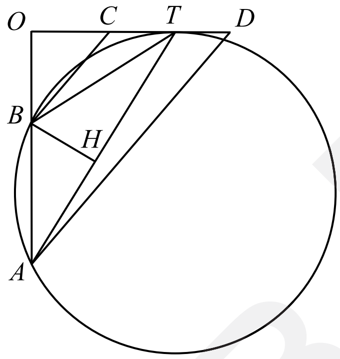


Рис. 109

Заметим, что указанная в условии задачи окружность является описанной около треугольника $ABT$. Для нахождения радиуса $R$ этой окружности найдём площадь треугольника $ABT$. Из формулы $S = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ (где $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника) получаем $R = \dfrac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}}$.

В треугольнике $AOD$ сумма углов $A$ и $D$ по условию равна $90°$, значит, в треугольнике $AOD$ угол $O$ является прямым. Так как $BC \parallel AD$, то $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, поэтому $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{15}{5} = 3 = \dfrac{AO}{BO}$, $AO = 3BO$, $AB = 2BO$. Но $AB = 6$, поэтому $BO = 3$ и $AO = 9$.

По свойству касательной $OT$ и секущей $OA$, проведённых из одной точки к окружности, получаем: $OT^2 = OA \cdot OB$; $OT^2 = 9 \cdot 3$; $OT^2 = 27$.

По теореме Пифагора $BT^2 = BO^2 + OT^2 = 9 + 27 = 36$, $BT = 6$.

$AT^2 = AO^2 + OT^2 = 9^2 + 27 = 81 + 27 = 108$, $AT = 6\sqrt{3}$.

На рисунке 109 $BH \perp AT$, поэтому $S_{ABT} = \dfrac{1}{2}AT \cdot BH$. Так как треугольник $ABT$ является равнобедренным, то $S_{ABT} = \dfrac{1}{2}AT \cdot \sqrt{AB^2 - (\frac{1}{2}AT)^2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{36 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}.$$

$$R = \frac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6}{4 \cdot 9\sqrt{3}} = 6.$$

*Ответ:* 6.

## Решение варианта 38

**21.** $\dfrac{4a - 9b + 8}{9a - 4b + 8} = 9,$
$4a - 9b + 8 = 81a - 36b + 72,$
$81a - 36b + 72 - 4a + 9b - 8 = 0,$
$77a - 27b + 64 = 0,$
$77a - 27b + 70 - 6 = 0,$
$77a - 27b + 70 = 6.$
*Ответ:* 6.

**22.** Третий велосипедист выехал через $1 + 2 = 3$ (ч) после выезда первого. Пусть все велосипедисты выехали из пункта $A$. Через 3 часа после начала движения первый велосипедист будет на расстоянии $3 \cdot 16 = 48$ км (к тому времени он был в пути 3 часа), а второй — на расстоянии 20 км (к тому времени он был в пути 1 час). Пусть скорость третьего велосипедиста равна $v$ км/ч ($v > 20$). Тогда его скорость сближения с первым равна $(v - 16)$ км/ч, а со вторым — $(v - 20)$ км/ч. Значит, первого он догонит через $\dfrac{48}{v-16}$ ч, а второго — через $\dfrac{20}{v-20}$ ч. По условию задачи должно выполняться равенство $\dfrac{48}{v-16} - \dfrac{20}{v-20} = 1$; $48(v - 20) - 20(v - 16) = (v - 16)(v - 20)$; $28v - 640 = v^2 - 36v + 320$; $v^2 - 64v + 960 = 0$, $v_1 = 24$, $v_2 = 40$. Из этих значений только $v = 24$ удовлетворяет условию $20 < v < 35$. Значит, искомая скорость равна 24 км/ч.

*Ответ:* 24.

**23.** Графиком функции $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ является парабола с вершиной в точке $(3;\ 0)$, ветви параболы направлены вверх. При этом $(5-3)^2 = 4$, то есть парабола проходит через точку $(5;\ 4)$. Графиком функции $y = \dfrac{20}{x}$ является гипербола, также проходящая через точку $(5;\ 4)$.

Построим исходную кусочно заданную функцию (см. рис. 110).

Из рисунка видно, что горизонтальная прямая $y = m$ имеет единственную точку пересечения с построенным графиком при $m = 0$ и $m > 4$.

Значит, условию удовлетворяют значения $m$ из множества $\{0\} \cup (4;\ +\infty)$.

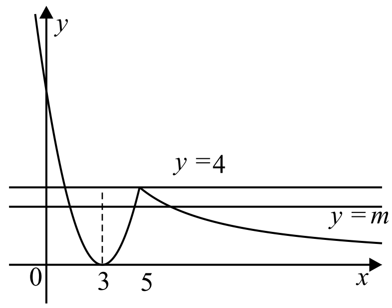


Рис. 110

*Ответ:* $\{0\} \cup (4;\ +\infty)$.

**24.** Пусть $O$ — центр окружности, $DC$ — диаметр (см. рис. 111). Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть:

$AB^2 = AC \cdot AD$, так как $AB = 11$, а $AC = 55$, то $11^2 = 55 \cdot AD$, откуда $AD = 2{,}2$. Тогда $DC = AC - AD$, $DC = 55 - 2{,}2 = 52{,}8$.

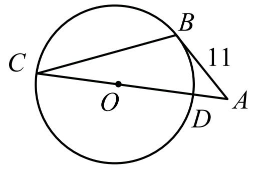


Рис. 111

*Ответ:* 52,8.

**25.** Углы $RTK$ и $RCK$ прямые, поэтому точки $C$ и $T$ лежат на окружности с диаметром $RK$ (см. рис. 112). Треугольник $RKP$ остроугольный, поэтому основания высот лежат на сторонах треугольника.

Значит, точки $R$, $C$, $T$, $K$ лежат на одной окружности в указанном порядке.

$\angle PCT = \angle 2 + \angle 4$ как внешний угол треугольника $RCT$.

$\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одни и те же дуги.

$\angle PKR = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Значит, $\angle PCT = \angle PKR$.

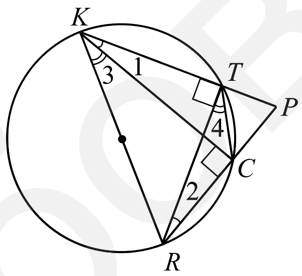


Рис. 112

У треугольников $KRP$ и $CTP$ угол $P$ общий, $\angle PCT = \angle PKR$, поэтому треугольники $KRP$ и $CTP$ подобны.

**26.** В соответствии с условием рассмотрим рисунок 113.

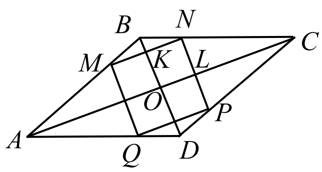


Рис. 113

Пусть $AC-$ большая диагональ и $AC = d_1$, а $BD = d_2$, тогда по условию $d_2 = \dfrac{2}{5}d_1$, $d_1 = \dfrac{5}{2}d_2$. Обозначим через $a$ сторону ромба $MNPQ$ и через $\alpha$ угол $COD$ между диагоналями параллелограмма. Тогда $\alpha$ будет углом между соответствующими сторонами ромба. Отсюда получаем, что $\dfrac{S_{MQPN}}{S_{ABCD}} = \dfrac{a^2 \cdot \sin\alpha}{\dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha} = 2 \cdot \dfrac{a}{d_1} \cdot \dfrac{a}{d_2}$.

$\triangle AOB \sim \triangle MKB$ и $\triangle COB \sim \triangle NKB$, откуда $\dfrac{AO}{MK} = \dfrac{BO}{BK} = \dfrac{OC}{KN}$. Но $AO = OC$, поэтому $MK = KN = \dfrac{a}{2}$. Аналогично, $NL = LP = \dfrac{a}{2}$. Так как $BD \parallel NP$, то $OK = NL = \dfrac{a}{2}$.

Следовательно, из равенства $\dfrac{AO}{MK} = \dfrac{BO}{BK}$ вытекает, что $\dfrac{\frac{d_1}{2}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{d_2}{2}}{\frac{d_2}{2} - \frac{a}{2}}$, $\dfrac{a}{d_1} = \dfrac{d_2 - a}{d_2}$, $\dfrac{a}{d_1} = 1 - \dfrac{a}{d_2}$, $\dfrac{a}{d_1} + \dfrac{a}{d_2} = 1$.

Отсюда получаем: $\dfrac{a}{\frac{5}{2}d_2} + \dfrac{a}{d_2} = 1$, $\dfrac{2a}{5d_2} + \dfrac{a}{d_2} = 1$, $\dfrac{7a}{5d_2} = 1$, $\dfrac{a}{d_2} = \dfrac{5}{7}$;

$\dfrac{a}{d_1} + \dfrac{a}{\frac{2}{5}d_1} = 1$, $\dfrac{a}{d_1} + \dfrac{5a}{2d_1} = 1$, $\dfrac{7a}{2d_1} = 1$, $\dfrac{a}{d_1} = \dfrac{2}{7}$. Поэтому $\dfrac{S_{MQNP}}{S_{ABCD}} = 2 \cdot \dfrac{a}{d_1} \cdot \dfrac{a}{d_2} = 2 \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{20}{49}$.

*Ответ:* $\dfrac{20}{49}$.

## Решение варианта 39

**21.** 1. $p(a) = \dfrac{a(8-a)}{a-4}$.

2. $p(8-a) = \dfrac{(8-a)(8-(8-a))}{(8-a)-4} = \dfrac{a(8-a)}{(4-a)}$.

3. $\dfrac{p(a)}{p(8-a)} = \dfrac{a(8-a)}{a-4} : \dfrac{a(8-a)}{4-a} = \dfrac{a(8-a)(4-a)}{(a-4)a(8-a)} = -\dfrac{a-4}{a-4} =$
$= -1$.

*Ответ:* $-1$.

**22.** Пусть концентрация первого раствора массой 40 кг равна $x\%$, а концентрация второго раствора — $y\%$.

В первом растворе содержится $\dfrac{x}{100} \cdot 40$ кг кислоты, во втором — $\dfrac{y}{100} \cdot 35$ кг кислоты. Тогда концентрация смеси составит $\dfrac{\frac{x}{100} \cdot 40 + \frac{y}{100} \cdot 35}{75} \cdot 100\%$, что по условию равно $34\%$. Получим уравнение $\dfrac{40}{75}x + \dfrac{35}{75}y = 25{,}5$, $\dfrac{8}{15}x + \dfrac{7}{15}y = 25{,}5$, $8x + 7y = 510$.

Если мы возьмём равные массы $M$ (в килограммах) этих растворов, то полученная смесь будет иметь массу $2M$ и будет содержать $\dfrac{x}{100}M + \dfrac{y}{100}M$ кг кислоты. Значит, её концентрация равна $\dfrac{\frac{x}{100}M + \frac{y}{100}M}{2M} \cdot 100\%$, что по условию равно $33\%$. Отсюда $\dfrac{x+y}{2} = 33$, $x + y = 66$.

Подставим $y = 66 - x$ в уравнение $8x + 7y = 510$, получим $8x + 7(66 - x) = 510$, $8x + 462 - 7x = 510$, $x = 48$.

Значит, в первом растворе содержится $\frac{48}{100} \cdot 40 = 19{,}2$ кг кислоты.

*Ответ:* 19,2.

**23.** Заметим, что функция $y = x^2 - 4|x| + 1$ — чётная ($y(-x) = (-x)^2 + 4|-x| + 1 = y(x)$). При $x \geqslant 0$ функция примет вид $y = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 3 = (x - 2)^2 - 3$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(2;\ -3)$, ветви направлены вверх. Часть графика при $x < 0$ получим, отразив график при $x > 0$ относительно оси $Oy$ (см. рис. 114).

Из рисунка 114 видно, что горизонтальная прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = x^2 - 4|x| + 1$ две, три или четыре общих точки (либо не имеет их вообще).

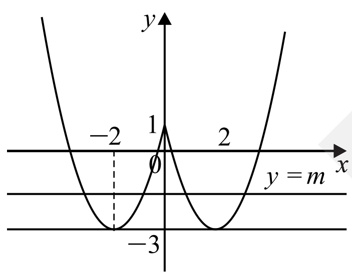


Рис. 114

*Ответ:* 4

**24.** Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° (см. рис. 115), т.е. $\angle KPC = 180° - \angle ABC$, поэтому $\angle APK = \angle ABC$. Это означает, что

$\triangle ABC \sim \triangle AKP$ по двум углам: $\angle A$ общий, $\angle APK = \angle ABC$. Тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC}$. По условию $AC = 2BC$, тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{8}{2BC}$, откуда $KP = 4$.

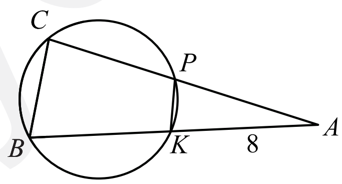


Рис. 115

*Ответ:* 4.

**25.** Обозначим точки касания общей касательной с окружностями $M$ и $N$.

Треугольники $AMC$ и $BNC$ подобны, так как $\angle ACM = \angle BCN$ как вертикальные, а $\angle AMC = \angle BNC = 90°$ как углы между касательной и радиусом, проведённым к точке касания. Соответственные стороны подобных треугольников пропорциональны: $AC : CB = MA : BN = 3 : 5$. Значит, и диаметры этих окружностей относятся также как 3 : 5.

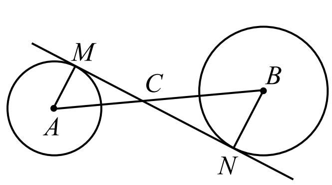


Рис. 116

**26.** Рассмотрим рисунок 117.

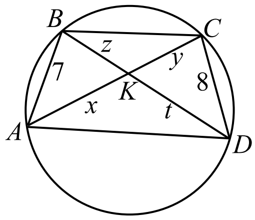


Рис. 117

Пусть угол $AKB$ равен $60°$, тогда угол $BKC$ равен $120°$. Обозначим $AK = x$, $KC = y$, $BK = z$, $KD = t$ (см. рис. 117) и через $R$ радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$.

Заметим, что он совпадает с радиусом окружности, описанной около треугольника $ABC$.

По свойству вписанных углов получаем: $\angle KAB = \angle KDC$ и $\angle KBA = \angle KCD$.

Значит, $\triangle KAB \sim \triangle KDC$, откуда $\frac{z}{7} = \frac{y}{8}$, поэтому $z = \frac{7y}{8}$.

Пусть $BC = a$, тогда по теореме косинусов получаем:
$a^2 = z^2 + y^2 - 2z \cdot y \cdot \cos \angle BKC = z^2 + y^2 - 2z \cdot y \cdot \cos 120°$.

Но $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, поэтому $a^2 = z^2 + y^2 + z \cdot y$,

$$a^2 = \left(\frac{7y}{8}\right)^2 + y^2 + \frac{7y}{8} \cdot y = \frac{(49+64+56) \cdot y^2}{64} = \frac{169y^2}{64},\ a = \frac{13y}{8}.$$

Радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, совпадает с $R$. Воспользуемся известной формулой $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$, которую несложно доказать.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$, из теоремы синусов $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$, $\sin \angle ABC = \frac{AC}{2R}$.

Тогда $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$. Следовательно, $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{7 \cdot (x+y) \cdot \frac{13y}{8}}{4S_{ABC}}$.

При этом $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{BKC} = \frac{1}{2} x \cdot z \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} y \cdot z \cdot \sin 120°$.

Но $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} x \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} y \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} z \cdot (x+y)$.

Поэтому $R = \dfrac{7 \cdot (x+y) \cdot \frac{13y}{8}}{4\frac{\sqrt{3}}{4} z \cdot (x+y)} = \dfrac{\frac{91}{8} y}{\sqrt{3} z} = \dfrac{\frac{91}{8} y}{\sqrt{3} \cdot \frac{7y}{8}} = \dfrac{91}{7\sqrt{3}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}}$.

*Ответ:* $\frac{13}{\sqrt{3}}$.

## Решение варианта 40

**21.** 1. $m(a) = \left(a + \frac{2}{a}\right)\left(2a + \frac{1}{a}\right)$.

2. $m\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{\frac{1}{a}}\right)\left(\frac{2}{a} + a\right) = \left(\frac{1}{a} + 2a\right)\left(\frac{2}{a} + a\right)$.

3. $\dfrac{m(a)}{m\left(\frac{1}{a}\right)} = \dfrac{\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(2a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + 2a\right)\left(\frac{2}{a} + a\right)} = 1$.

*Ответ:* 1.

**22.** Пусть концентрация первого раствора массой 80 кг равна $x\%$, а концентрация второго раствора — $y\%$.

В первом растворе содержится $\frac{x}{100} \cdot 80$ кг кислоты, во втором — $\frac{y}{100} \cdot 70$ кг кислоты. Тогда концентрация составит $\dfrac{\frac{x}{100} \cdot 80 + \frac{y}{100} \cdot 70}{80 + 70} \cdot 100\%$, что по условию равно 76%. Получим уравнение $\frac{80}{150}x + \frac{70}{150}y = 76$, $\frac{8}{15}x + \frac{7}{15}y = 76$, $8x + 7y = 1140$.

Если мы возьмём равные массы $M$ (в килограммах) этих растворов, то полученная смесь будет иметь массу $2M$ и будет содержать $\frac{x}{100}M + \frac{y}{100}M$ кг кислоты. Значит, её концентрация равна $\dfrac{\frac{x}{100}M + \frac{y}{100}M}{2M} \cdot 100\%$, что по условию равно 75%. Отсюда $\frac{x+y}{2} = 75$, $x + y = 150$.

Подставим $y = 150 - x$ в уравнение $8x + 7y = 1140$, получим $8x + 7(150 - x) = 1140$, $8x + 1050 - 7x = 1140$, $x = 90$.

*Ответ:* 72.

**23.** При $x \geqslant 0$ исходная функция имеет вид $y = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(2;\ 4)$, ветви которой направлены вверх.

При $x < 0$ исходная функция имеет вид $y = x^2 + 8x + 8 = (x + 4)^2 - 8$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(-4;\ -8)$, ветви которой направлены вверх.

Ясно, что $y(0) = 8$.

Из рисунка 118 видно, что горизонтальная прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = x^2 - 6|x| + 2x + 8$ одну общую точку при $m = -8$, две общие точки — при $-8 < m < 4$ и $m > 8$, три — при $m = 4$ и $m = 8$.

Таким образом, искомые значения параметра — это $m \in [-8;\ 4] \cup [8;\ +\infty)$.

*Ответ:* $[-8;\ 4] \cup [8;\ +\infty)$

**24.** Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна $180^\circ$ (см. рис. 119), т.е. $\angle KPC = 180^\circ - \angle ABC$, поэтому $\angle APK = \angle ABC$. Это означает, что $\triangle ABC \sim \triangle AKP$ по двум углам: $\angle A$ общий, $\angle APK = \angle ABC$. Тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC}$. По условию $AC = 3BC$, тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{9}{3BC}$, откуда $KP = 3$.

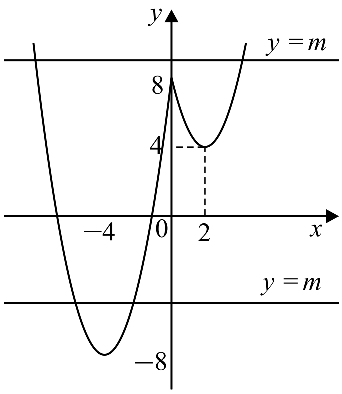


Рис. 118

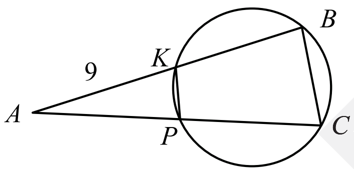


Рис. 119

*Ответ:* 3.

**25.** Обозначим точки касания общей касательной с окружностями $D$ и $E$.

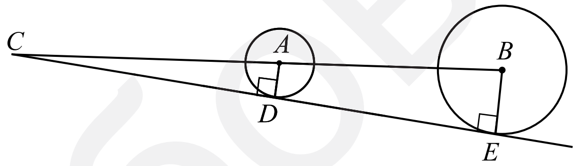


Рис. 120

Треугольники $ADC$ и $BEC$ подобны, так как $\angle ADC = \angle BEC = 90°$ как углы между касательной и радиусом, проведённым к точке касания, а $\angle ACD$ общий. $CB = CA + AB$, значит, $AC : CB = 6 : 11$. Сходственные стороны подобных треугольников пропорциональны: $AC : CB = DA : BE = 6 : 11$.

Так как $AD$ и $BE$ — радиусы данных окружностей, то утверждение доказано.

**26.** Рассмотрим рисунок 121.

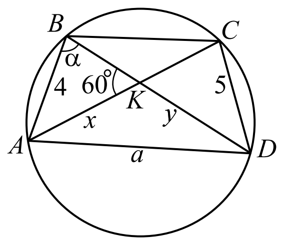


Рис. 121

Пусть $R$ — радиус описанной окружности около $ABCD$, значит, $R$ — радиус описанной окружности около треугольника $ABC$, $AK = x$, $KD = y$, $AD = a$, $\angle ABD = \alpha$. $\angle ABD = \angle ACD = \alpha$, так как они опираются на одну и ту же дугу окружности.

Из $\triangle ABK$: $\dfrac{4}{\sin 60°} = \dfrac{x}{\sin\alpha}$; $x = \dfrac{4\sin\alpha}{\sin 60°}$, $x = \dfrac{8\sin\alpha}{\sqrt{3}}$.

Из $\triangle KCD$: $\frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin\alpha}$; $y = \frac{5\sin\alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sin\alpha}{\sqrt{3}}$.

$\angle AKD = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Из $\triangle AKD$: $a^2 = AK^2 + KD^2 - 2AK \cdot KD \cdot \cos 120^\circ$; так как $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, то $a^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 60^\circ$; $a^2 = \frac{64\sin^2\alpha}{3} + \frac{100\sin^2\alpha}{3} + \frac{160\sin^2\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $a^2 = \frac{244\sin^2\alpha}{3}$.

Из $\triangle ABD$: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, $a = 2R\sin\alpha$, $a^2 = 4R^2\sin^2\alpha$. $\frac{244\sin^2\alpha}{3} = 4R^2\sin^2\alpha$; $4R^2 = \frac{244}{3}$, $R^2 = \frac{61}{3}$.

$R = \sqrt{\frac{61}{3}} = \frac{\sqrt{183}}{3}$.

*Ответ:* $\frac{\sqrt{183}}{3}$.