## Задача 18

В профильном ЕГЭ 2015 года модель задачи 18 (ранее – задача С4) не претерпела никаких изменений по сравнению с прошлым годом. Это планиметрическая задача, состоящая из двух пунктов: пункт на доказательство геометрического факта и пункт на нахождение одного из компонентов рассматриваемой конфигурации.

Задача №18 предполагала:

- владение понятиями вписанного многоугольника (треугольника. четырѐхугольника), вписанного и центрального углов, подобия треугольников;
- знание геометрических фактов, в частности, таких как признаки подобия треугольников; расположение центра окружности, описанной около треугольника; условие вписанного в окружность четырѐхугольника; теорема Пифагора и др.;
- умение проводить доказательство геометрических утверждений.

Приведѐм пример задачи № 18 и пример одного из возможных решений, предложенного участником ЕГЭ 2015 года:

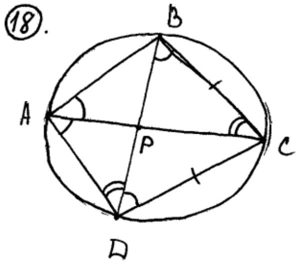
«Диагонали $AC$ и $BD$ четырѐхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке $P$, причѐм $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника $COD$, где $O$ - центр окружности, вписанной в треугольник $ABD$, если дополнительно известно, что $BD = 3, BC = 3\sqrt{2}$ ».

*Пример 1.*

(18).



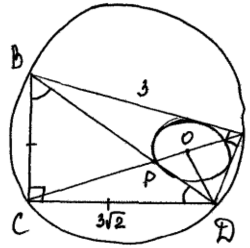

Дано: ABCD – 4$^х$ уг.
ABCD впис. в окр.
$AC \cap BD = P$
$BC = CD$
а) Д-ть: $AB : BC = AP : PD$
б) Найти: $S_{COD}$ – ?, если окр. (O, r) впис. в $\triangle ABD$
BD – диаметр. опис. окр.
$AB = 3$; $BC = 3\sqrt{2}$

Решение:

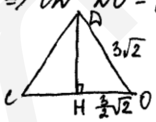
а) $BC = CD \Rightarrow \triangle BCD$ – р/б $\Rightarrow \angle DBC = \angle BDC$
$\angle DBC$ и $\angle DAC$ – впис. и опир. на $\smile DC \Rightarrow \angle DAC = \angle DBC$
$\angle BDC$ и $\angle BAC$ – впис. и опир. на $\smile BC \Rightarrow \angle BDC = \angle BAC$
$\angle ADB$ и $\angle ACB$ – впис. и опир. на $\smile AB \Rightarrow \angle ADB = \angle ACB$
$\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle ABC$ (по I приз.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PD}{BC} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AP}{PD}$ (ч.т.

б)




$\angle BAC = \angle DAC$ (по док.) $\Rightarrow AC$ – биссек. $\angle BAD$
окр. (O; r) – впис. в $\triangle ABD$ $\Rightarrow O \in AC \Rightarrow$
$\Rightarrow OD$ – биссек. $\angle BDA$.
BD – диаметр опис. около ABCD окр.
$\angle BCD$ опир. на BD $\Rightarrow \angle BCD = 90°$, $BC = CD$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BCD$ – прямоуг.; р/б $\Rightarrow \angle CBD = \angle BDC = 45°$
ABCD – впис. $\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$
$\angle C = 90°$ (по док.) $\Rightarrow \angle BAD = 90°$
$\triangle BCD$ ($\angle C = 90°$): $BD^2 = BC^2 + CD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{36} = 6$
$\triangle ABD$ ($\angle A = 90°$): $AB = 3$, $BD = 6$ $\Rightarrow \angle BDA = 30°$
OD – биссек. $\angle BDA$ $\Rightarrow \angle BDO = \angle ODA = 15°$
AO – биссек. $\angle BAD \Rightarrow \angle OAD = 45°$, $\angle ODA = 15°$ $\Rightarrow \triangle ODA$: $\angle DOA = 180° - \angle ODA - \angle OAD = 120°$
$\angle POD$ и $\angle DOA$ – смежн. $\Rightarrow \angle POD + \angle DOA = 180°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle POD = 60°$
$\angle CDO = \angle CDP + \angle PDO$, $\angle CDP = 45°$, $\angle PDO = 15°$ $\Rightarrow \angle CDO = 60°$
$\Rightarrow \triangle COD$: $\angle CDO = 60°$, $\angle COD = 60°$ $\Rightarrow \angle OCD = 60° \Rightarrow \triangle COD$ – р/с
$BC = CD = 3\sqrt{2}$
$\Rightarrow CD = DO = OC = 3\sqrt{2}$.




Дп: DH – высота $\triangle CDO$; $\triangle CDO$ – р/с $\Rightarrow$ DH – медиана $\Rightarrow HO = \frac{1}{2} CO = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\triangle DHO$ ($\angle H = 90°$): $DH = \sqrt{DO^2 - HO^2} = \sqrt{18 - \frac{9}{2}} = 3\sqrt{1\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$
$S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9}{4} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.
Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ед

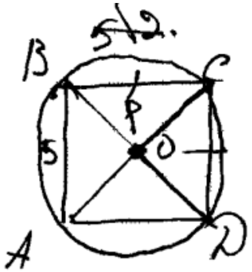
**Рис. 13.1.**

**Типичные ошибки в решениях задачи №18**

***1. Массовая ошибка, наличие которой отметили все эксперты, заключалась в том, что многие участники ЕГЭ, приступившие к решению задачи № 18, из условия вписанности четырёхугольника в окружность и равенства двух его смежных сторон делали ошибочный вывод о том, что этот четырёхугольник квадрат либо ромб.***

*Пример 2.*

18.)



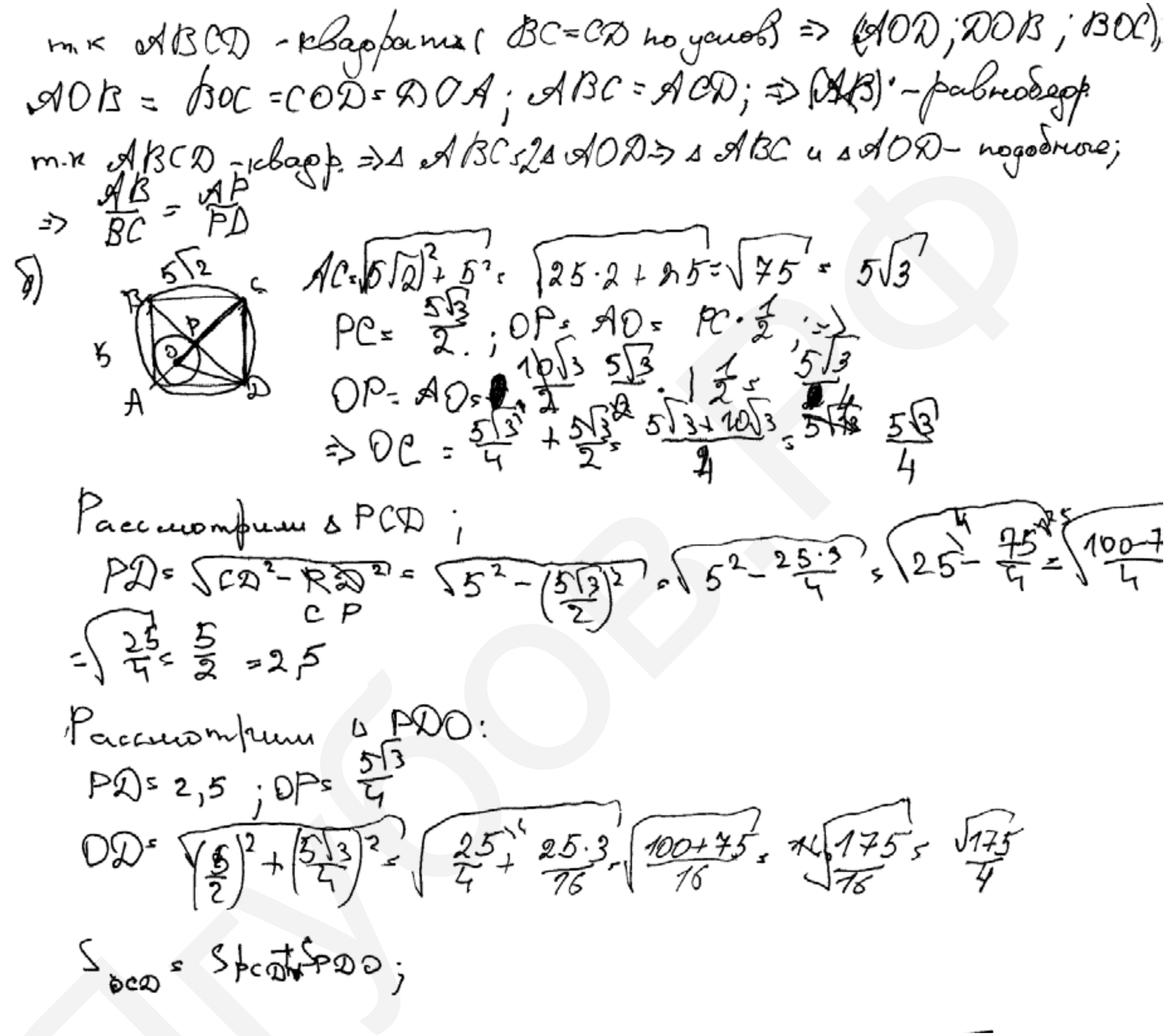

Дано: P-центр. окруж.; ~~от~~

ABCD- вписанной квадрат.

BC = CD

Док-ть, что: а) AB : BC = AP : PD

Найти: б) $S_{COD}$.


т.к $ABCD$ - квадрат и $BC=CD$ по условию $\Rightarrow$ ($AOD$; $DOB$; $BOC$),
$AOB = BOC = COD = DOA$; $ABC = ACD$; $\Rightarrow$ ($AB$)' – равнобедр.
т.к $ABCD$ - квадр. $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AOD \Rightarrow \triangle ABC$ и $\triangle AOD$ – подобные;
$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD}$

б) $AC = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{25 \cdot 2 + 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
$PC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; $OP = AO = PC \cdot \frac{1}{2}$; $\Rightarrow$
$OP = AO = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$
$\Rightarrow OC = \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3} + 10\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

Рассмотрим $\triangle PCD$;
$PD = \sqrt{CD^2 - PC^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \frac{25 \cdot 3}{4}} = \sqrt{25 - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{100-75}{4}}$
$= \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Рассмотрим $\triangle PDO$:
$PD = 2{,}5$; $OP = \frac{5\sqrt{3}}{4}$
$OD = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25 \cdot 3}{16}} = \sqrt{\frac{100+75}{16}} = \frac{\sqrt{175}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{175}}{4}$

$S_{BCD} = S_{PCD} + S_{PDO}$;

**Рис. 13.2.**

*Комментарии:* Уже при оформлении краткой записи задачи в рубрике «дано» автор этого решения указывает ошибочное условие, утверждая, что $ABCD$ - вписанный квадрат. Этот факт использован в данном решении как основной. Все остальные ошибки этого решения – следствия необоснованного допущения. Фактически рассматривается задача, отличная от сформулированной в КИМ, или частный случай этой задачи. Согласно критериям, оценка 0 баллов.

*Пример 3.*

18. а) Дано: $ABCD$ вписан в Окр. $(O)$

$BC = CD$

Доказать: $AB : BC = AP : PD$

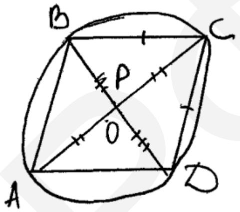
1) $ABCD$ - ромб (т.к. $BC = CD$) - по определению

$AB = AD$

2) $AO = OC$ ; $BP = PD$ (как половины диагоналей)

3) $AB \neq BC$ , $AP \neq PD$

$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD}$ ■

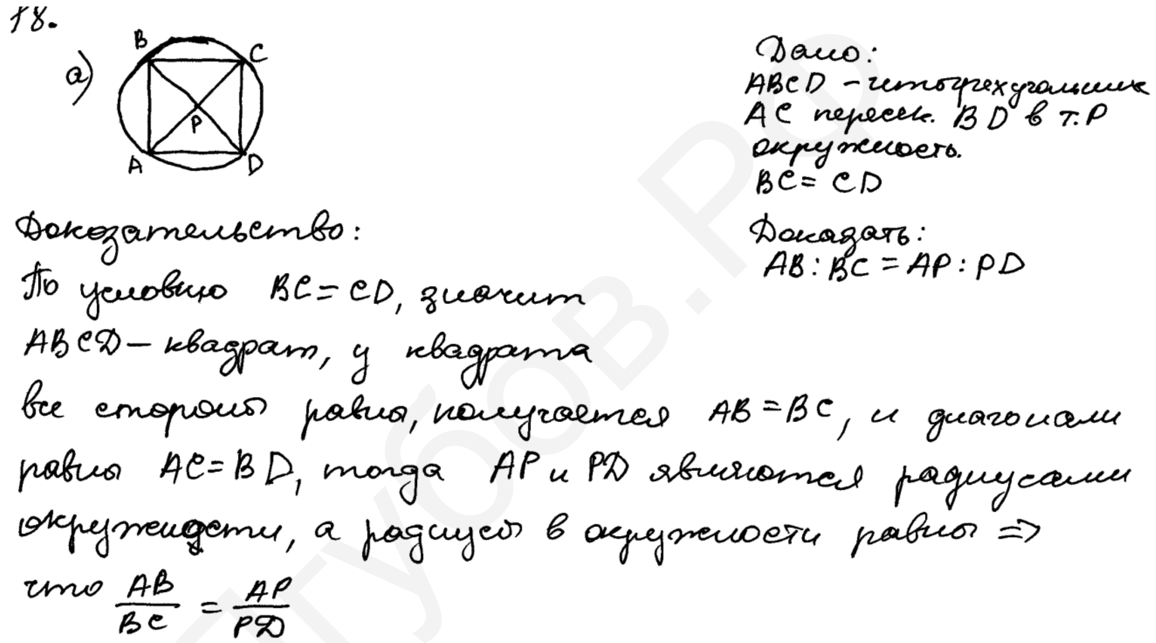



*Комментарий:* ошибочный вывод из условия о том, что $ABCD$ - ромб. Налицо незнание определения ромба. Кроме того решение содержит противоречащие друг другу записи. Согласно критериям, оценка 0 баллов.

***2. Неполнота решения – также один распространенных недостатков решений задачи № 18 (С4). В решениях часто присутствовало либо только попытка доказательства геометрического факта, либо только попытка вычисления площади.***

При неполном решении, учащимися чаще отдавалось предпочтение задаче на доказательство, нежели задаче на вычисление.

*Пример 4.*


18.

а)



Дано:
ABCD – четырехугольник
AC пересек. BD в т. P
окружность.
BC = CD
Доказать:
AB : BC = AP : PD

Доказательство:
По условию BC = CD, значит
ABCD – квадрат, у квадрата
все стороны равна, получается AB = BC, и диагонали
равна AC = BD, тогда AP и PD являются радиусами
окружности, а радиусы в окружности равны =>
что $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD}$

**Рис. 13.4.**

*Комментарий: Присутствует только попытка доказательства пункта а), причём всё с той же типичной ошибкой-заблуждением. Оценка, согласно критериям оценивания, 0 баллов.*