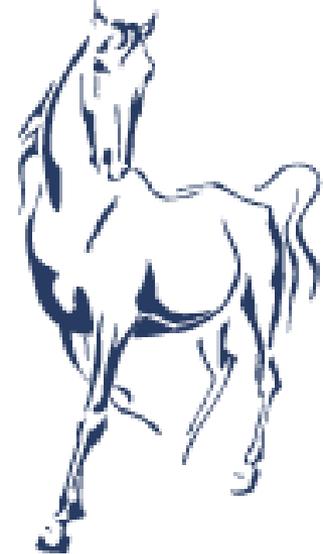


Издательство «Легион»



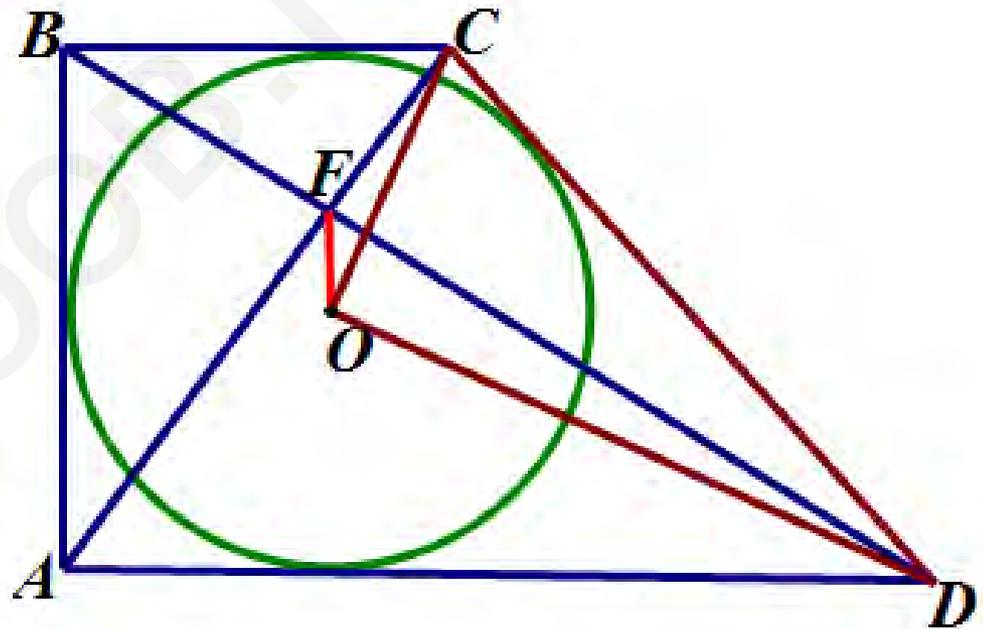
**Задачи по геометрии с
развёрнутым ответом на
профильном ЕГЭ**

Докладчик Елена Михайловна Фридман

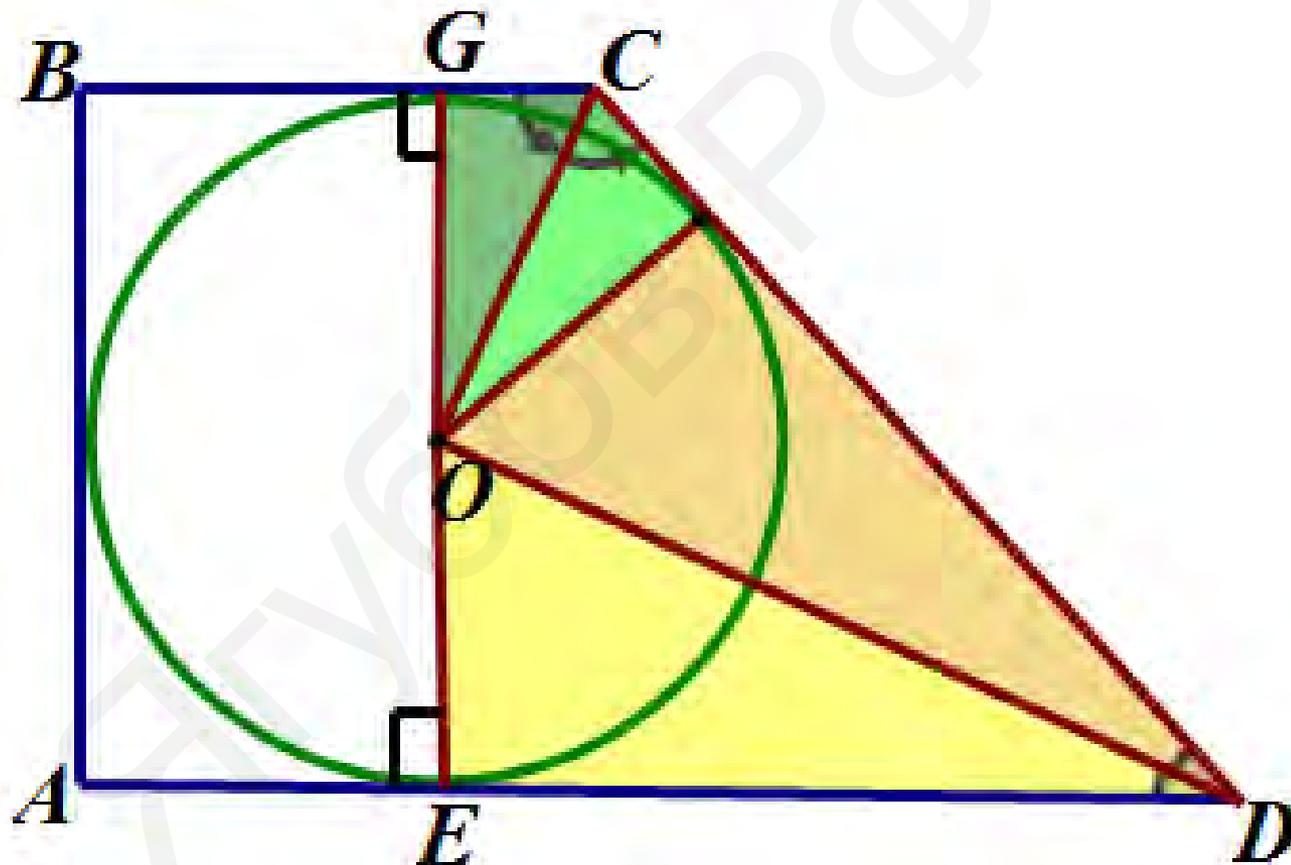
Задача 1

В прямоугольную трапецию $ABCD$ с большим основанием AD и прямыми углами A и B вписана окружность с центром в точке O .

- а) Докажите, что $CO^2 + OD^2 = CD^2$.
- б) Найдите расстояние от точки O до точки пересечения диагоналей трапеции, если высота трапеции равна 2 и $\angle ADC = 60^\circ$.

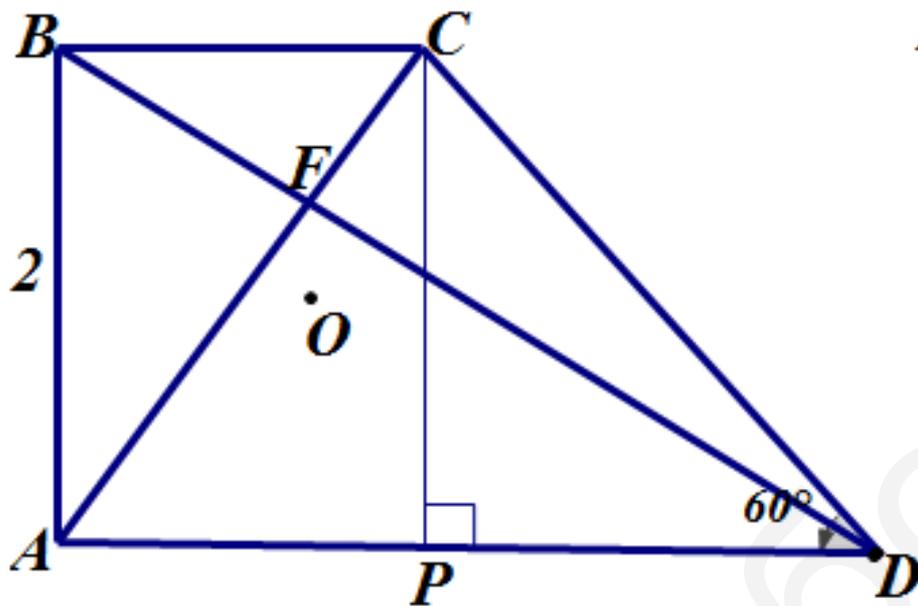


a)



б)

$$AB + CD = BC + AD$$



$$2 + \frac{4}{\sqrt{3}} = 2BC + PD$$

$$2 + \frac{4}{\sqrt{3}} = 2BC + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$BC = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Рассмотрим $\triangle CDP$:

$$AD = AP + PD = BC + PD = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\frac{CP}{CD} = \cos 30^\circ$$

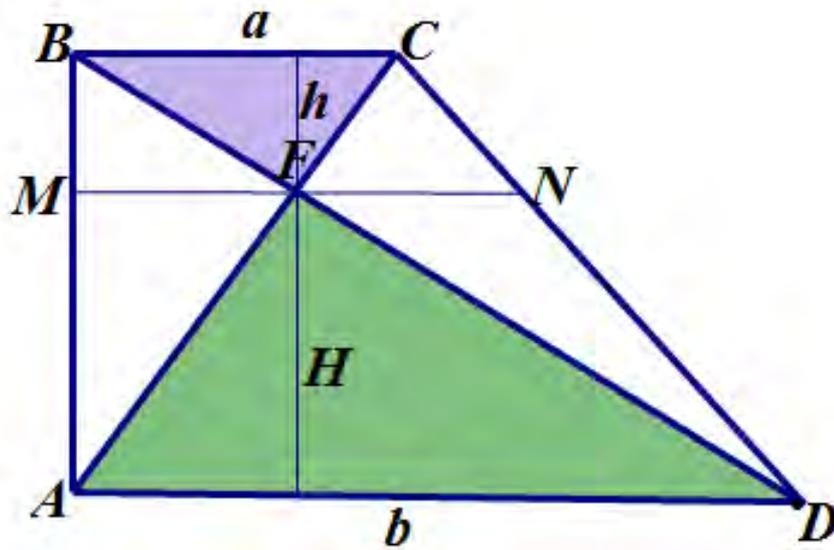
$$\frac{2}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$CD = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$PD = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle AFD \sim \triangle BFC$$

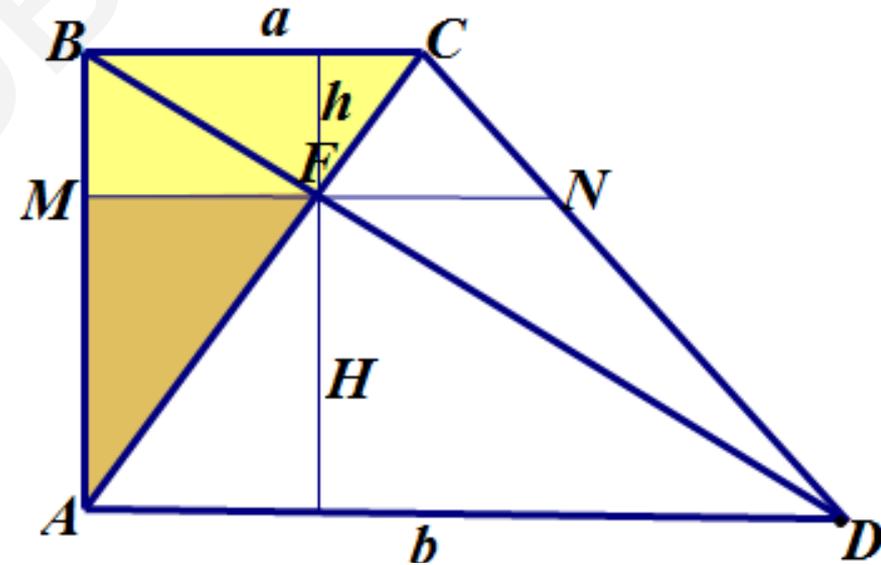
$$\frac{AF}{FC} = \frac{FD}{BF} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{a} = \frac{H}{h}$$



$$\triangle ABC \sim \triangle AFM$$

$$\frac{BC}{FM} = \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AM} = \frac{H+h}{H}$$

$$\frac{H+h}{H} = \frac{1 + \frac{h}{H}}{1} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{b+a}{b}$$



$$\frac{BC}{FM} = \frac{b+a}{b}$$

$$FM = \frac{ab}{b+a}$$

$$FM = \frac{ab}{b+a}$$

$$FM = \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})(1 + \sqrt{3})}{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) + (1 + \sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(2 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3})} = 1$$

$$BC = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

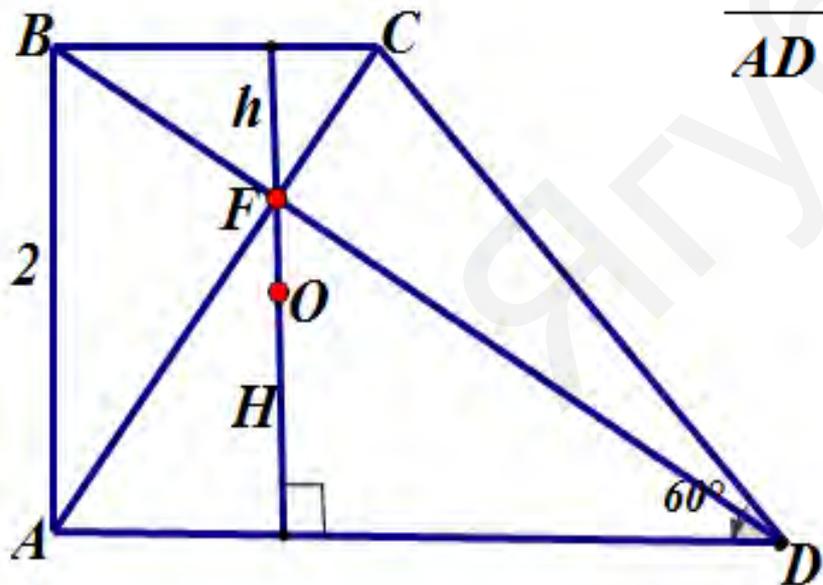
$$AD = 1 + \sqrt{3}$$

$$FO = H - R \quad R = 1$$

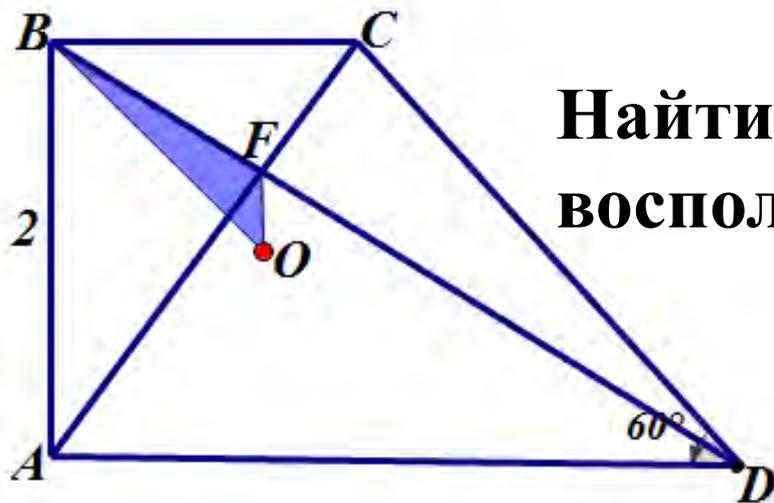
$$\frac{BC}{AD} = \frac{2-H}{H}$$

$$H = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

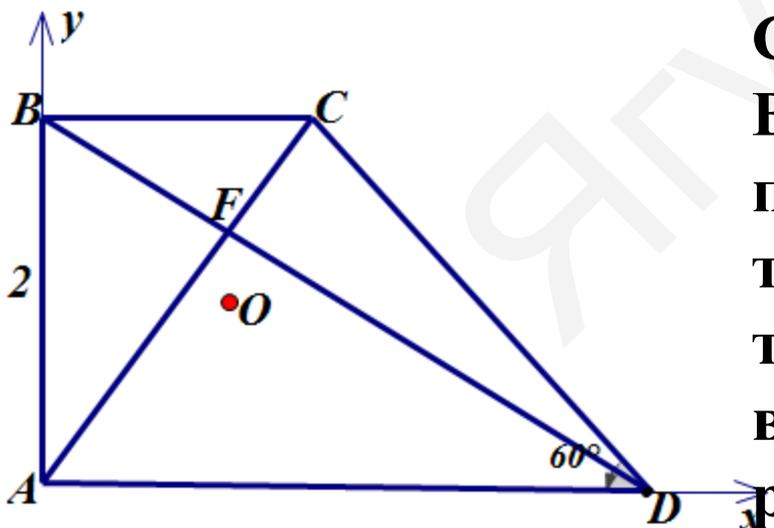
$$FO = H - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} - 1 = 2 - \sqrt{3}$$



Идеи других способов



Найти BF , BO , $\cos \angle FBO$ и воспользоваться теоремой косинусов.

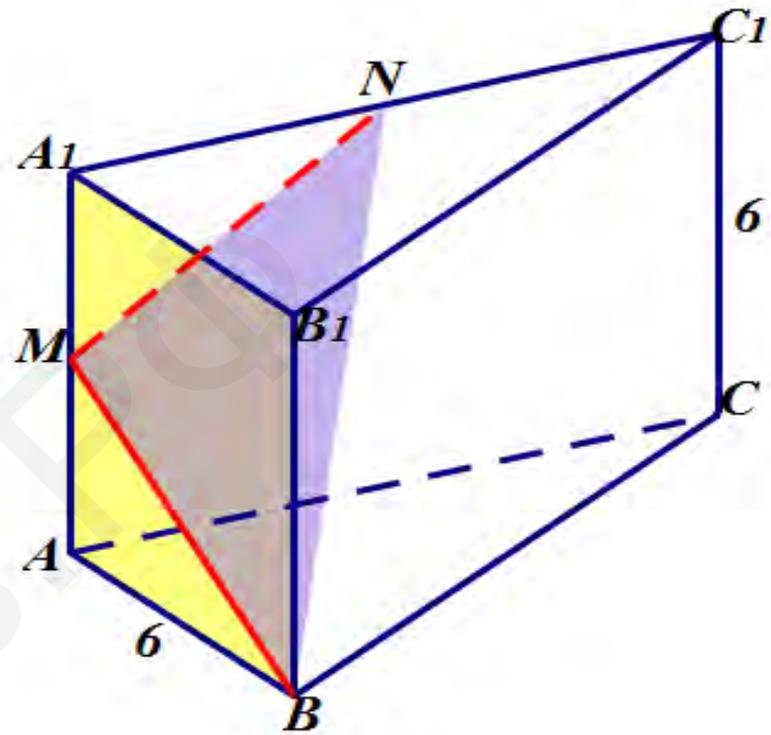


Составить уравнения прямых AC и BD , найти координаты их точки пересечения, убедиться в том, что точки O и F лежат на высоте трапеции, проходящей через центр вписанной окружности, а затем найти разность ординат точек F и O .

Задача 2

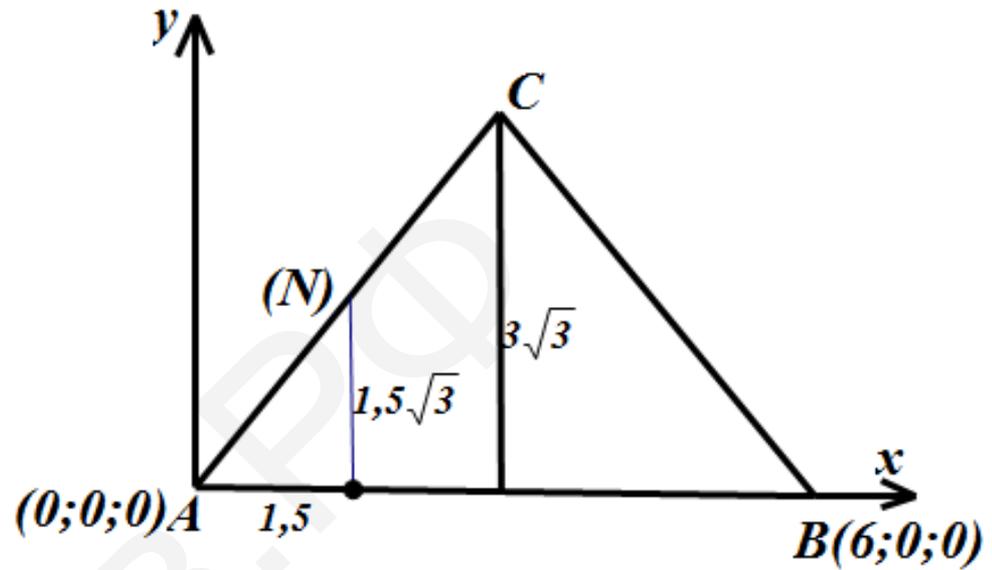
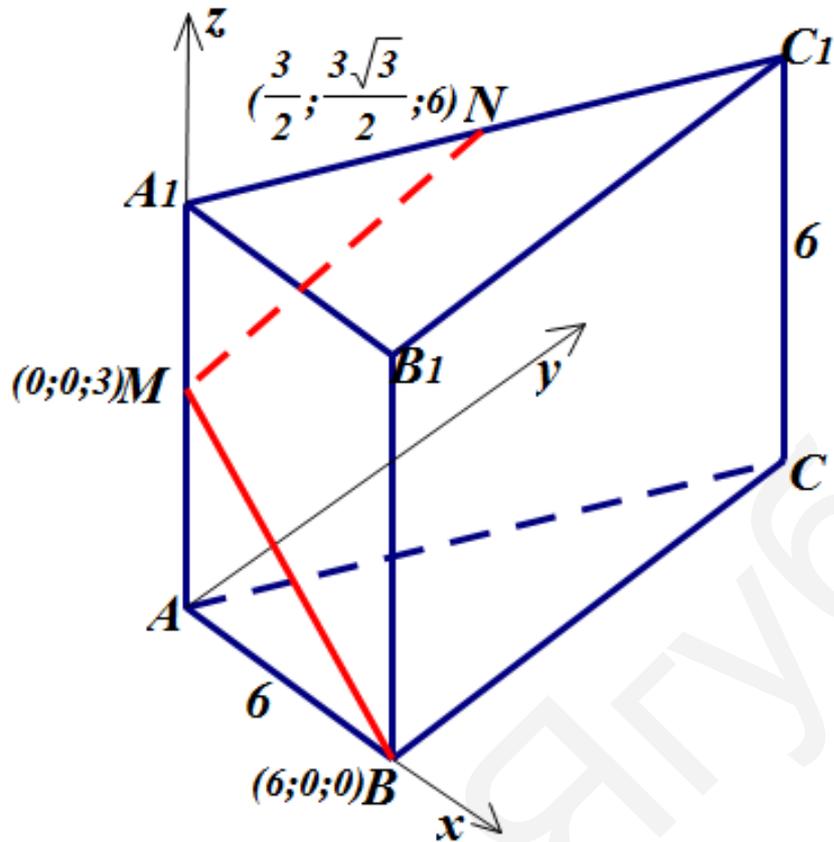
Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .



Решение. а)

Способ 1



$$\overrightarrow{BM} \{-6; 0; 3\} \quad \overrightarrow{MN} \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 3 \right\}$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = -6 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 3 = 0$$

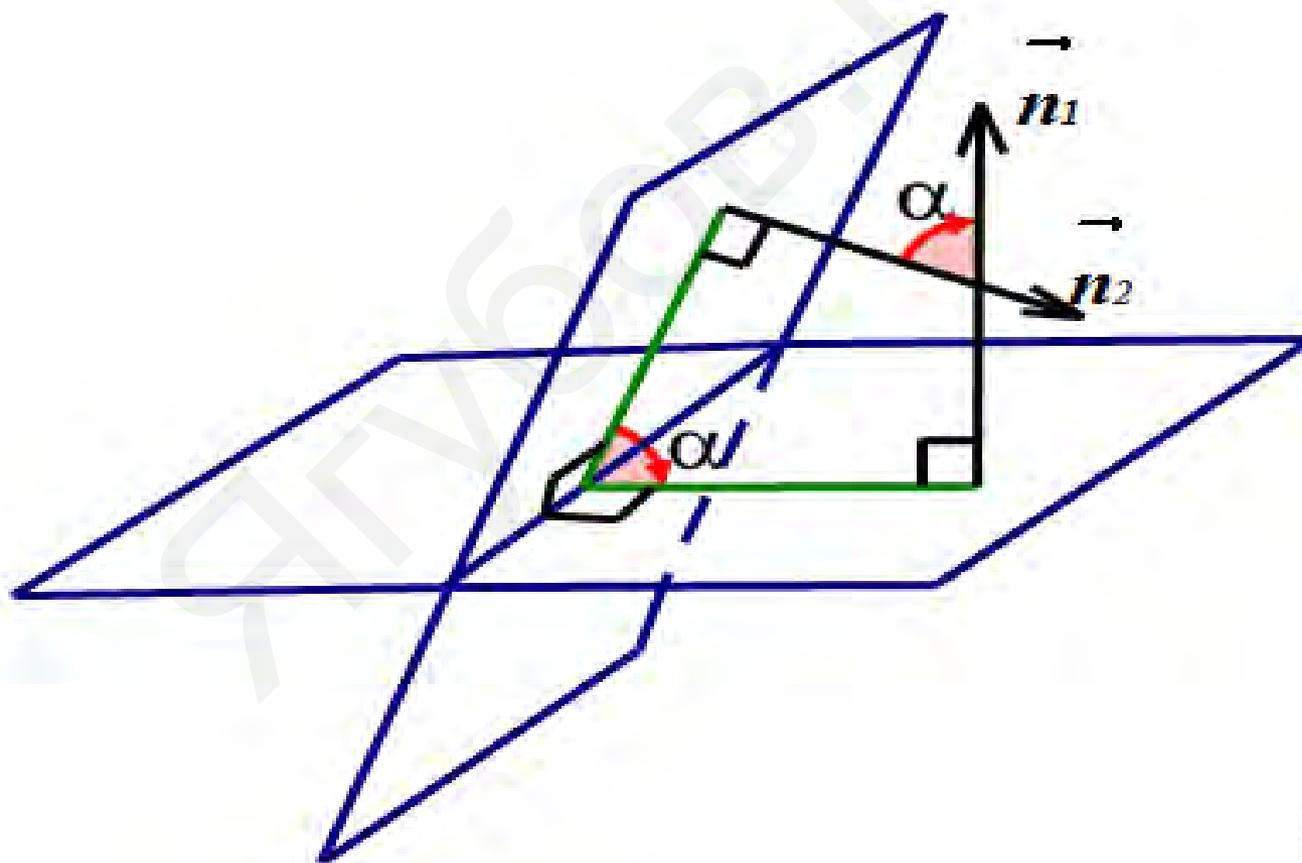
Способ 2

$$MB = 3\sqrt{5} \quad MN = 3\sqrt{2} \quad BN = 3\sqrt{7}$$

$$MN^2 + MB^2 = BN^2 \Rightarrow BM \perp MN$$

Угол между плоскостями

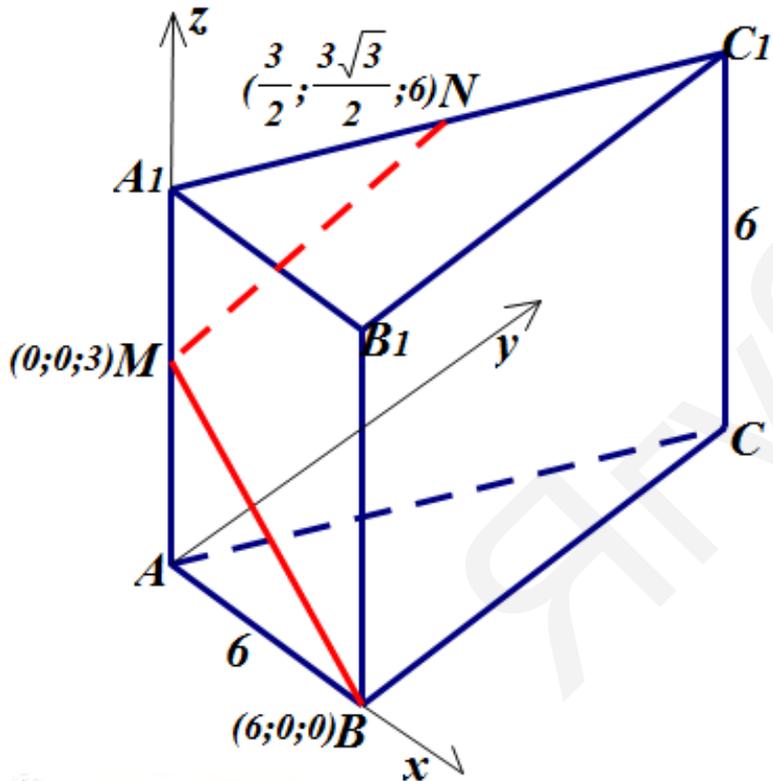
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{n_1 \cdot n_2}$$



6) Уравнение плоскости ABB_1 $y=0$, $\vec{n}_1\{0; 1; 0\}$

$$\vec{n}_2\{x; y; z\} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{BM} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{BM}\{-6; 0; 3\} \quad \vec{MN}\left\{\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 3\right\}$$



$$\begin{cases} x \cdot (-6) + y \cdot 0 + z \cdot 3 = 0, \\ x \cdot \frac{3}{2} + y \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + z \cdot 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2x, \\ x + \sqrt{3}y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2x, \\ y = -\frac{5x}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \vec{n}_2 \left\{ 1; -\frac{5}{\sqrt{3}}; 2 \right\}$$

$$\vec{n}_1 \{0;1;0\} \quad \vec{n}_2 \left\{1; -\frac{5}{\sqrt{3}}; 2\right\}$$

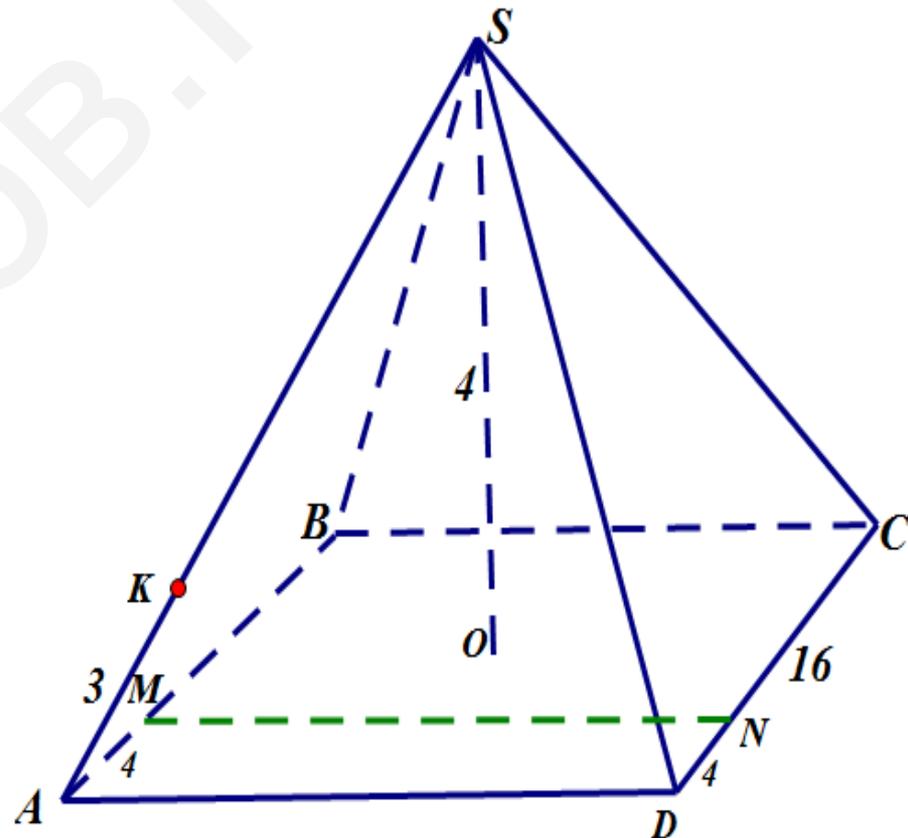
$$\cos \alpha = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right) + 0 \cdot 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{40}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

Задача 3

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона $AB=16$, а высота равна 4. На ребрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM=DN=4$ и $AK=3$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC

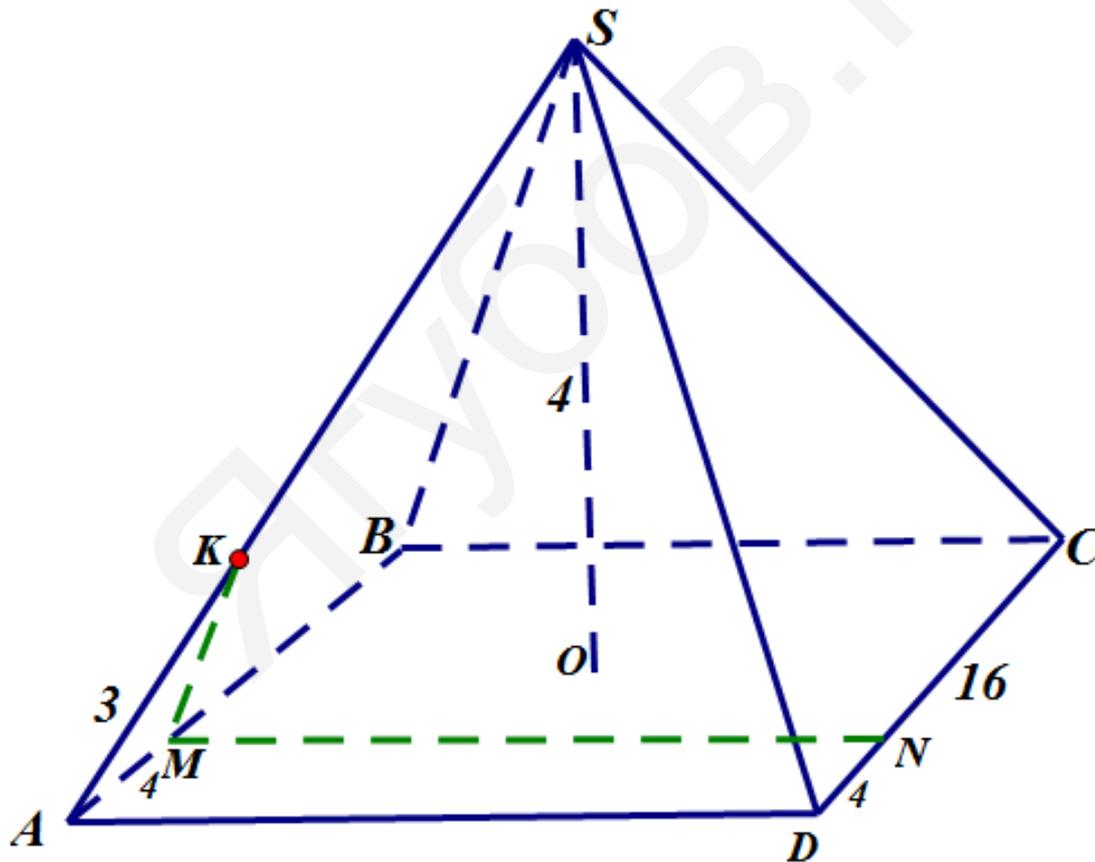


а) $\triangle AKM \sim \triangle ABS$ (по 2-му признаку):

Решение. $AK : AS = 3 : 12 = 1 : 4$, $AM : AB = 4 : 16 = 1 : 4$

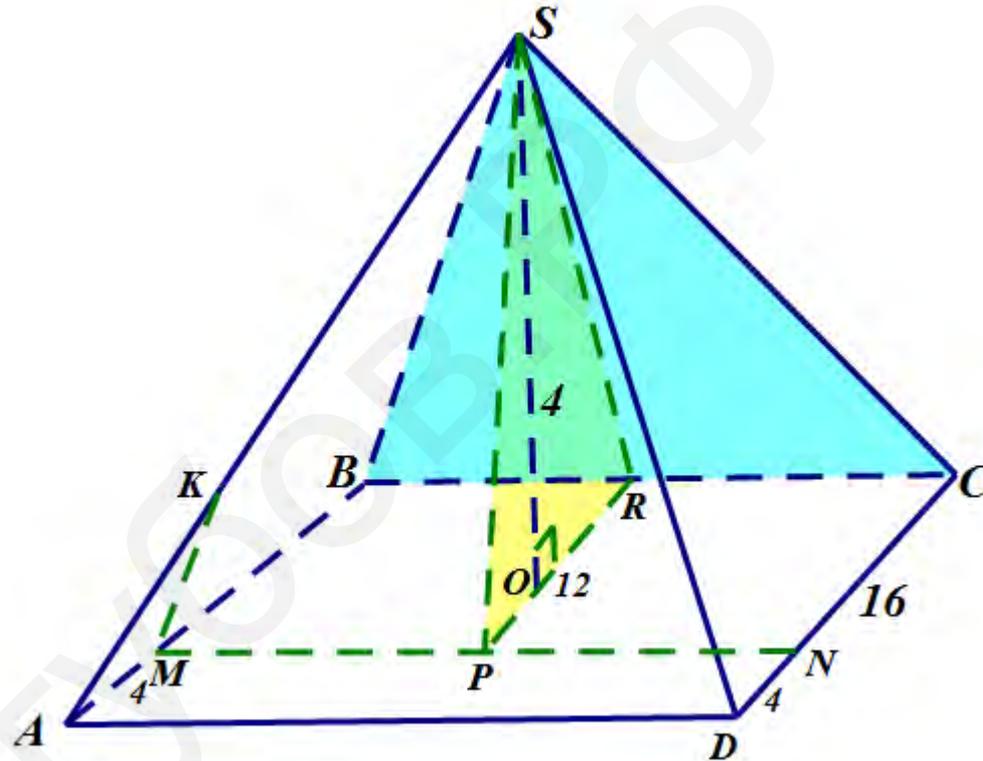
$\angle A$ – общий.

$KM \parallel BS, MN \parallel BC \Rightarrow KMN \parallel SBC$.



$$\text{б) } \rho(M, BSC) = \rho(P, BSC) \quad (MN \parallel BSC)$$

$BC \perp SPR \Rightarrow SPR \perp SBC$ и SR – их линия пересечения.



Проведем $PH \perp SR \Rightarrow PH \perp SBC$
 $\rho(M, BSC) = PH$

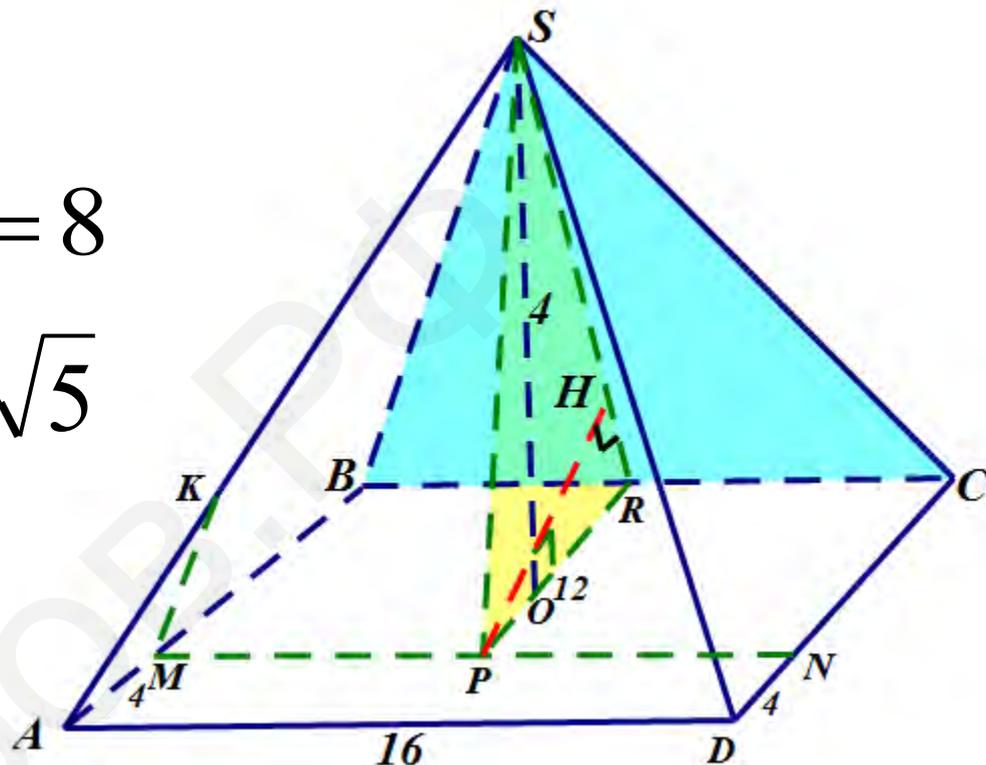
$$SR \cdot PH = SO \cdot PR$$

$$SO = 4, PR = 12, OR = 8$$

$$SR = \sqrt{SO^2 + OR^2} = 4\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{5} \cdot PH = 4 \cdot 12$$

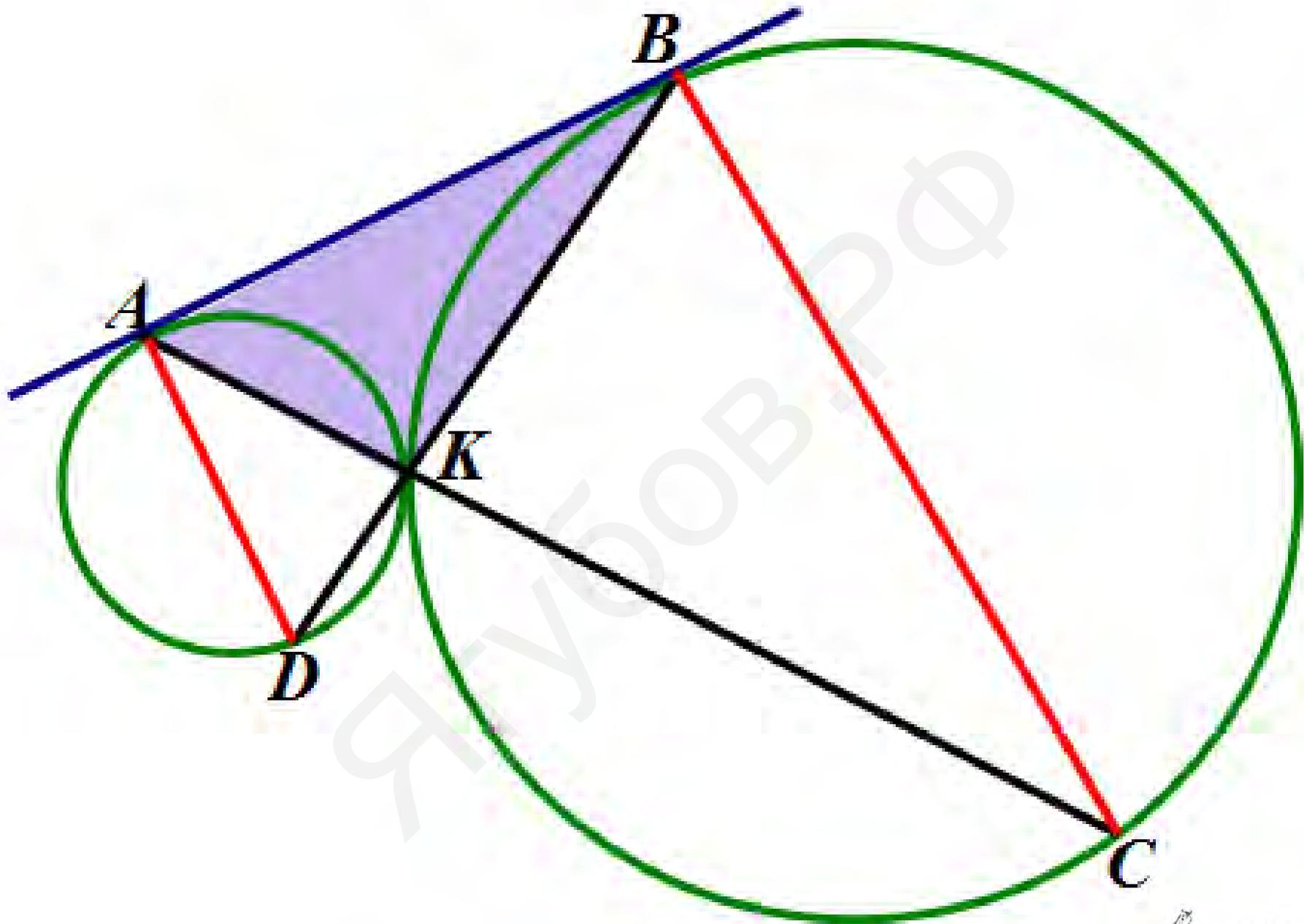
$$PH = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

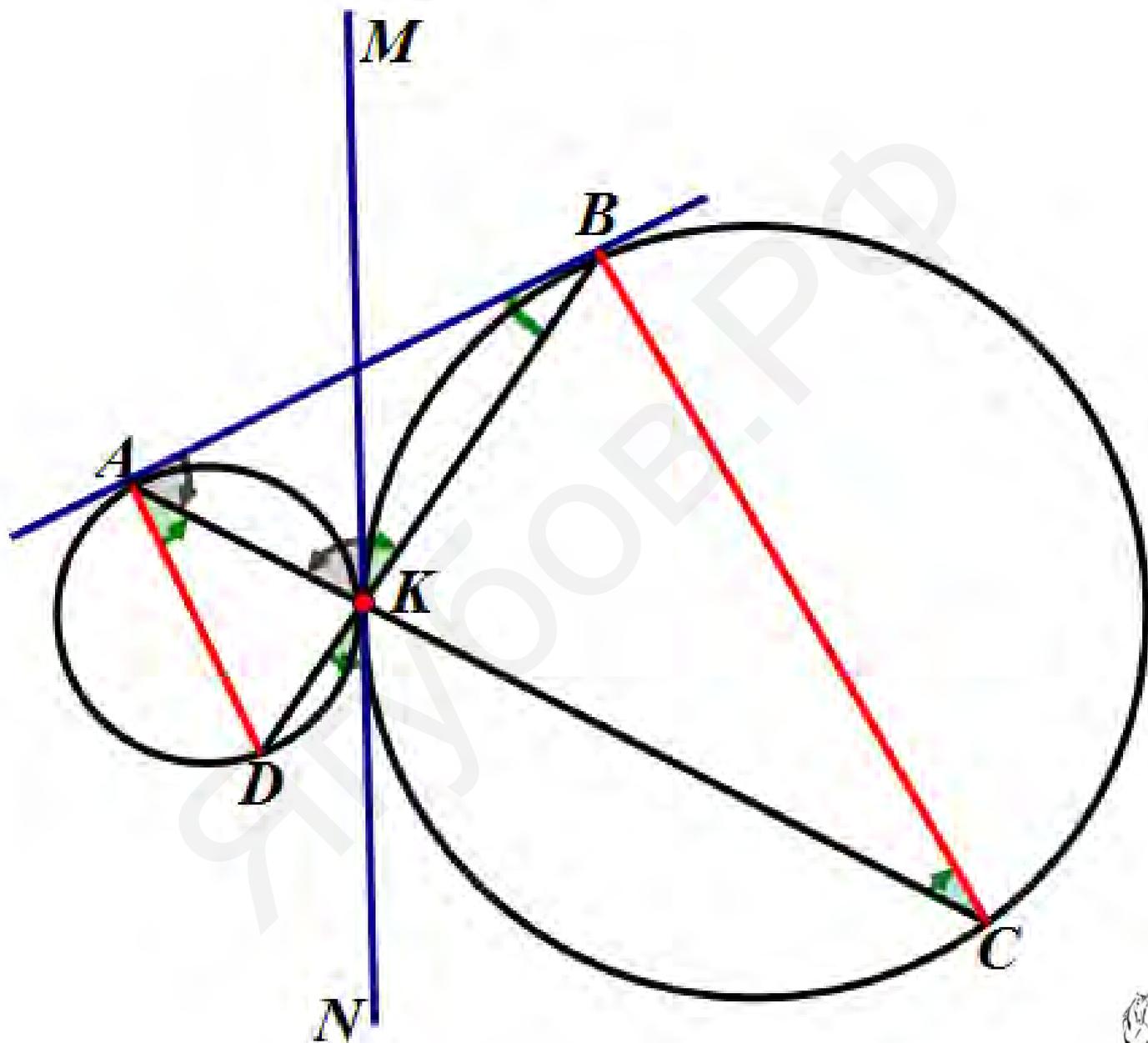


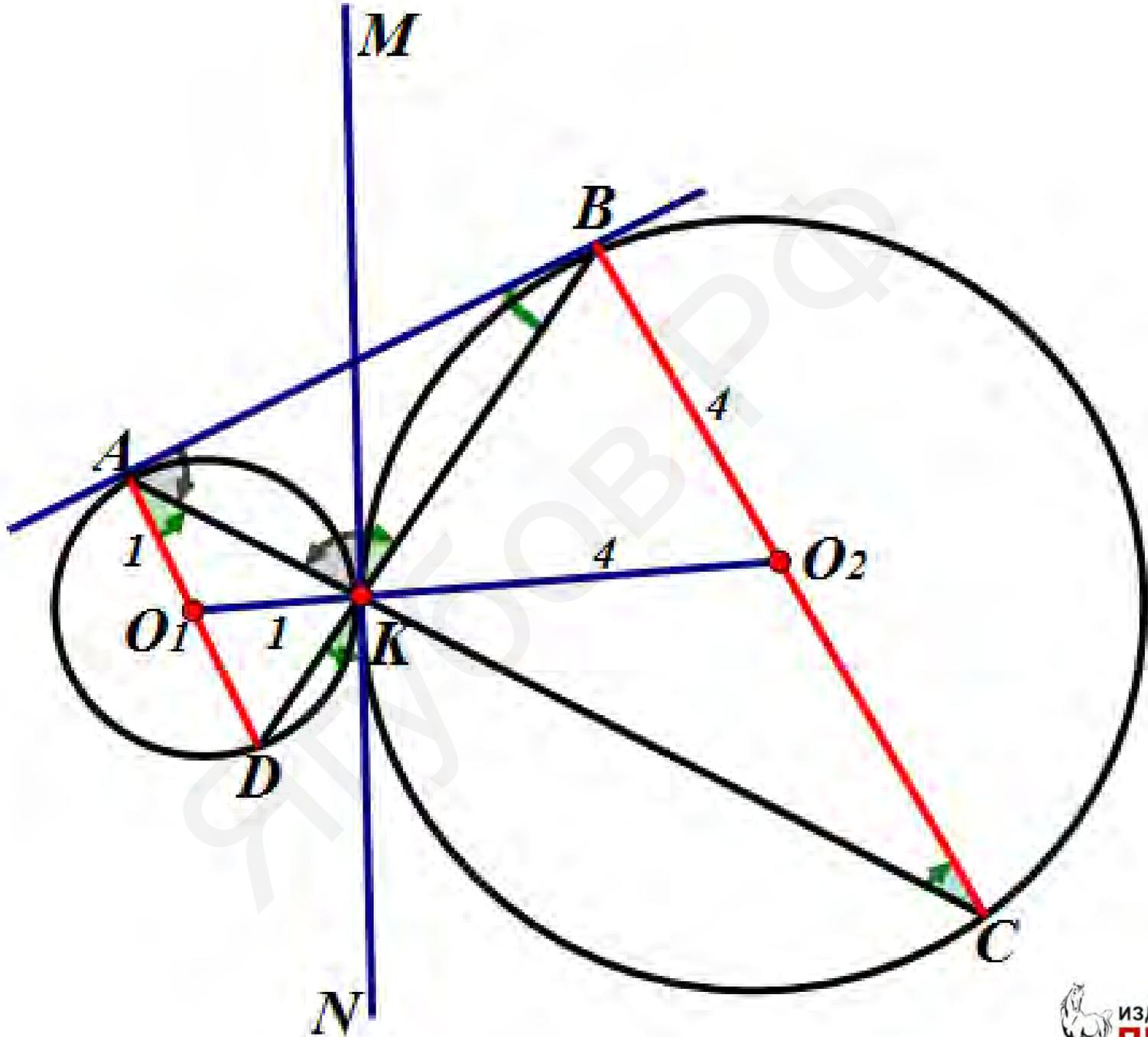
Задача 4

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.







$$\Delta SKO_1 \sim \Delta O_1TO_2$$

$$\frac{SK}{TO_2} = \frac{O_1K}{O_1O_2} \quad \frac{SK}{3} = \frac{1}{5}$$

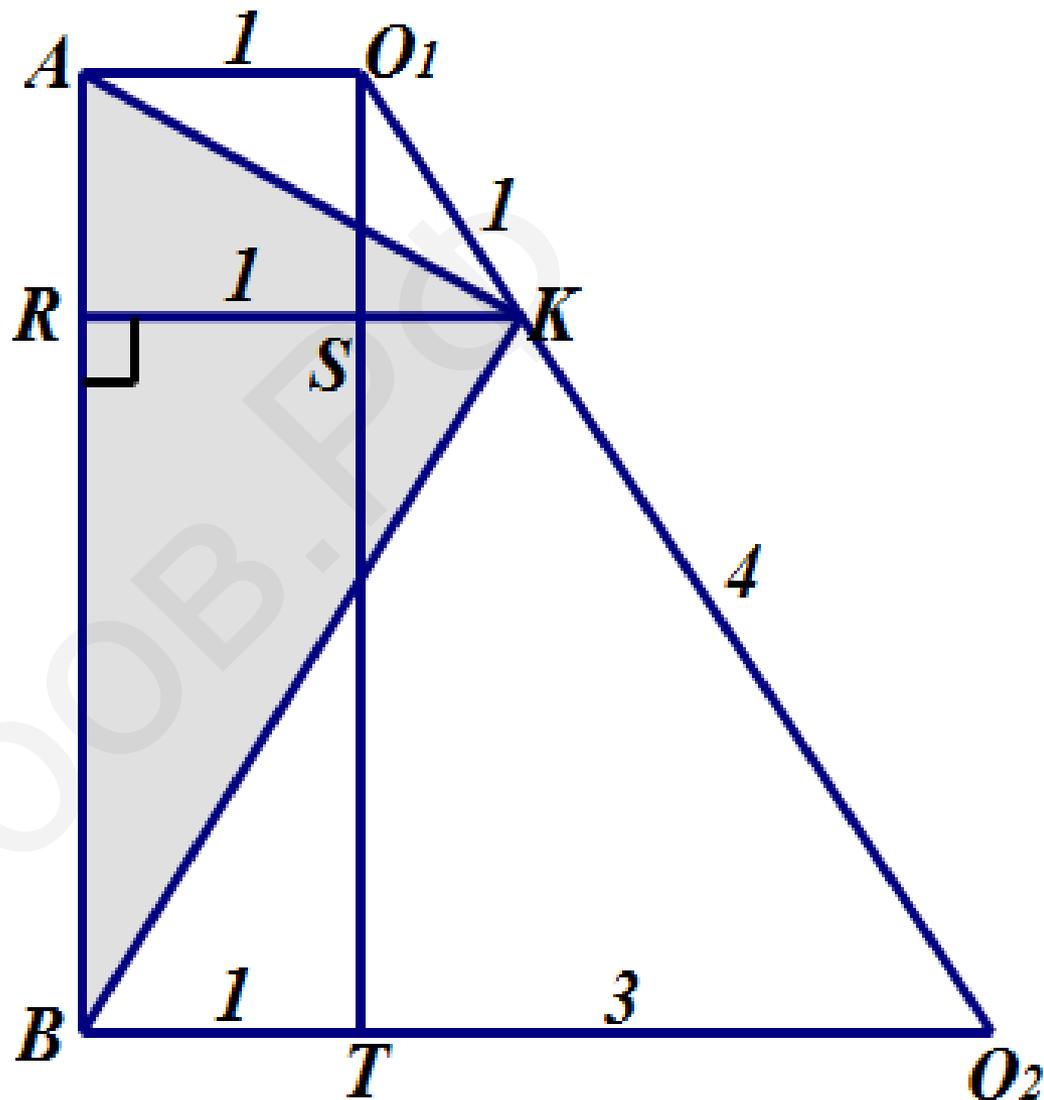
$$SK = \frac{3}{5} \quad RK = \frac{8}{5}$$

$$AB = O_1T = \sqrt{O_1O_2^2 - TO_2^2}$$

$$AB = 4$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot RK$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5} = 3,2$$



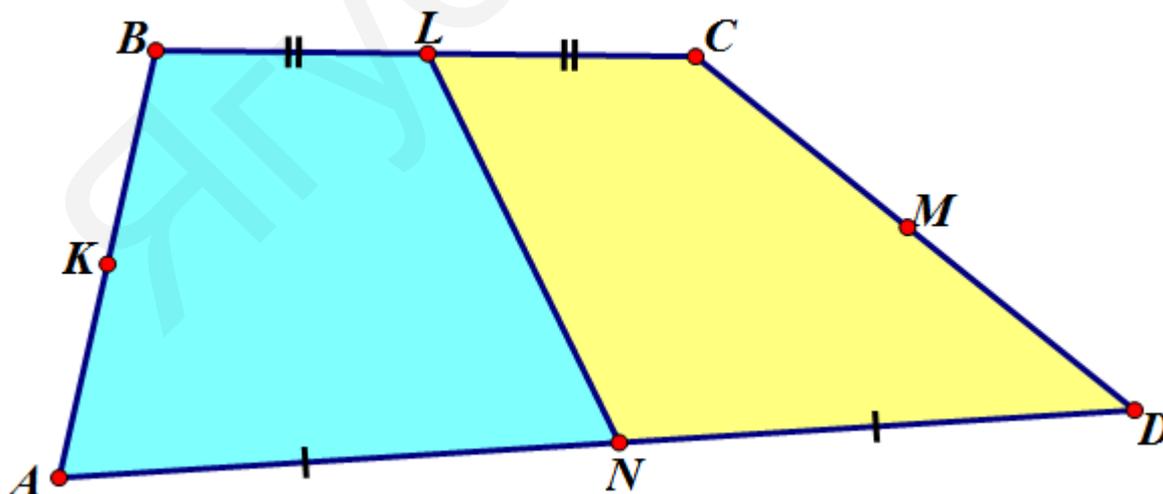
Задача 5

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K , L , M и N — середины сторон AB , BC , CD и AD соответственно.

Площади четырехугольников $ABLN$ и $NLCD$ равны, а площади четырехугольников $KBCM$ и $AKMD$ относятся как $11:17$.

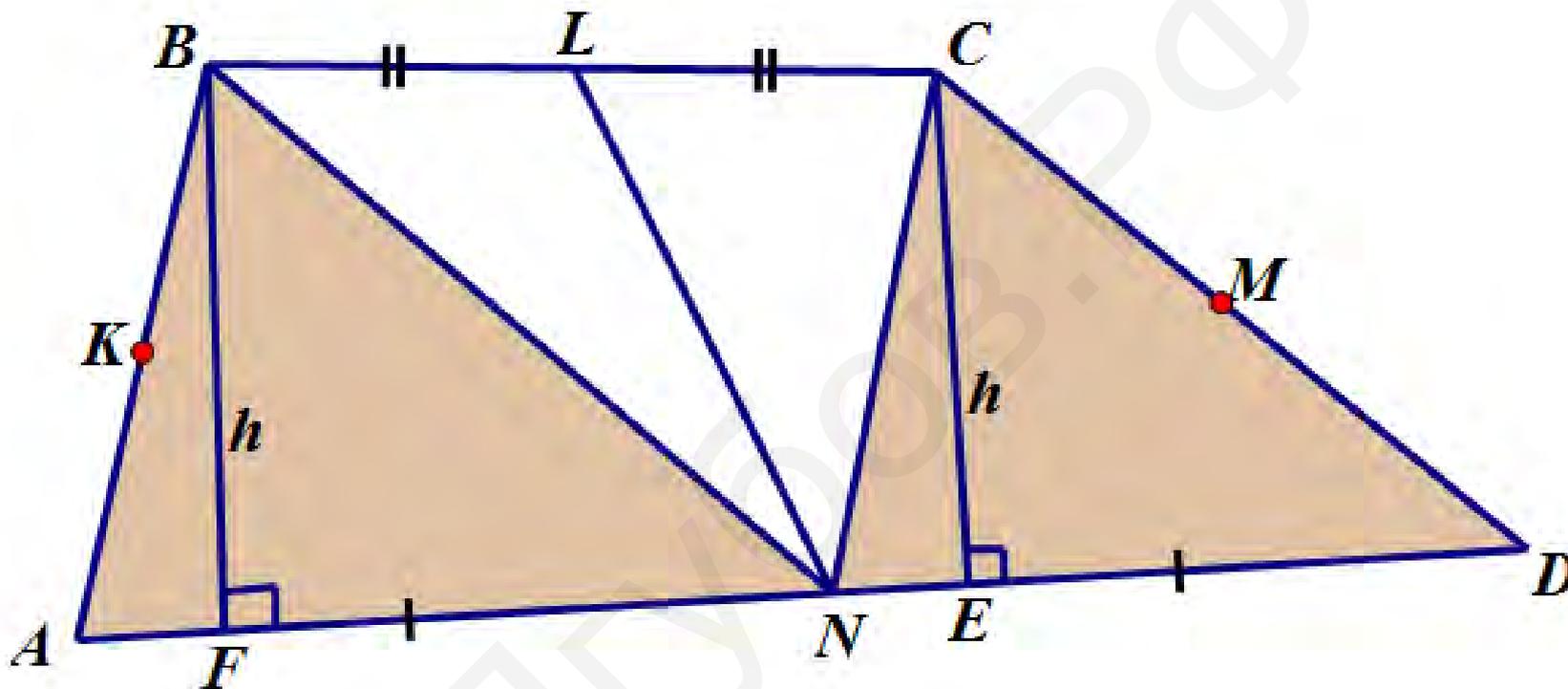
а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите отношение BC к AD .



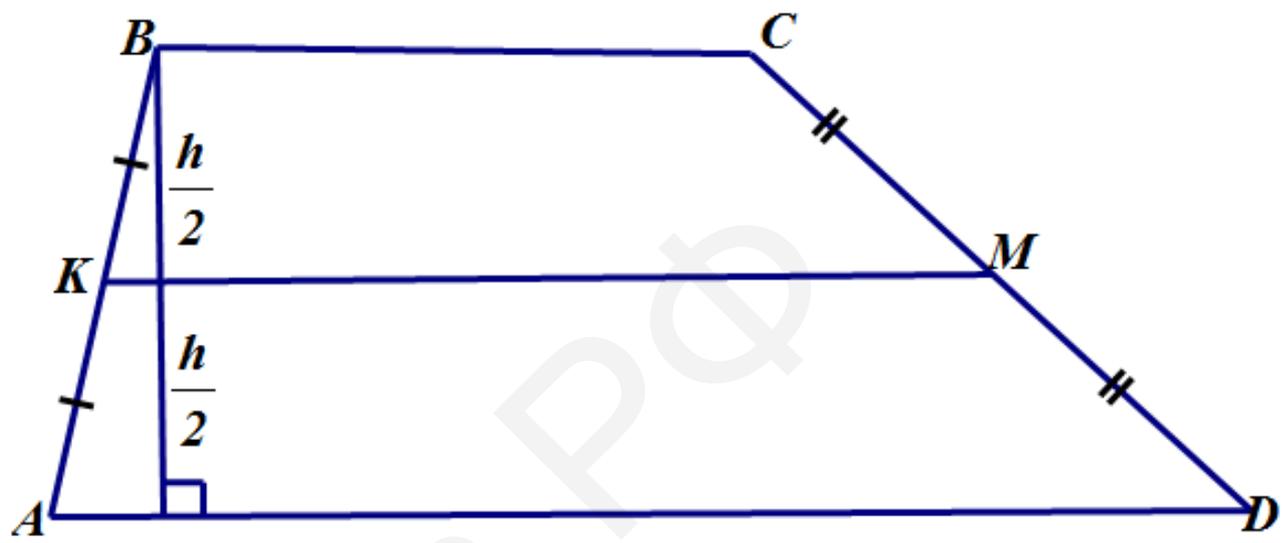
Решение.

а)



$ABCD$ – трапеция.

$$\frac{S_{KBCM}}{S_{AKMD}} = \frac{11}{17}$$



$$\frac{S_{KBCM}}{S_{AKMD}} = \frac{\frac{BC + KM}{2} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{AD + KM}{2} \cdot \frac{h}{2}} = \frac{BC + KM}{AD + KM} \quad KM = \frac{1}{2}(BC + AD)$$

$$\frac{3BC + AD}{3AD + BC} = \frac{11}{17} \quad 51BC + 17AD = 33AD + 11BC$$

$$40BC = 16AD$$

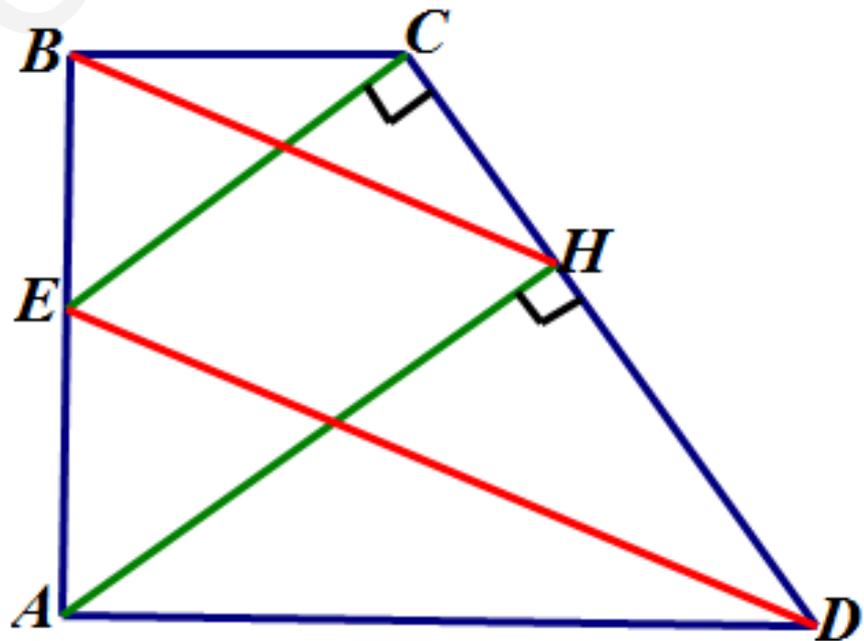
$$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{5}$$

Задача 6. (ЕГЭ 2016)

Пример 12. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.



Решение. а)

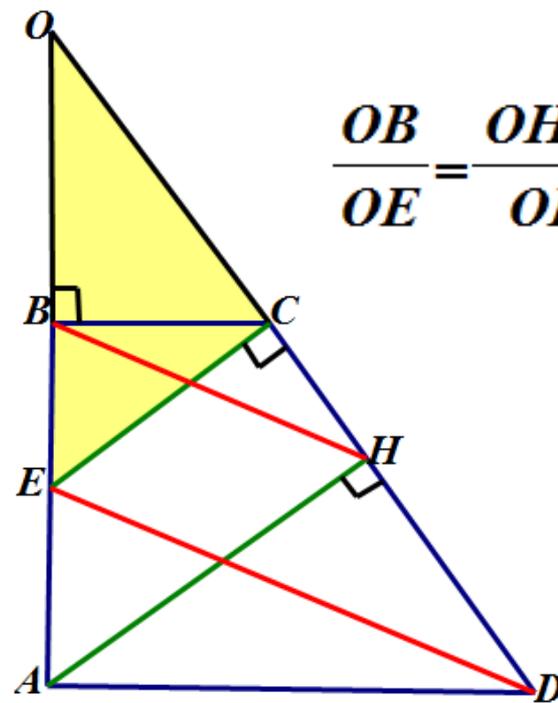
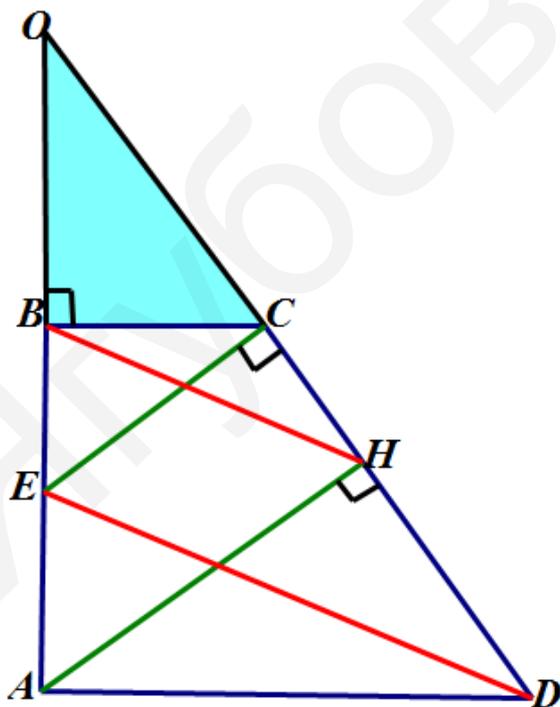
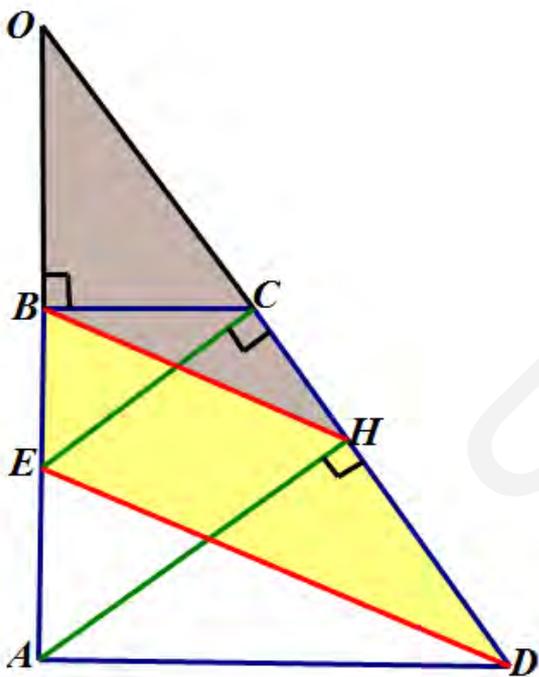
$$\frac{OB}{OE} = \frac{OH}{OD} ?$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$$

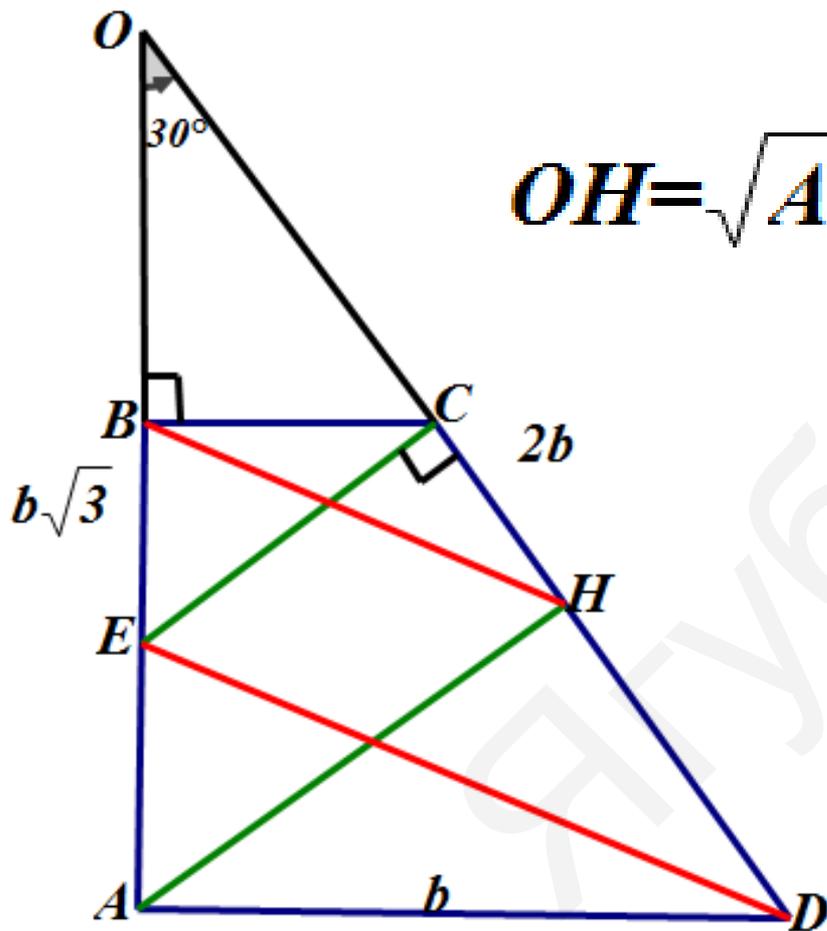
$$\frac{OC}{OH} = \frac{OE}{OA} \quad OC = \frac{OH \cdot OE}{OA}$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OH \cdot OE}{OA \cdot OD}$$

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OH}{OD}$$



$$6) \quad b \cdot b\sqrt{3} = 2b \cdot AH \quad AH = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$



$$OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{3b^2 - \frac{3}{4}b^2} = \frac{3}{2}b$$

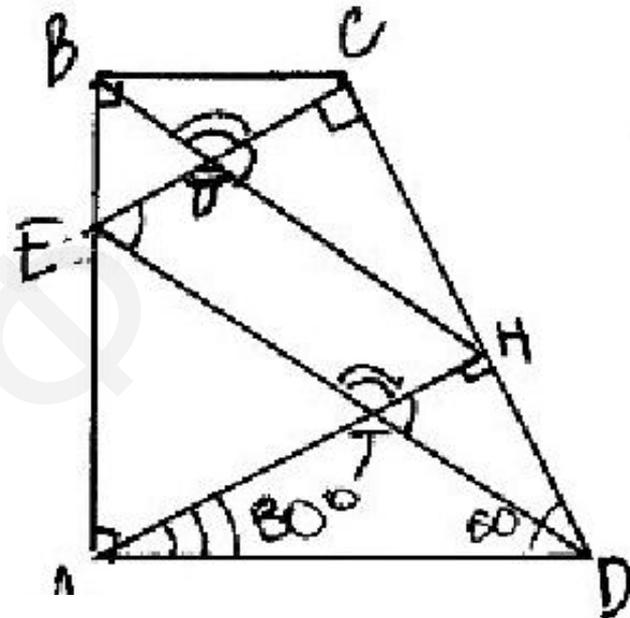
$$\frac{BH}{ED} = \frac{OH}{OD} = \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{2b} = \frac{3}{4}$$

Ответ. 3:4

Решение ученика

Дол-з, что $BH \parallel ED$.

1.) Докажем парал. EH и AM ,
 если \parallel , т.к. \perp одной сторо-
 не CD ($EC \perp CD$; $AM \perp CD \Rightarrow EH \parallel AM$)



$\angle EUM = \angle BMC$, т.к. смежные

$\angle CUM = 180^\circ - \angle CUB = \angle UET$ (смежные)

$\angle EUM + \angle UET = 180^\circ$ $\angle UET = \angle CUM$ т.к. накр. лежащие

Треугольники UCM , ECD и HTD подобны т.к. все
 прямые углы.

В треугольнике CUM $\angle CUM = \angle CED$ (накр. лежащие)

$\angle HDT = \angle CDE$ т.к. \perp одной. $\Rightarrow \triangle ECD$ подобен $\triangle CUM$ и

$\Rightarrow \triangle HTD$ подобен $\triangle UCM$. $\Rightarrow \angle CUM = \angle HTD$

а угол $HTE = 180 - \angle HTD = 180 - \angle CUM \Rightarrow$

$\angle UHT$ - параллелограмм, т.к. противолежащие

углы равны $\Rightarrow UM \parallel ET \Rightarrow BH \parallel ED$

0 баллов

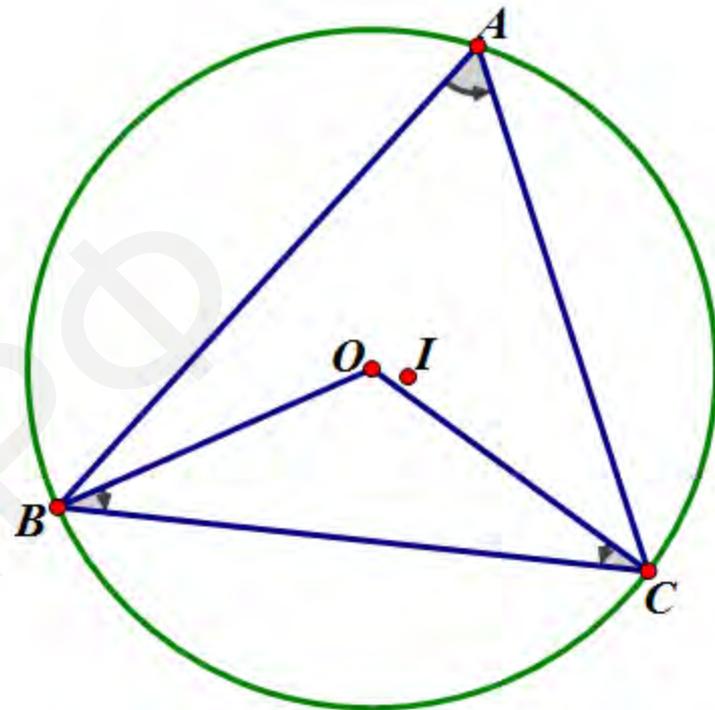
Задача 7

Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I – центр вписанной в него окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что

$$\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB.$$

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите $\angle OIH$, если угол $ABC = 50^\circ$.



Решение.

$$1. \angle BOC = 2\angle A,$$

$$\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) =$$

$$= 180^\circ - \angle A \Rightarrow 2\angle A = 180^\circ - \angle A$$

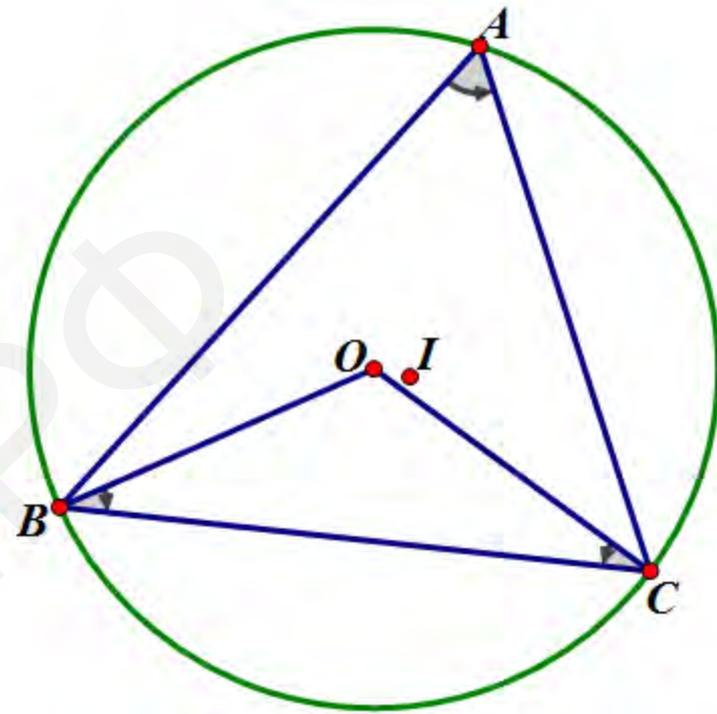
$$\angle A = 60^\circ, \angle BOC = 120^\circ$$

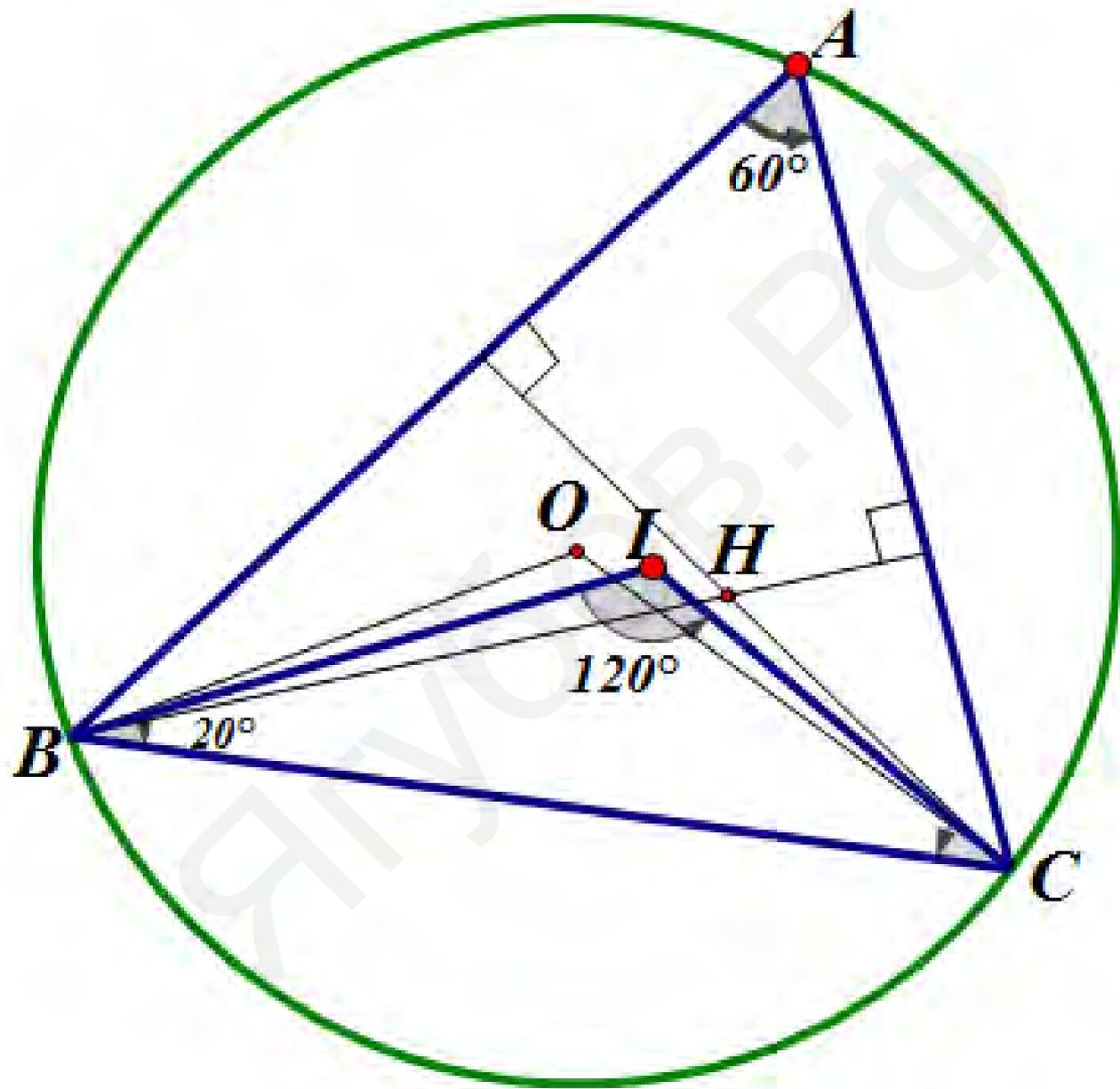
$$\underline{\angle A = 60^\circ, \angle B = 50^\circ \Rightarrow \angle C = 70^\circ.}$$

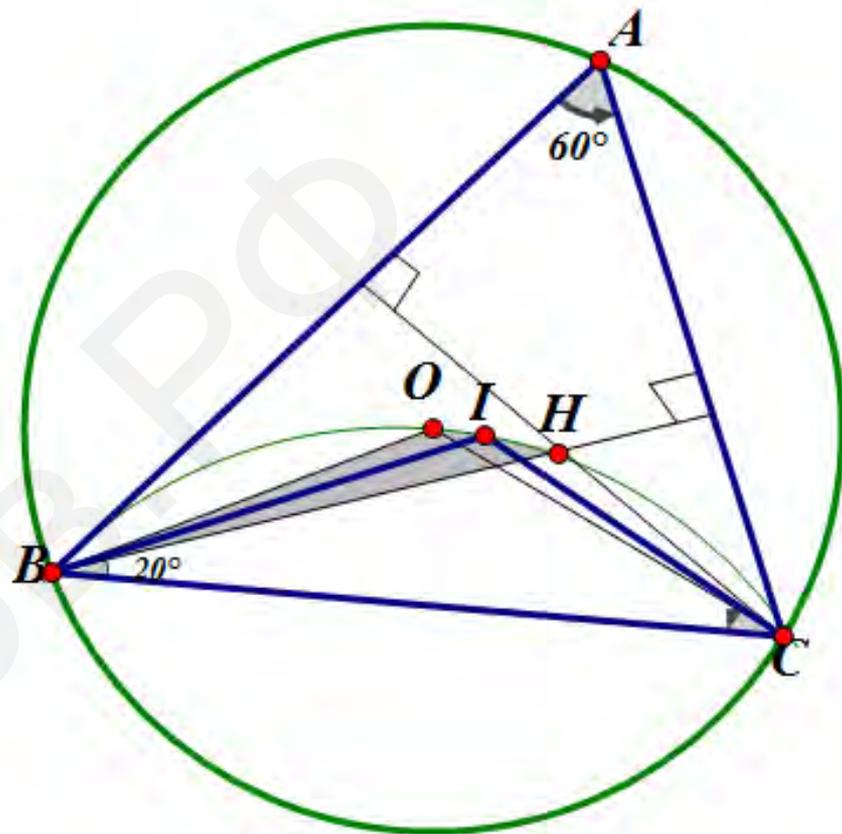
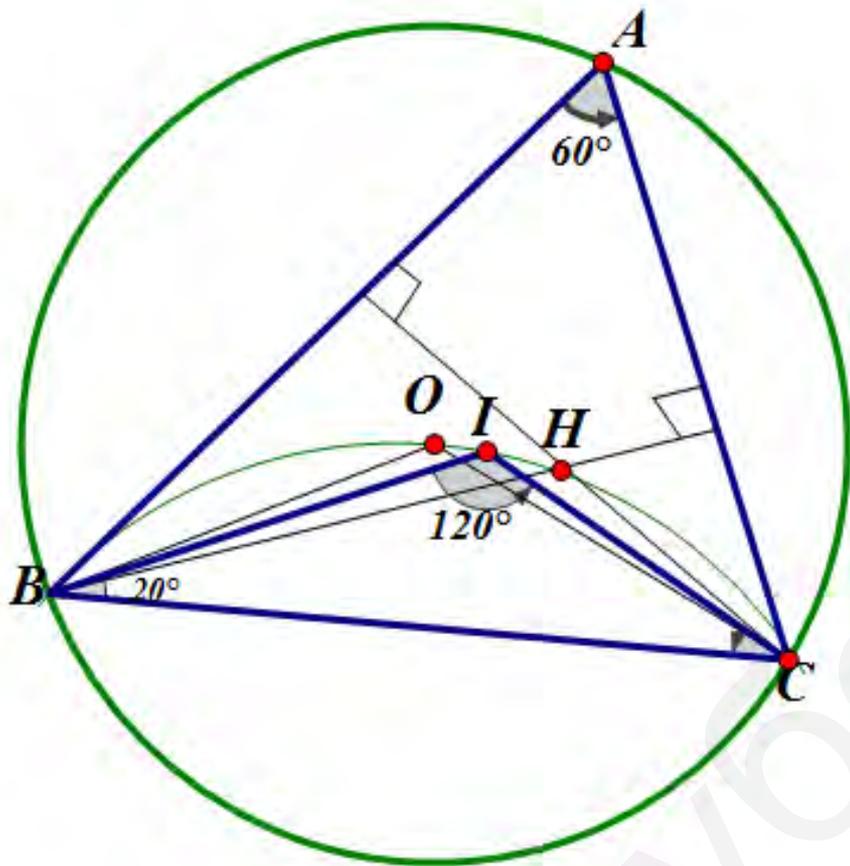
$$2. \triangle BOC: \angle OBC = \angle OCB = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\angle ABO = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$$

$$\angle ACO = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$$







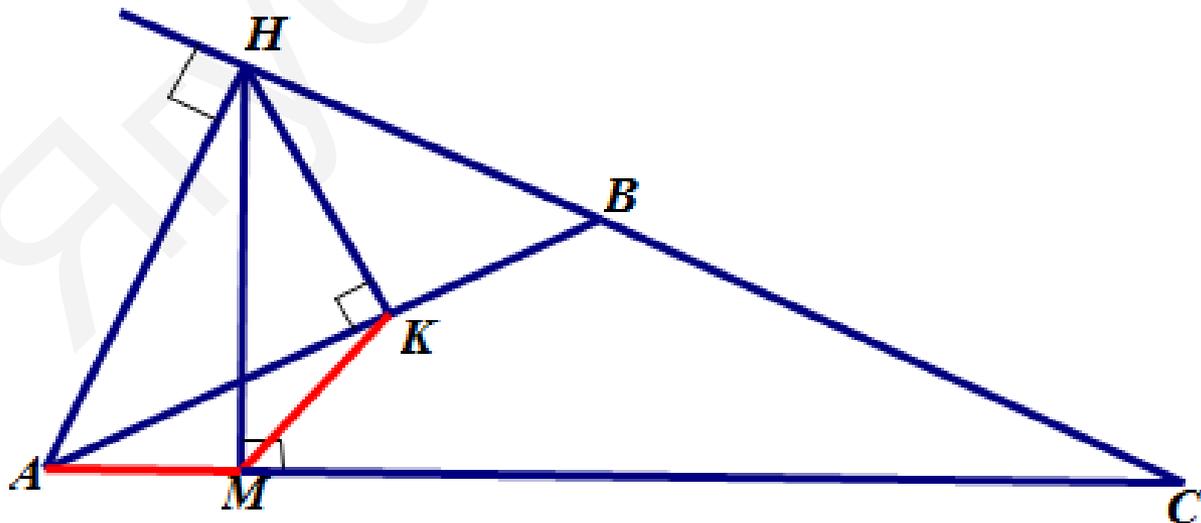
$$\angle OIH + \angle OBH = 180^\circ, \angle OBH = 10^\circ \Rightarrow \angle OIH = 170^\circ$$

Задача 8

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжении боковой стороны BC опущена высота $АН$. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

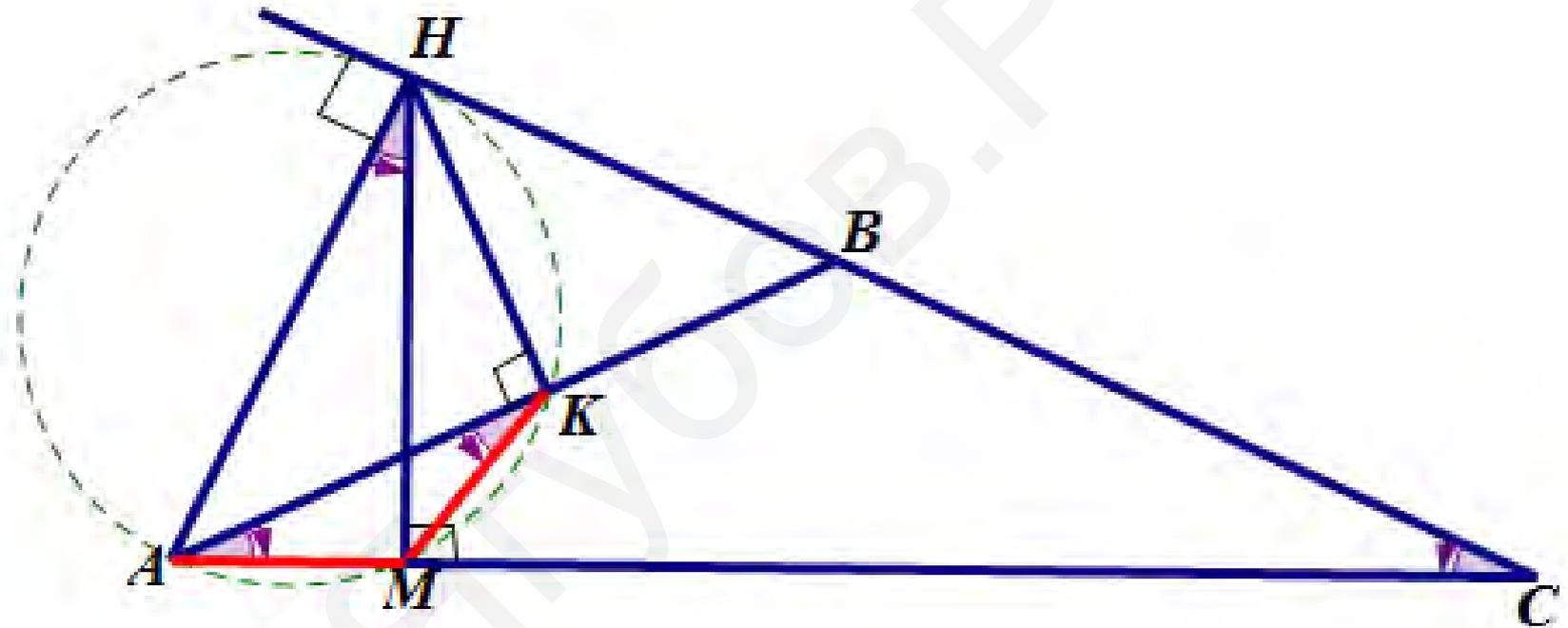
а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=5$, $AC=8$.

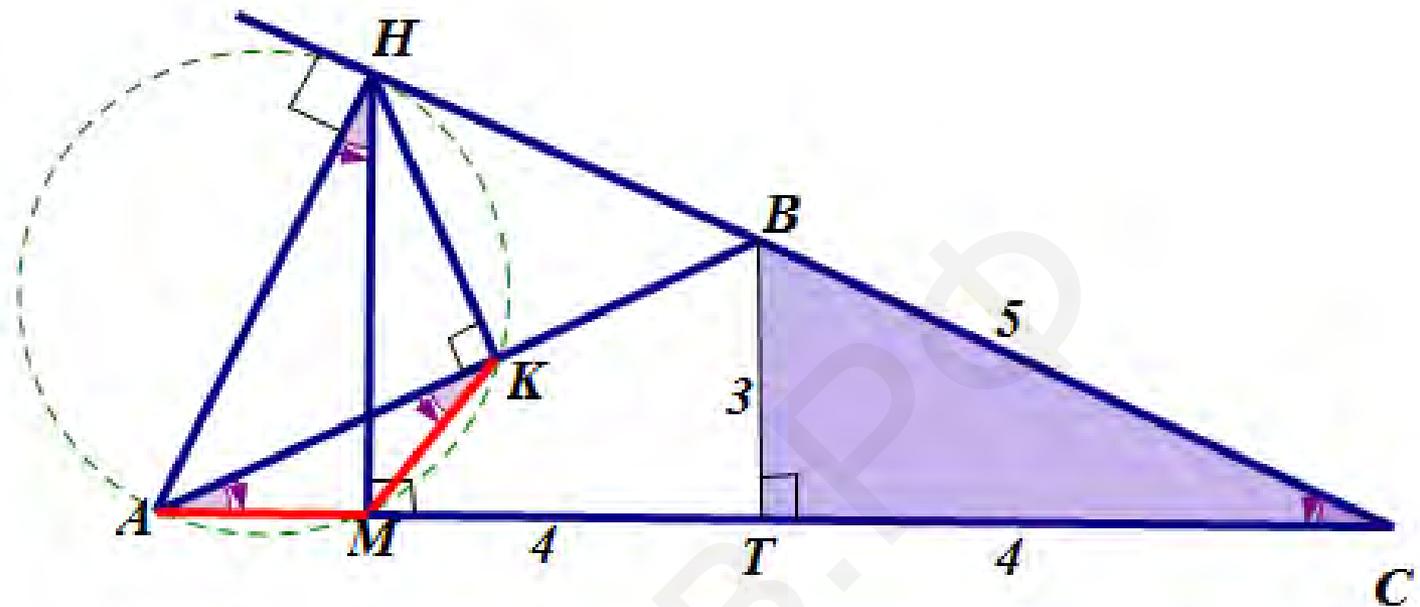


Решение

a)



б)



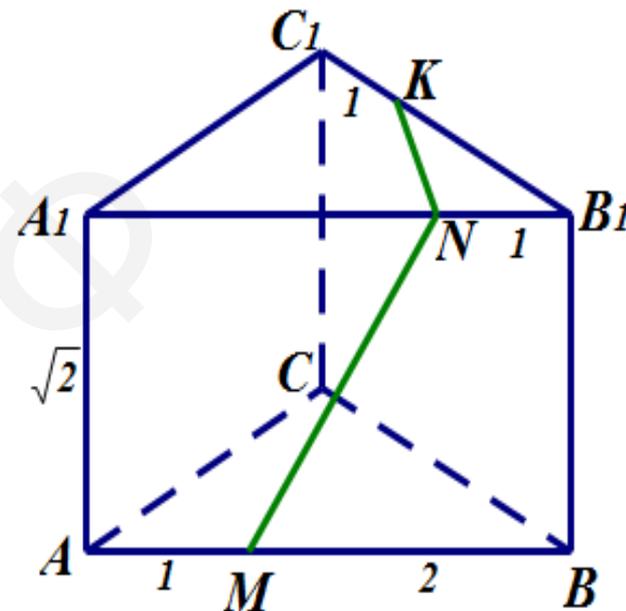
$$\sin C = \frac{3}{5} \quad \frac{AM}{AH} = \sin \angle AHM = \sin C = \frac{3}{5} \Rightarrow AM = \frac{3}{5} AH$$

$$\frac{AH}{AC} = \sin C = \frac{3}{5} \Rightarrow AH = AC \cdot \sin C = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$$

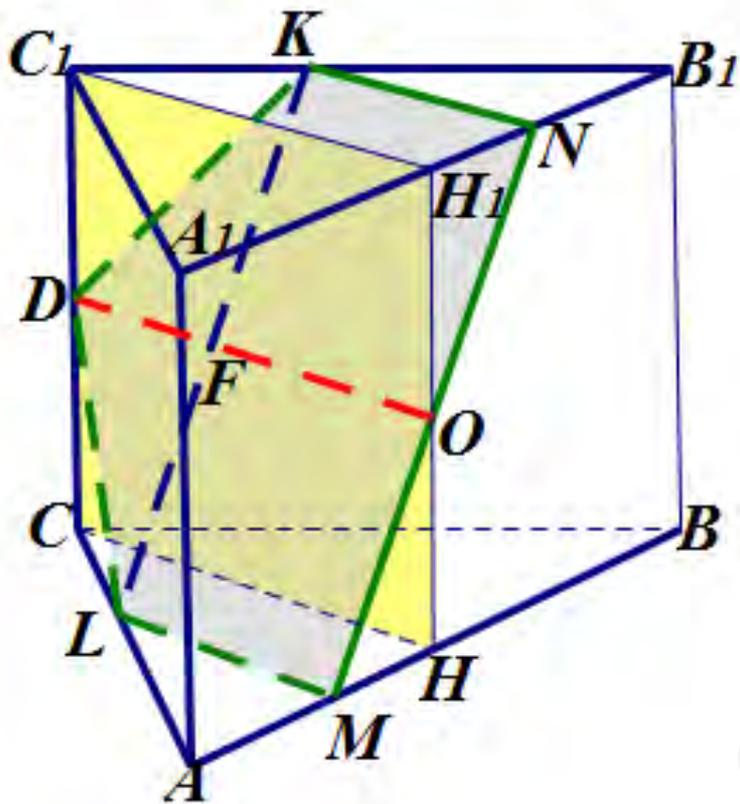
$$AM = \frac{3}{5} AH = \frac{3}{5} \cdot \frac{24}{5} = \frac{72}{25} = 2,88$$

Задача 9

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро равно $\sqrt{2}$. На ребрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = B_1N = C_1K = 1$.



- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNLK$ – квадрат.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .



$$S_{\text{сеч}} = S_{MNKL} + S_{DLK}$$

$$DF \perp KL$$

$$DO = CH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$DF = DO - FO = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{DLK} = \frac{1}{2} KL \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$S_{\text{сеч}} = 3 + \frac{3}{4} = 3,75$$

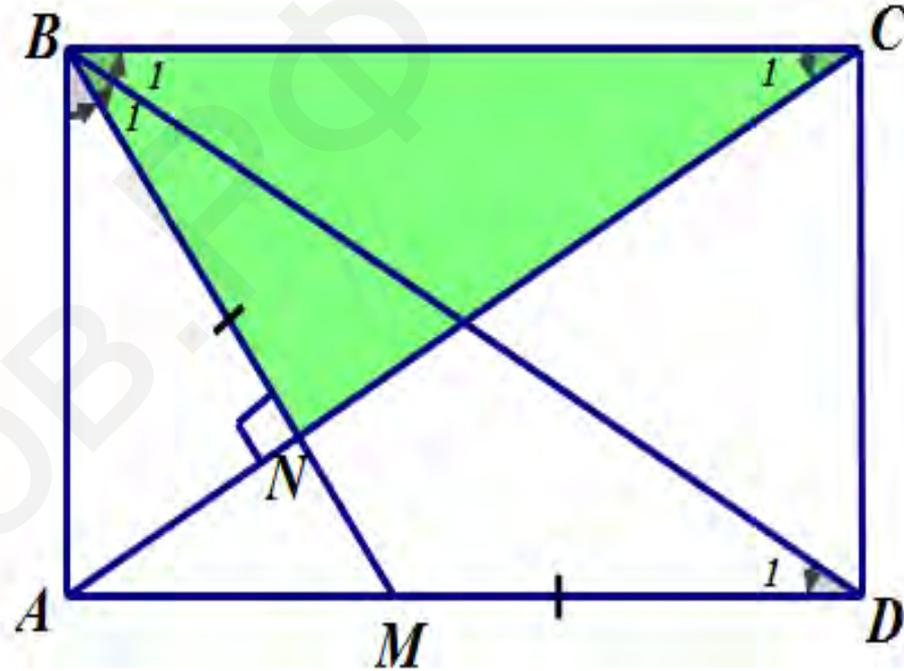
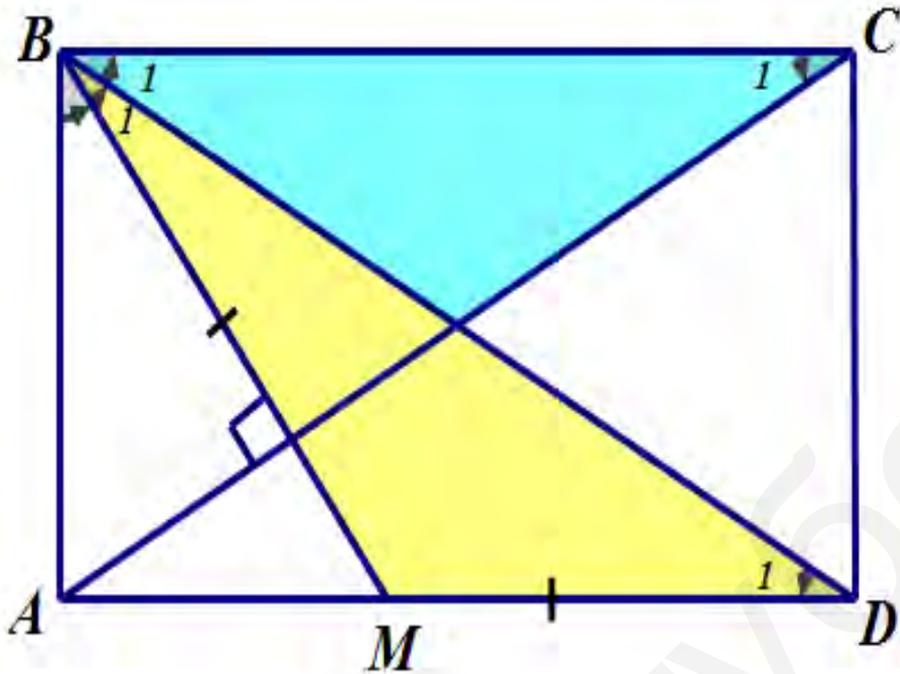
Задача 10 (Вариант МА10610 (профильный уровень 6.03.Статград)

Прямая, проходящая через вершину В прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке М, равноудаленной от вершин В и D.

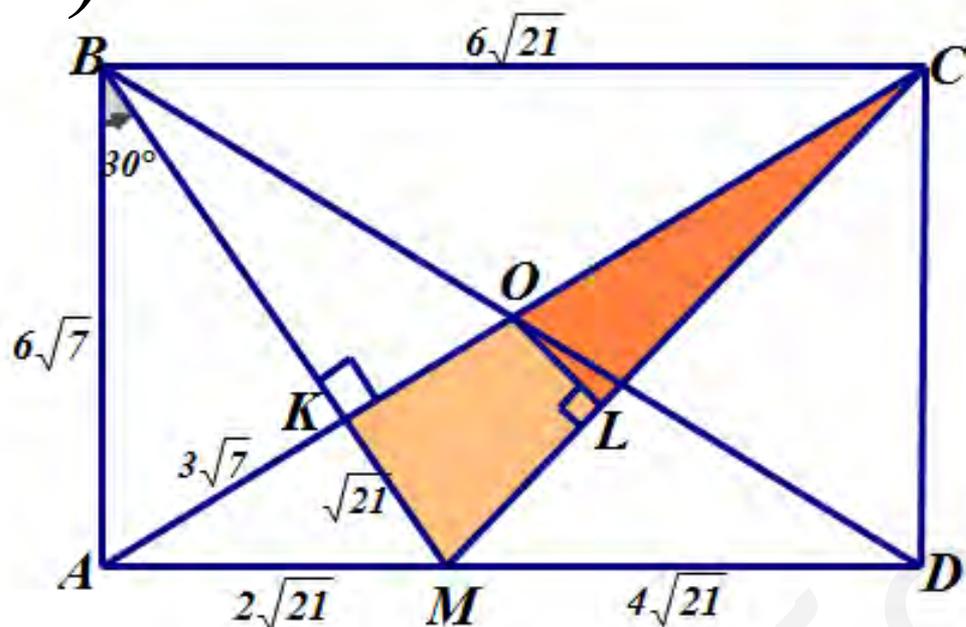
а) Докажите, что лучи BM и BD делят угол ABC на три равные части.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 6\sqrt{21}$.

Решение. а)



б) Способ 1



$$\triangle OLC \sim \triangle CKM$$

$$\frac{OL}{KM} = \frac{OC}{CM}$$

$$OL = \frac{KM \cdot OC}{CM}$$

$$OL = \frac{\sqrt{21} \cdot 6\sqrt{7}}{14\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3} \cdot 6}{14\sqrt{3}} = 3$$

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + CD^2}}{2}$$

$$OC = 6\sqrt{7}$$

$$CM = 14\sqrt{3}$$

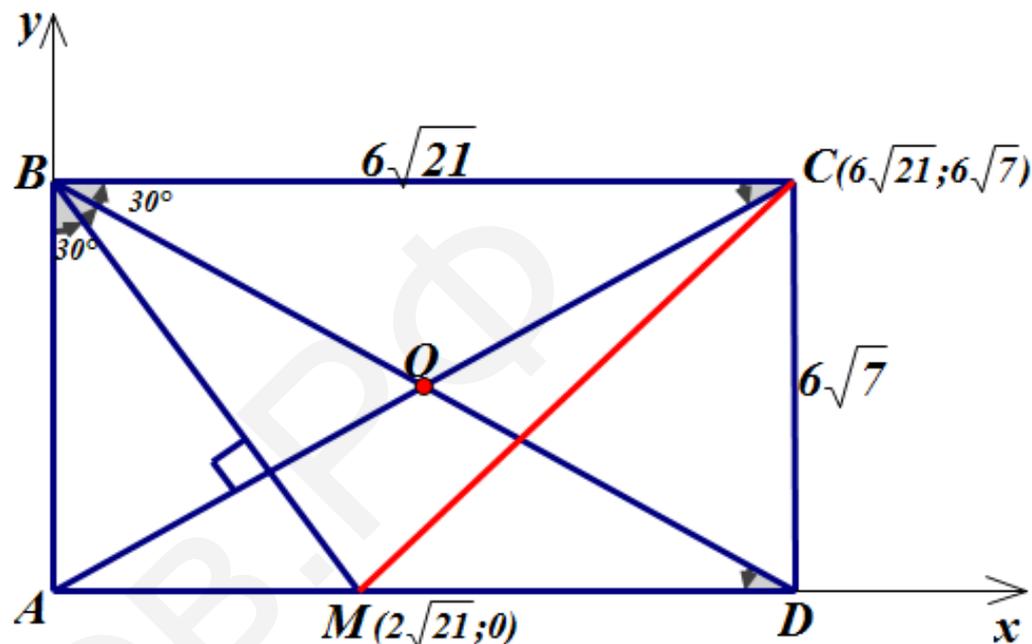
$$KM = \sqrt{21}$$

б) Способ 2

$$\frac{CD}{BC} = \operatorname{tg} 30^\circ \quad \frac{CD}{6\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$CD = 6\sqrt{7}$$

$$\frac{AM}{AB} = \operatorname{tg} 30^\circ \quad AM = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{21}$$



$$O(3\sqrt{21}; 3\sqrt{7})$$

$$CM: \sqrt{3}x - 2y - 6\sqrt{7} = 0$$

Расстояние d от точки $M(x_0; y_0)$

до прямой $Ax + By + C = 0$

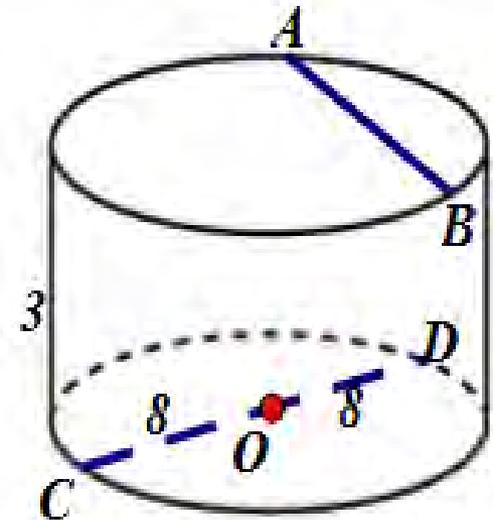
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

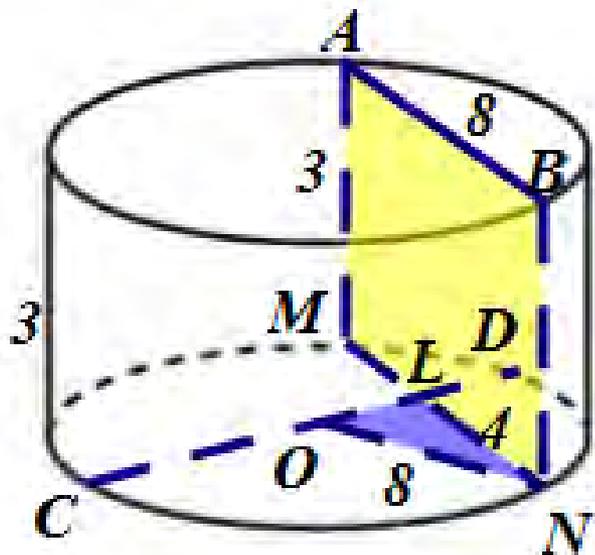
$$d = \frac{|\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{21} - 2 \cdot 3\sqrt{7} - 6\sqrt{7}|}{\sqrt{3 + 4}} = 3$$

Задача 11 (Вариант МА10610 (профильный уровень 6.03.Статград)

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведен диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведен диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
- Найдите объем пирамиды $CABNM$.





$$V_{CABNM} = \frac{1}{3} S_{ABNM} \cdot CL$$

$$S_{ABNM} = AB \cdot AM = 24$$

$$V_{CABNM} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4(\sqrt{3} + 2) =$$

$$= 32(\sqrt{3} + 2)$$