

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ В МАГИСТРАТУРУ МФТИ (специальность «Прикладные математика и физика»)

1. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций Ролля, Лагранжа и Коши.
2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
3. Исследование функции одного переменного с помощью производных: монотонность, экстремумы, выпуклость, перегибы.
4. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия дифференцируемости.
5. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия, достаточные условия.
6. Условный экстремум функций нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа (необходимые условия экстремума).
7. Определённый интеграл. Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница.
8. Несобственные интегралы. Сходимость и абсолютная сходимость. Признаки сравнения.
9. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сравнения.
10. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.
11. Степенные ряды. Радиус сходимости. Ряд Тейлора.
12. Криволинейные интегралы. Формула Грина.
13. Поверхностные интегралы. Формула Остроградского–Гаусса.
14. Формула Стокса.
15. Тригонометрический ряд Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье.
16. Преобразование Фурье. Формула обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
17. Различные способы задания прямой и плоскости. Углы между прямыми и плоскостями. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости.
18. Кривые второго порядка. Эллипс, парабола, гипербола и их свойства.
19. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Теорема Кронекера–Капелли. Общее решение системы.
20. Линейное преобразование конечномерного пространства, его матрица. Собственные векторы и собственные значения, их свойства.
21. Евклидово пространство. Самосопряжённые преобразования, свойства их собственных векторов и собственных значений.
22. Билинейные формы. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.
23. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и системы таких уравнений. Методы их решения.
24. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных. Определитель Вронского, формула Лиувилля–Остроградского.
25. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
26. Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
27. Случайная величина и её функция распределения.
28. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.

29. Испытания Бернулли. Неравенство Чебышева и закон больших чисел. Теорема Муавра–Лапласа и предельная теорема Пуассона.
30. Регулярные функции комплексного переменного. Интегральная формула Коши. Функции, регулярные в кольце. Ряд Лорана.
31. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация.
32. Вычет в изолированной особой точке. Вычисление интегралов при помощи вычетов.
33. Метод характеристик для гиперболических уравнений на плоскости. Задача Коши.
34. Задача Коши для уравнения колебаний струны и одномерного уравнения теплопроводности. Формулы Даламбера и Пуассона.
35. Задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона (двумерный и трёхмерный случаи).

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих в магистратуру в 2010 году
по специальности «Прикладные математика и физика»

1. Найти угол между прямой, проходящей через точки $(1; 0; 1)$, $(2; 1; 4)$ и плоскостью $x + y + 2z = 0$. Система координат прямоугольная.
2. Самосопряжённое преобразование в ортонормированном базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования диагональная, и написать эту диагональную матрицу.
3. Построить график функции $y = \frac{e \ln(-x)}{x}$. Указать асимптоты, точки экстремума, точки перегиба, промежутки выпуклости вверх и вниз.
4. Вычислить интеграл

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x \, dx}{1 - \cos x}$$

5. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (x^2 + y) \, dy \, dz + 2y \, dz \, dx + dx \, dy,$$

где S — внешняя сторона полной поверхности полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

6. Написать формулы для нахождения коэффициентов разложения функции $f(x) = x^3$, $-1 < x < 2$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 3. Не вычисляя коэффициентов ряда, построить график его суммы $S(x)$. Найти $S(5)$. Выяснить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.
7. Найти решение уравнения

$$x(yy'' - y'^2) = yy',$$
 удовлетворяющее условиям $y(1) = y'(1) = 1$.

8. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y, \\ \dot{y} = -2x - y. \end{cases}$$

9. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-\pi i|=4} \frac{\sin z}{\operatorname{ch} z - 1} \, dz.$$

10. Найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению $4u_{tt} = u_{xx}$ и начальным условиям $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$.

На решение задач отводится три астрономических часа.

Литература

1. Л.Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
2. С.М. Никольский. Курс математического анализа.
3. А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. Курс математического анализа.
4. Г.Н. Яковлев. Лекции по математическому анализу.
5. Г.Е. Иванов. Лекции по математическому анализу.
6. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
7. В.И. Чехлов. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре.
8. Д.В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
9. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
10. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
11. М.В. Федорук. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
12. В.К. Романко. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.
13. В.К. Захаров, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков, Теория вероятностей.
14. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей.
15. Е.С. Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного.
16. М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. Теория функций комплексного переменного.
17. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики.
18. В.П. Михайлов. Лекции по уравнениям математической физики.
19. В.М. Уроев. Уравнения математической физики.

Заведующий кафедрой высшей математики профессор Половинкин Е.С.