

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на третий курс

1. Для задачи на условный экстремум функции $f(x, y) = x^2 + 2y$ при условии $x + y^2 = \frac{3}{2}$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

2. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int_S x \, dS,$$

где поверхность $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z^2 = x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

3. Решить задачу Коши

$$y''(x) = \exp(y(x)), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\sqrt{2}.$$

4. В трехмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ подпространство M состоит из векторов $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 = 2x_3$. Найти ортонормированный базис в ортогональном дополнении $M^\perp$ и матрицу преобразования ортогонального проектирования на подпространство M в базисе e .

5. Найти ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

по основной тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$. Вычислить сумму найденного ряда на отрезке $[-\pi, \pi]$. Исследовать равномерную сходимость найденного ряда на интервалах $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$.

Задачи для поступающих на третий курс для переводников и восстанавливающихся

1. В классической задаче на условный экстремум для функции нескольких вещественных переменных найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.
2. Вычислить поверхностный интеграл первого или второго рода.
3. Решить задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.
4. В конечномерном вещественном евклидовом пространстве с заданным ортонормированным базисом найти ортонормированный базис в ортогональном дополнении к заданному подпространству и преобразование ортогонального проектирования на заданное подпространство.
5. Найти ряд Фурье функции одного вещественного переменного по основной тригонометрической системе на отрезке. Вычислить сумму найденного ряда на этом отрезке. Исследовать равномерную сходимость найденного ряда на некоторых промежутках.

На решение этих задач отводится два астрономических часа.