Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет доуниверситетской подготовки
и профессиональной ориентации

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для слушателей заочных подготовительных курсов

Минск 2005

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я 73
М 54

Рецензент:
д-р физ.-мат. наук, доцент В.В. Цегельник

Составители:
В.И. Васильева, Л.К. Юхо

М 54 **Методические** указания и контрольные тесты по математике для слушателей заочных подготовительных курсов /Сост. В.И. Васильева, Л.К. Юхо. – Мн.: БГУИР, 2005. - 82 с.
ISBN 985-444-848-7

Приведены десять контрольных тестов по основным разделам школьного курса математики в соответствии с программой вступительных экзаменов в вузы, подробно разобраны решения аналогичных примеров и задач, что в значительной мере должно облегчить самостоятельное решение и оформление задач, предлагаемых в контрольных тестах.

Методические указания и контрольные тесты предназначены для слушателей заочных подготовительных курсов БГУИР.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я 73

ISBN 985-444-848-7

Содержание

Введение

Цель методических указаний – помочь слушателям подготовительных курсов систематизировать свои знания по математике и ознакомить их с примерным уровнем требований на вступительных испытаниях в БГУИР.

Одним из методов унифицированного контроля знаний, умений и навыков слушателей курсов является тестирование.

Для понимания решений приведенных примеров и успешного выполнения рекомендуемых контрольных тестов необходимо очень внимательно изучить соответствующие разделы школьной программы по математике.

Контрольные тесты следует выполнять самостоятельно. Каждый тест состоит из **части А**, где указаны варианты ответов, один из которых является правильным, и **части Б**, где ответ должен быть получен после решения задачи.

Каждый контрольный тест слушатель должен выполнять в отдельной тетради, записывая полностью условия всех задач. Подробно и аккуратно необходимо записывать решение каждого задания обеих частей теста.

В конце решения задачи должен быть написан ответ, а для **части А** теста – указан номер правильного ответа.

Получив проверенную работу, слушатель должен исправить ошибки с учетом замечаний преподавателя.

Тема 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.
ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие вопросы: множество действительных чисел, его подмножества, модуль действительного числа, арифметический корень из действительного числа, степени и корни, действия над ними, формулы сокращенного умножения, разложение многочлена на множители, пропорциональное деление. Затем рассмотреть ряд примеров, решенных перед контрольной работой, и выполнить контрольную работу.

Пример1. Выполните перевод периодических дробей в обыкновенные:

а) 0, (81), б) 2,3 (27), в) 0,51 (9).

Решение

а) Положим $x = 0,(81) = 0,818181\ldots$

Умножим x на такое число, чтобы запятая сдвинулась вправо ровно на период, в данном случае на 100, получим:

$100x = 81,8181\ldots = 81,(81)$.

Выполним вычитание :

$$100x - x = 81,(81) - 0,(81),$$

$$99x = 81, \qquad x = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}.$$

Ответ : $0,(81) = \dfrac{9}{11}$.

б) Положим $x = 2,3\,(27) = 2,327272\ldots$

Умножим x сначала на 10, чтобы получилась чистая периодическая дробь, затем на 1000. Получим $10x = 23,(27)$, $1000x = 2327,(27)$.

Выполним вычитание :

$$1000x - 10x = 2327,(27) - 23,(27),$$

$$990x = 2304, \qquad x = \frac{2304}{990} = 2\frac{18}{55}.$$

Ответ : $2,3(27) = 2\dfrac{18}{55}$.

в) Положим $x = 0,15\,(9)$, $100x = 15,(9)$,

$1000x = 159,(9), \qquad 1000x - 100x = 159,(9) - 15,(9),$

$900x = 144, \qquad x = \dfrac{144}{900} = \dfrac{4}{25} = \dfrac{16}{100} = 0{,}16.$

Ответ : $0{,}15(9) = 0{,}16$.

Вообще любое целое число или конечная десятичная дробь может быть представлена в виде бесконечной периодической дроби с периодом 0 или 9. Например : 1 = 1, (0) = 0, (9), 5 = 5, (0) = 4, (9); 2,7 = 2,7 (0) = 2,6 (9).

Примечание. Перевод периодических дробей в обыкновенные можно выполнять, пользуясь формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (|q|<1).

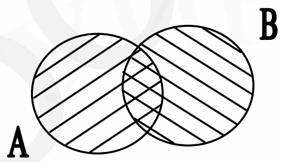
<u>Пример 2.</u> Даны множества $A = \left\{(x;y)\,/\,x^2 + y^2 \le 9\right\}$ и

$$B = \left\{(x;y)\,/\,x^2 + y^2 > 1\right\}.$$

Найдите AU B и A∩B.

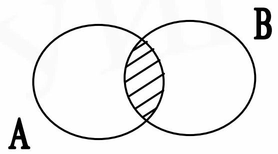
<u>Решение.</u> По определению **объединением** двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A или множества B.

$$A \bigcup B = \{x\,/\,x \in A \text{ или } x \in B\}.$$



Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих множествам A и B:

$$A \bigcap B = \{x\,/\,x \in A \text{ и } x \in B\}.$$



В данном примере множество A графически представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом R = 3, множество B – внешность круга с центром в начале координат и радиусом R = 1, не включая границу:

$$A \bigcup B = \{(x;y)\,/\,x \in R,\ y \in R\},$$

$$A \bigcap B = \{(x;y)\,/\,1 < x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Примечание. В дальнейшем при решении систем уравнений и неравенств будут использоваться обозначения :

{ – знак, соответствующий пересечению множеств, заменяет союз "и".
[– знак, соответствующий объединению множеств, заменяет союз "или".
$\exists$ – знак существования, заменяет слова "существует", "можно найти".
$\forall$ – знак общности, заменяет слова "всякий", "любой".

Пример 3. Найдите все пары натуральных чисел m и n, сумма которых равна 85, НОК (m, n) = 102.

Решение. Имеем систему $\begin{cases} m+n=85, \\ НОК(m,n)=102. \end{cases}$

Обозначим НОД (m, n) = d, тогда $m=m_1 d$; $n=n_1 d$, где m_1 и n_1 - натуральные числа, не имеющие общих множителей. Используя формулу $НОК(m,n)=\dfrac{m\cdot n}{НОД(m,n)}$ и введенные обозначения, запишем систему в виде

$$\begin{cases} (m_1+n_1)d=85 \\ m_1\cdot n_1 d=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m_1+n_1)d=5\cdot 17 \\ m_1\cdot n_1\cdot d=6\cdot 17 \end{cases} \Rightarrow d=17$$

$$\begin{cases} m_1+n_1=5 \\ m_1\cdot n_1=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m_1=3 \\ n_1=2 \end{cases} \\ \begin{cases} m_1=2 \\ n_1=3 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=3\cdot 17=51, \\ n=2\cdot 17=34, \end{cases} \\ \begin{cases} m=2\cdot 17=34, \\ n=3\cdot 17=51. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: {(51; 34), (34;51)}.

Пример 4. Найдите все пары целых чисел (x ; y), удовлетворяющих условию: $x^2-47=y^2$.

Решение. $\begin{cases} x^2-y^2=47 \\ x,y\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=47, \\ x,y\in Z. \end{cases}$

Так как 47 = 47·1 = 1·47 = (-47) · (-1) = (-1) · (-47), то данная система будет равносильна совокупности четырех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=47 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=47 \\ x+y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-47 \\ x+y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-47 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=24 \\ y=23 \end{cases} \\ \begin{cases} x=24 \\ y=-23 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-24 \\ y=23 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-24 \\ y=-23 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ : { (24; 23), (24; -23), (-24, 23), (-24; -23) }.

Прежде чем упрощать выражения, содержащие степени и корни, повторите действия со степенями, а также формулы сокращенного умножения:

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Дроби, входящие в выражение, сначала нужно упростить, сокращая числитель и знаменатель на общие множители, если они существуют. Проводя преобразования, надо учитывать область определения выражения. Обратите внимание на определение модуля $|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

Например: $\left|\sqrt{3} - 7\right| = 7 - \sqrt{3},$ т.к. $\sqrt{3} - 7 < 0$,

$\left|\sin 200^0\right| = -\sin 200^0$, т.к. $\sin 200^0 < 0$,

$\left|2^x\right| = 2^x$, т.к. $2^x > 0, \forall x \in R$.

Арифметический корень : $\sqrt[n]{a} = c, \quad a \ge 0, \quad c \ge 0, \quad c^n = a.$ Например:

$\sqrt[3]{27} = 3$ – арифметический корень,

$\sqrt{25} = 5$ – арифметический корень,

$\sqrt[5]{-32} = -2$ – не является арифметическим корнем.

Принято обозначать арифметический корень четной степени знаком $\sqrt[2n]{\ldots}, \left(\sqrt[2n]{a} \ge 0, a \ge 0\right)$. В частном случае $\sqrt{a^2} = |a|$.

Запись $\sqrt{a^2} = \pm a$ неправильная. Почему?

<u>Пример 5.</u> Упростите выражение $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 4x}}{x^2 + 1 - 2|x|}$.

<u>Решение.</u> Обозначим выражение буквой А и преобразуем его:

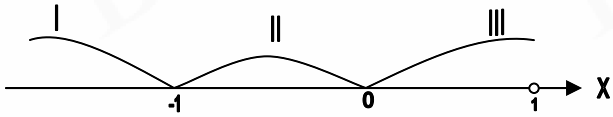
$$A = \frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2}}{|x|^2 - 2|x| + 1} = \frac{(x-1)|x+1|}{(|x|-1)^2}.$$

Найдем область определения выражения А:

Д(А): $|x| - 1 \ne 0 \Rightarrow x \ne \pm 1 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Найдем те значения x, при переходе через которые выражения под модулем меняют свой знак: x = -1, x = 0.

Нанесем эти значения на координатную ось



Область определения Д(А) разбилась на три интервала, на каждом из которых рассмотрим выражение А.

Установим знаки выражений, стоящих под модулем, на этих интервалах:

	$(-\infty;-1)$	$(-1,0)$	$[0;1)\cup(1;+\infty)$
x+1:	-	+	+
x:	-	-	+

Знаки выражений определяем, придавая x какое-нибудь значение, принадлежащее этому интервалу:

1. $$\begin{cases} x<-1 \\ A=\dfrac{(x-1)(-x-1)}{(-x-1)^2}=\dfrac{x-1}{-x-1}=-\dfrac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -1<x<0 \\ A=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(-x-1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 0\le x<+\infty, x\ne 1 \\ A=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x+1}{x-1}. \end{cases}$$

Ответ: $$A=\left[\begin{array}{ll} -\dfrac{x-1}{x+1}, & x\in(-\infty;-1), \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & x\in(-1,0), \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x\in[0;1)\cup(1,+\infty). \end{array}\right.$$

Теперь познакомьтесь с делением многочлена на многочлен «углом». Многочлены – делимое и делитель – приведите к стандартному виду.

Например:

$$
\begin{array}{l}
\underline{-\,5x^4-3x^3+2x^2-7x+3} \quad\quad \big|\ x-2 \\
\underline{\;\;5x^4-10x^3} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 5x^3+7x^2+16x+25 - \textit{частное} \\
\quad\quad -\,7x^3+2x^2-7x+3 \quad\quad\quad \text{1-й } \textit{остаток} \\
\quad\quad\; \underline{7x^3-14x^2} \\
\quad\quad\quad\quad -\,16x^2-7x+3 \quad\quad \text{2-й } \textit{остаток} \\
\quad\quad\quad\quad\; \underline{16x^2-32x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -\,25x+3 \quad\quad \text{3-й } \textit{остаток} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \underline{25x-50} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 53 \quad\quad \text{4-й } \textit{остаток}
\end{array}
$$

Чтобы получить старший член частного, надо старший член делимого разделить на старший член делителя $(5x^4 : x = 5x^3)$.

Затем умножить на делитель $(5x^3(x-2))$ и результат вычесть из делимого, подписывая подобные члены под подобными.

Получим первый остаток от деления многочленов $(7x^3+2x^2-7x+3)$.

Следующий член частного получаем делением старшего члена 1-го остатка на старший член делителя $(7x^3 : x = 7x^2)$, умножаем его на $(x-2)$, получаем $(7x^3-14x^2)$ и вычитаем из 1-го остатка, получим $(16x^2-7x+3)$ и т.д. Процесс деления прекращаем, когда остаток не будет делиться на делитель, т.е. степень остатка станет меньше степени делителя, или когда остаток получается равным нулю.

В нашем примере 53 не делится на $(x-2)$.

<u>Примечание</u>

Многочлен-делимое можно представить так:

$$5x^4-3x^3+2x^2-7x+3=(5x^3+7x^2+16x+25)\cdot(x-2)+53.$$

<u>Пример 6</u>

Выделите целую часть дроби $\dfrac{2x^3-3x+1}{x+2}$.

<u>Решение</u>

Выполним деление «углом» многочленов:

$$
\begin{array}{l}
-\,2x^3-3x+1 \quad\quad\quad \big|\ \underline{x+2} \\
\;\;\underline{2x^2+4x^2} \quad\quad\quad\quad\;\; 2x^2-4x+5 \\
\quad\quad -\,-4x^2-3x+1 \\
\quad\quad\;\; \underline{-4x^2-8x} \\
\quad\quad\quad\quad -\,5x+1 \\
\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{5x+10}
\end{array}
$$

Заметьте, что члену $4x^2$ нет подобного, поэтому его переписываем в 1-й остаток, помня, что выполняется вычитание:

$$(2x^3 - 3x + 1) - (2x^3 + 4x^2) = -4x^2 - 3x + 1.$$

Итак, $\dfrac{2x^3 - 3x + 1}{x + 2} = 2x^2 - 4x + 5 - \dfrac{9}{x + 2}$.

Ответ: $2x^2 - 4x + 5$.

<u>Примечание</u>

Выделение целой части дроби аналогично правилу перевода неправильной обыкновенной дроби в правильную:

$\dfrac{25}{6} = 4 + \dfrac{1}{6} = 4\dfrac{1}{6}$, 25 : 6 = 4 (1 в остатке).

При решении различных задач встречаются задачи на пропорциональное деление.

Вспомните теорию:

1. Основное свойство ряда равных отношений:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n},$$

где a_1, a_2, …, a_n, b_1, …, b_n - числа .

2. Две величины x и y называются прямо пропорциональными, если $\dfrac{y}{x} = k$, или $y = k \cdot x$, k – коэффициент пропорциональности.

Две величины x и y называются обратно пропорциональными, если $x \cdot y = k$ или $y = \dfrac{k}{x}$, k – коэффициент обратной пропорциональности.

3. ***<u>Задача 1</u>***

Число A разделить на n слагаемых прямо пропорционально числам a_1, a_2, …, a_n.

Обозначим искомые слагаемые x_1, x_2, …, x_n. Тогда

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Отсюда следует :

$$\frac{x_i}{a_i} = \frac{A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \Rightarrow \qquad x_i = \frac{a_i A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

<u>Примечание</u>

$\dfrac{A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = k$ k – коэффициент прямой пропорциональности.

Задача 2

Число A разделить на n слагаемых обратно пропорционально числам a_1, a_2, …, a_n.

Обозначим искомые слагаемые буквами x_1, x_2, …, x_n. Тогда

$a_1 x_1 = a_2 x_2 = ... = a_n x_n$ или

$$\frac{x_1}{1/a_1} = \frac{x_2}{1/a_2} = ... = \frac{x_n}{1/a_n} = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} = \frac{A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n}.$$

Отсюда следует $\dfrac{x_i}{1/a_i} = \dfrac{A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} \Rightarrow x_i = \dfrac{1/a_i A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n}$,

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Примечание

$\dfrac{A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} = k$, k – коэффициент обратной пропорциональности.

Пример 7. Даны два подобных четырехугольника. Стороны одного из них равны 2; 3; 4; 5. Найдите стороны другого, если их сумма равна 98.

Решение. Обозначим искомые стороны x_1, x_2, x_3, x_4.

Тогда $\dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2}{3} = \dfrac{x_3}{4} = \dfrac{x_4}{5} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2+3+4+5} = \dfrac{98}{14} = 7$.

$$\frac{x_1}{2} = 7 \Rightarrow x_1 = 14.$$

$$\frac{x_2}{3} = 7 \Rightarrow x_2 = 21.$$

$$\frac{x_3}{4} = 7 \Rightarrow x_3 = 28.$$

$$\frac{x_4}{5} = 7 \Rightarrow x_4 = 35.$$

Ответ: {14; 21; 28; 35}.

Пример 8. Высоты треугольника относятся как 3 : 4 : 6. Найдите стороны этого треугольника, если периметр равен 18.

Решение. Обозначим стороны треугольника a, b, c, где a + b + c = 18. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot h \Rightarrow ah = 2S = k$, где k - коэффициент обратной пропорциональности, т.е. стороны треугольника обратно пропорциональны соответствующим высотам. Тогда $\dfrac{a}{1/3} = \dfrac{b}{1/4} = \dfrac{c}{1/6} = \dfrac{18}{9/12} = 24$.

$a = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8,$ $b = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6,$ $c = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$.

Ответ : {8; 6; 4}.

Контрольный тест № 1

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	Число $\dfrac{\overline{xyz}-\overline{zyx}}{11}$ – является …	1) натуральным; 2) целым; 3) иррациональным; 4) целым отрицательным; 5) правильного ответа нет.
А2	Сколько трехзначных чисел не содержит цифру 9?	1) 9^3; 2) $9^2\cdot 8$; 3) 8^3; 4) $9\cdot 8^2$; 5) $9\cdot 3$.
А3	Сколько чисел вида $\overline{1x3y}$ делится на 45? Среднее арифметическое этих чисел равно…	1) 2250; 2) 1732,5; 3) 1500; 4) 1600; 5) 1287,5.
А4	Найти сумму всех целых чисел m и n для которых $\begin{cases} 2mn+n=12, \\ mn\ge 7. \end{cases}$	1) – 21; 2) 24; 3) – 19; 4) – 17; 5) 23.
А5	Наименьшее общее кратное чисел a и b ($a>b$) равно 2310, а их наибольший общий делитель равен 11. Тогда наименьшее значение $a-b$ равно…	1) 8; 2) 10; 3) 12; 4) 11; 5) 13.
А6	Вычислить $\dfrac{(1,(3)-0,4):2\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{7}+0,(6)\right)\cdot\frac{7}{17}}$.	1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{7}{5}$; 3) $\frac{1}{15}$; 4) $\frac{7}{15}$ 5) $\frac{1}{45}$.
А7	Вычислить $\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt{18}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{56}}$.	1) 8; 2) 14; 3) 16; 4) 17; 5) 2.
А8	Значение выражения $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ равно ...	1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $2-\sqrt{6}$; 3) $1-\sqrt{7}$; 4) $1-\sqrt{3}$; 5) 0.
А9	Значение выражения $\left(\dfrac{c^{-1,25}-c^{-0,75}}{c^{-1}-c^{-0,5}}\right)^{-2}$ при $c=1,6\cdot 10^{-3}$ равно …	1) $4\cdot 10^{-2}$; 2) $2\cdot 10^{-1}$; 3) $4\cdot 10^{-4}$; 4) $16\cdot 10^{2}$; 5) 40.
А10	Среднее арифметическое чисел $\dfrac{36^{38}}{216^{17}}$ и $\dfrac{36^{37}}{216^{16}}$ равно …	1) $7\cdot 6^{21}$; 2) $4,2\cdot 6^{19}$; 3) $3,6\cdot 6^{24}$; 4) $2,8\cdot 6^{25}$; 5) $3,5\cdot 6^{25}$.

№	Задания	Варианты ответов
А11	Значение выражения $\dfrac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$ равно…	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 2; 5) $\frac{3}{2}$.
А12	После упрощения выражение $\sqrt{\dfrac{1}{x}\left(9x^{-1}+4x-12\right)}$ равно …	1) $\dfrac{\lvert 2x-3\rvert}{x}$; 2) $\left\lvert\dfrac{2x-3}{x}\right\rvert$; 3) $\dfrac{\lvert x\rvert}{2x-3}$; 4) $\left\lvert\dfrac{x}{2x-3}\right\rvert$; 5) $\dfrac{2x-3}{x}$.
А13	После упрощения выражение $\left(\left(\dfrac{x^2-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}}+x\sqrt[3]{y}\right):\left(x+\sqrt[6]{x^3y^2}\right)-\sqrt[3]{y}\right)^2$ равно ….	1) $\lvert\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}\rvert$; 2) $\lvert\sqrt{x}\rvert$; 3) x; 4) $\sqrt[3]{xy}$; 5) $x\sqrt[3]{y}$.
А14	Если $\sqrt{a}-\sqrt{a+5}=-3$, то $\sqrt{a}+\sqrt{a+5}$ равно …	1) $\frac{5}{3}$; 2) $-\frac{5}{3}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) 1.
А15	При каких x дробь $\dfrac{3x^3-2x^2+7}{x+1}$ принимает целые значения. В ответ записать сумму целых значений x.	1) -4; 2) -5; 3) 4; 4) 0; 5) 5.

Часть Б

№	Условие задания
Б1	Даны множества $A=\left\{(x;y)\big/\dfrac{1}{\lvert x\rvert}>\dfrac{1}{\lvert y\rvert}\right\}$ и $B=\{(x;y)/x+y\geq 0\}$. Найти $A\bigcup B$, $A\bigcap B$ и изобразить на плоскости.
Б2	Сколько пар (x,y) целых чисел удовлетворяет условию $x^2-3xy+2y^2=3$.
Б3	Разложить число 180 на части: а) прямо пропорциональные числам 5; 3; 1, б) обратно пропорциональные числам 3; 4; 6.
Б4	Найти x из пропорции $x:9{,}8(9)=0,(12):0{,}1(6)$.
Б5	Разность $\sqrt{\lvert 12\sqrt{5}-29\rvert}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$ является целым числом. Найти это число.

Тема 2. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

При изучении данной темы следует обратить внимание на определение функции, ее основные свойства: четность и нечетность, периодичность, монотонность, а также на условия существования обратной функции и ее нахождение. Надо уметь строить графики элементарных функций, функций, заданных несколькими аналитическими выражениями или содержащих модули.

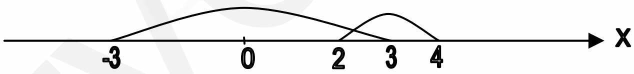
Пример 1. Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\arccos(3-x)} + \frac{1}{\sqrt{4x^2-20x+25}} - \sqrt[3]{1-x}\,.$$

Решение. Данная функция есть алгебраическая сумма трех функций $y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\arccos(3-x)}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-20x+25}}$, $f_3(x) = -\sqrt[3]{1-x}$. Область определения D(y) есть пересечение областей определения каждой из функций, т.е. $D(y) = D(f_1) \cap D(f_2) \cap D(f_3)$.

Найдем их:

$$D(f_1):\begin{cases} 9-x^2 \ge 0 \\ -1 \le 3-x \le 1 \\ \arccos(3-x) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 9 \\ -4 \le -x \le -2 \\ 3-x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 3, \\ 2 < x \le 4. \end{cases}$$



$x \in (2;3]$.

$$D(f_2): 4x^2 - 20x + 25 > 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x \ne 2{,}5. \end{cases}$$

$D(f_3): x \in R,$ т.к. корень нечетной степени можно извлечь из любого действительного числа:

$$D(y):\begin{cases} 2 < x \le 3, \\ x \in R, x \ne 2{,}5 \Rightarrow x \in (2;2{,}5) \cup (2{,}5;3], \\ x \in R. \end{cases}$$

***Ответ*:** $(2;\ 2{,}5) \cup (2{,}5;\ 3]$.

Пример 2. Установите, является данная функция четной или нечетной:

а) $f(x) = x \cdot |x| - 3x^5$; б) $f(x) = tg^2 x + \dfrac{3x^4 + 1}{|x|} - 1$;

в) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$.

Решение. Функция $y = f(x)$ называется четной, если: 1) область определения функции есть симметричное относительно точки O (0,0) множество; 2) для $\forall x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$, т.е.

$$y = f(x) \text{ – четная} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D(f), & -x \in D(f), \\ \forall x \in D(f), & f(x) = f(-x), \end{cases}$$

$$y = f(x) \text{ – нечетная} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D(f), & -x \in D(f), \\ \forall x \in D(f), & f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

а) $f(x) = x \cdot |x| - 3x^5$.

1. $D(f) = R$, т.е. область определения есть симметричное относительно точки O (0,0) множество.

2. $f(-x) = -x \cdot |-x| - 3(-x)^5 = -x \cdot |x| + 3x^5 = -(x \cdot |x| - 3x^5) = -f(x)$. Значит, данная функция нечетная.

б) $f(x) = tg^2 x + \dfrac{3x^4 + 1}{|x|} - 1$.

$$1.\quad D(f) = \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Область определения есть симметричное множество относительно точки O (0,0).

2. $f(-x) = (tg(-x))^2 + \dfrac{3(-x)^4 + 1}{|-x|} = -1 = tg^2 x + \dfrac{3x^4 + 1}{|x|} - 1 = f(x)$. Значит, функция четная.

в) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$.

$$D(f) = \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [5;7].$$

Область определения несимметрична относительно точки O (0, 0). Значит, данная функция ни четная, ни нечетная. Такую функцию называют функцией общего вида.

Пример 3. Найдите период функции, если он существует:

а) $y = 2\sin\frac{x}{3} - 3\cos(1 - \frac{x}{5})$;

б) $y = \sin^2 2x + \sin 12x \cdot \cos 6x$.

Решение. Функция $y = f(x)$, $x \in D(y)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$, такое, что выполняются два условия: 1) если $x \in D(y)$, то $x \pm T \in D(y)$; 2) $f(x \pm T) = f(x)$. Число T называется периодом функции. Числа вида kT, $k \in Z, k \neq 0$ также являются периодами. Наименьший положительный период называют основным периодом, или просто периодом.

Известно, что функции вида $y = ASin(\omega x + \varphi)$, $y = ACos(\omega x + \varphi)$ имеют периодом число $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, а функции $y = Atg(\omega x + \varphi)$, $y = Actg(\omega x + \varphi)$ имеют период $T = \frac{\pi}{|\omega|}$. Если функция $y = f(x)$ есть линейная комбинация периодических функций, т.е. $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, где c_1 и c_2 - постоянные, не равные нулю числа, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ периодические функции с периодами T_1 и T_2 соответственно, то периодом функции $y = f(x)$ является число T, в котором целое число раз содержатся периоды T_1 и T_2, т.е. $T = mT_1 = nT_2$, $m, n \in Z$.

Проверить, является ли данная функция периодической можно по отношению $\frac{T_1}{T_2}$. Если $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{k}$ - число рациональное, то периоды ${}_1T$ и T_2 называются соизмеримыми и период T существует. Если $\frac{T_1}{T_2} \neq \frac{m}{k}$, т.е. является числом иррациональным, то периоды ${}_1T$ и T_2 несоизмеримы и T не существует.

а) $y = 2\sin\frac{x}{3} - 3\cos\left(1 - \frac{x}{5}\right)$.

Обозначим $y = y_1 + y_2$, где $y_1 = 2\sin\frac{x}{3}$, $T_1 = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$,

$y_2 = -3\cos\left(1 - \frac{x}{5}\right)$, $T_2 = \frac{2\pi}{1/5} = 10\pi$.

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{6\pi}{10\pi} = \frac{3}{5}$ - рациональное число, значит, период T существует.

$T = k \cdot 6\pi = m \cdot 10\pi$, $k, m \in Z$.

Подбором находим наименьшие целые положительные числа k = 5, m = 3, при которых равенство выполняется: $T = 5 \cdot 6\pi = 3 \cdot 10\pi = 30\pi$.

Ответ **:** 30π.

б) $y = \sin^2 2x + \sin 12x \cdot \cos 6x$.

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y=\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1}{2}\left(\sin 18x+\sin 6x\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\sin 18x+\frac{1}{2}\sin 6x.$$

$$y_1=-\frac{1}{2}\cos 4x,\ T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

$$y_2=\frac{1}{2}\sin 18x,\ T_2=\frac{2\pi}{18}=\frac{\pi}{9},$$

$$y_3=\frac{1}{2}\sin 6x,\quad T_3=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Так как $\frac{T_1}{T_2}=\frac{9}{2},\quad \frac{T_2}{T_3}=\frac{3}{9},\quad \frac{T_1}{T_3}=\frac{3}{2}$ есть рациональные числа, то период T существует и равен $T=k\frac{\pi}{2}=m\cdot\frac{\pi}{9}=n\cdot\frac{\pi}{3},\ k,m,n\in Z,$

при k = 2, m = 9, n = 3 T = π.

Ответ : π.

<u>Пример 4</u>. Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и множество значений прямой и обратной функций:

а) $y=5\sin\frac{x}{3}$;

б) $y=\begin{cases}x-1, & x\in[-1;3),\\ 1-x, & x\in[3;+\infty).\end{cases}$

<u>Решение</u>

Необходимым и достаточным условием существования обратной функции является взаимно однозначное соответствие между переменными *x* и *y*, т.е. одному значению $x\in D(y)$ ставится в соответствие одно значение $y\in E(y)$ и обратно : одному значению $y\in E(y)$ соответствует одно значение $x\in D(y)$.

Достаточным условием существования обратной функции является монотонность ее для $\forall x\in D(y)$. Это условие не является необходимым, т.к. дробно-линейная функция $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ не является монотонной в области определения $D(f)=\left\{x / x\in R,\quad x\neq-\frac{d}{c}\right\}$, но обратная функция существует, т.к. между переменными существует взаимно однозначное соответствие.

Чтобы найти обратную функцию для функции $y=f(x,)\quad x\in D(y),\quad y\in E(y),$

надо:

1) проверить выполнимость условий существования обратной функции;

2) из уравнения $y=f(x)$ выразить $x=f^{-1}(y)$;

3) поменять обозначения переменных: *x* на *y,* а *y* на *x*.

Полученная таким образом функция $y=f^{-1}(x)$ называется обратной по отношению к данной. Область определения и множество значений для этих функций (их называют также взаимно обратными функциями) меняются местами. Графики взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

а) $y=5\sin\frac{x}{3}$, $D(y)=\{x\,/\,x\in R\}$, $E(y)=\{y\,/\,y\in[-5;5]\}$.

Для данной функции обратная функция не существует, т.к. не выполняется взаимно однозначное соответствие между переменными. Одному значению y соответствует бесчисленное множество значений x. Но если рассмотреть функцию $y=5\sin\frac{x}{3}$ на промежутке $\frac{x}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, на котором она монотонно возрастает, а значит, каждое свое значение принимает ровно один раз, то для нее можно указать обратную. Итак, имеем $y=5\sin\frac{x}{3}$,

$D(y)=\left\{x\,/\,x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\right\}$,
$E(y)=\{y\,/\,y\in[-5;5]\}$.

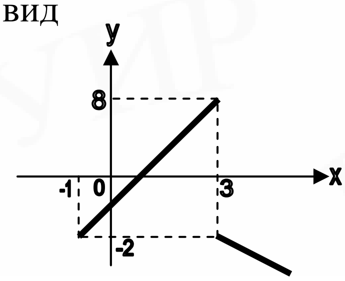
1. Выражаем x через y:
$\frac{x}{3}=\arcsin\frac{y}{5}\Rightarrow x=3\arcsin\frac{y}{5}$.

2. Заменяем y на x, а x на y, получим $y=3\arcsin\frac{x}{5}$ - обратная функция. Для нее $D(y)=\{x\,/\,x\in[-5;5]\}$, $E(y)=\left\{y\,/\,y\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\right\}$.

Ответ: $y=3\arcsin\frac{x}{3}$.

б) $$y=\begin{cases}x-1, & x\in(-1,3),\\ 1-x, & x\in[3,+\infty).\end{cases}$$

Функция задана двумя формулами, для нее $D(y)=(-1,\infty)$, $E(y)=(-\infty,2)$.
График данной функции имеет вид



Между переменными существует взаимно однозначное соответствие (хотя функция не монотонная), поэтому для нее существует обратная функция. Найдем ее.

Рассмотрим функцию на промежутках:

1. $y = x - 1, \quad x \in (-1;3), \quad y \in (-2;2)$

   а) выражением x через y, получим $x = y + 1$;

   б) меняем обозначения переменных $y = x + 1$,

   $x \in (-2;2), \qquad y \in (-1;3)$.

2. $y = 1 - x, \quad x \in [3,+\infty), \quad y \in (-\infty;-2]$

   а) выражением x через y, получим $x = 1 - y$;

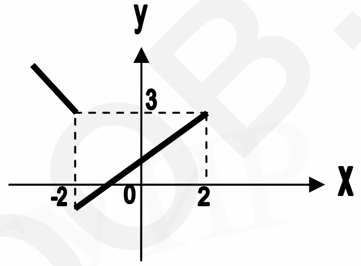
   б) меняем обозначения переменных $y = 1 - x$,

   $x \in (-\infty;-2], \qquad y \in [3;+\infty)$.

Итак, получаем обратную функцию

$$y = \begin{cases} 1 - x, & x \in (-\infty,-2], \\ x + 1, & x \in (-2,2). \end{cases}$$

График обратной функции имеет вид



Для нее $D(y) = (-\infty,+2), \qquad E(y) = (-1,+\infty)$.

При решении многих задач по тригонометрии приходится пользоваться теорией обратных тригонометрических функций. Ниже приводим формулы, которые желательно запомнить.

1.
$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$
$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad x \in [-1;1]$$
$$\arcsin(\sin x) = x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

2.
$$0 \le \arccos x \le \pi$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$
$$\cos(\arccos x) = x, \qquad x \in [-1;1]$$
$$\arccos(\cos x) = x, \qquad x \in [0;\pi]$$

3.
$$-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$$
$$arctg(-x) = -arctgx$$
$$tg(arctgx) = x, \qquad x \in R$$
$$arctg(tgx) = x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

4.
$$0 < arcctgx < \pi$$
$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$$
$$ctg(arcctgx) = x, \qquad x \in R$$
$$arcctg(ctgx) = x, \qquad x \in (0;\pi)$$

Пример 5. Вычислите: а) $arcctg(ctg(-5{,}2))$; б) $\sqrt{2}ctg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. а) $arcctg(ctg(-5{,}2)) \neq -5{,}2$, т.к. $-5{,}2 \notin (0;\pi)$

$$arcctg(ctg(-5{,}2)) = arcctg(-ctg5{,}2) = \pi - arcctg(ctg5{,}2) =$$
$$= \pi - arcctg(ctg(5{,}2-\pi)) = \pi - (5{,}2-\pi) = 2\pi - 5{,}2 = 1{,}08, \quad 1{,}08 \in (0,\pi).$$

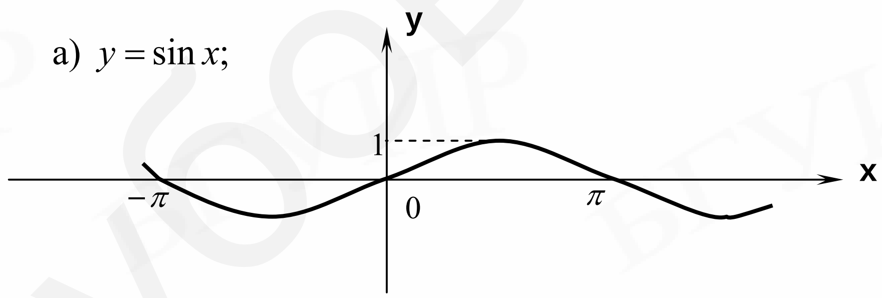
Ответ: 1,08.

б) $$\sqrt{2}ctg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{2}ctg\left(-\arcsin\frac{1}{3}\right) = -\sqrt{2}ctg\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) =$$
$$= -\sqrt{2}\,\frac{\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)} = -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{1}{3})}}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)} = -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = -4.$$

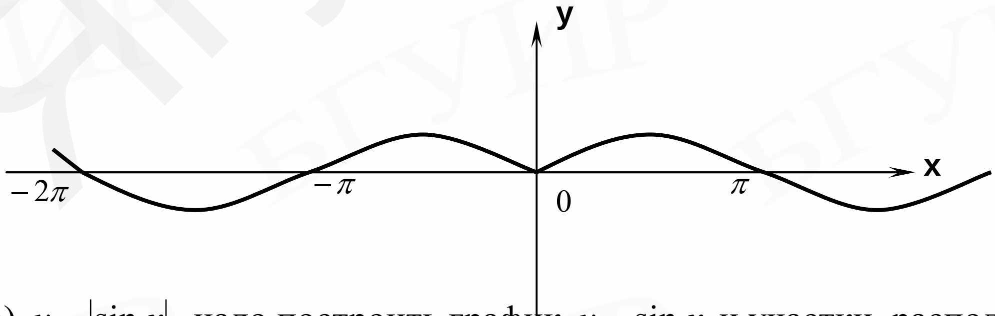
Ответ: -4.

Пример 6. Постройте графики:
а) $y = \sin x$; б) $y = \sin|x|$; в) $y = |\sin x|$; г) $|y| = \sin x$.

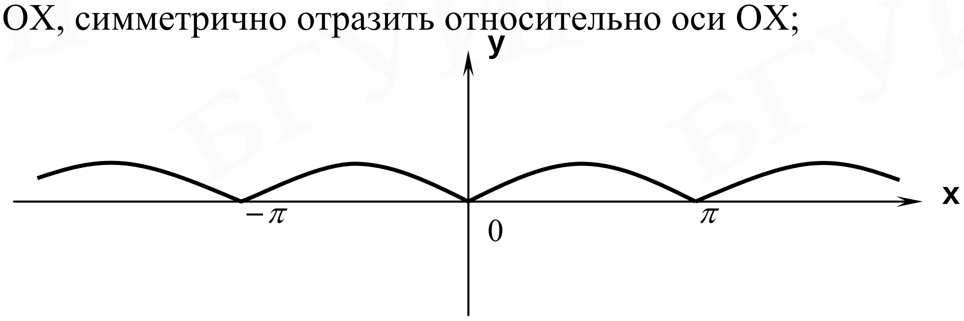
Решение. а) $y = \sin x$;



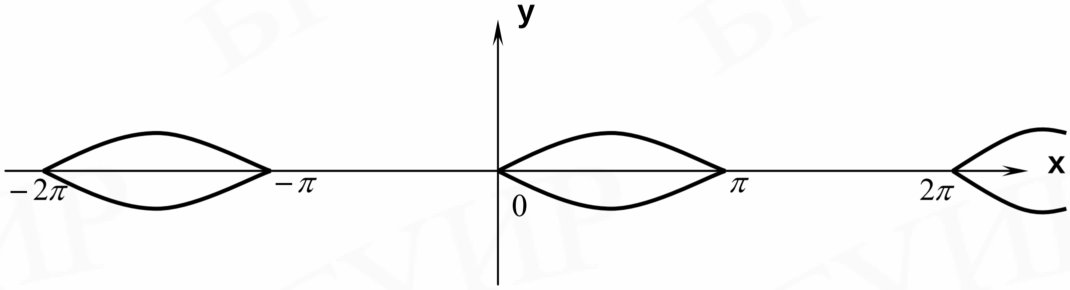
б) $y = \sin|x|$, надо построить график $y = \sin x$, для $x \geq 0$ и симметрично отразить его относительно оси ОУ, т.к. функция четная;



в) $y = |\sin x|$, надо построить график $y = \sin x$ и участки, расположенные ниже оси ОХ, симметрично отразить относительно оси ОХ;



г) $|y| = \sin x$, т.к. $|y| \ge 0$, то $\sin x \ge 0$; $x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$, надо построить график $y = \sin x$, $y \ge 0$ и симметрично отразить относительно оси ОХ.



Пример 7. Изобразите на координатной плоскости множество точек $\{(x; y) / x + y \le 3; \quad y + 3 > x^2 + 2x\}$.

Решение

1. Строим прямую $x + y = 3$, заметим, что точки, лежащие над прямой, удовлетворяют условию $y > 3 - x$, точки, лежащие под прямой, будут удовлетворять условию $y < 3 - x$.

Значит, точки, координаты которых удовлетворяют условию $y \le 3 - x$, лежат на прямой и под прямой.

2. Строим параболу $y + 3 = x^2 + 2x \Rightarrow y = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 4$. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > (x+1)^2 - 4$, лежат внутри параболы, исключая саму параболу.

3. Точки, координаты которых удовлетворяют обоим неравенствам, будут находиться в области, ограниченной параболой (исключая кривую), и прямой, включая прямую.

Контрольный тест № 2

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	Область определения функции $y = \sqrt{(x-2)(\sqrt{x} - 1)}$ есть …	1) луч; 2) отрезок; 3) точка; 4) прямая; 5) объединение луча и точки.
А2	Значение функции $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2 \cos\left(\dfrac{(y-2x)}{y}\right)}{3x^2 - 5xy + 7y^2}$ во всех точках прямой $y = 2x (x \ne 0)$ принадлежит промежутку…	1)(0; 1); 2) (-1; 0); 3) (2; 3); 4) [0; 2]; 5) (5; 10).

№	Задания	Варианты ответов
А3	Если $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$, то функция $g(x)$, обратная функции $f(x)$ равна…	1) $\dfrac{1}{3x+1}$; 2) $\dfrac{1-x}{3x}$; 3) $\dfrac{3x}{1-x}$; 4) $\dfrac{1-y}{3y}$; 5) $\dfrac{1}{3y+1}$.
А4	Найти значение параметра a, при которых функция $f(x)=(a-1)x+a^2-3$, $x\in(-\infty;+\infty)$ монотонно убывает.	1) $[1;+\infty)$; 2) $[-\infty;1)$; 3) (-1; 1); 4) (0; 2); 5) $(-\infty;-1]$.
А5	Дана функция $f(x)=\left(\dfrac{3+4x}{3-4x}\right)^{\frac{2}{x}}$. Вычислить $\dfrac{f(0{,}59)}{f(-0{,}59)}$.	1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 2; 3) –2; 4) 1; 5) -1.
А6	Если $f(x)=\begin{cases} x^2+3x-7, \text{при } x\ge 0 \\ g(x), \text{ при } x<0 \end{cases}$ четная функция, то $g(x)$ равна …	1) $-x^2-3x+7$; 2) x^2-3x-7; 3) $x^2+3\|x\|-7$; 4) $\|x^2+3x-7\|$; 5) $-x^2-3x-7$.
А7	Найти $tg\left(arctg3-arcctg\dfrac{1}{3}\right)$.	1) $2\dfrac{2}{3}$; 2) $-2\dfrac{2}{3}$; 3) 0; 4) 1; 5) $3\dfrac{1}{3}$.
А8	При каком значении параметра а функция $f(x)=(a+7)x+5a$, $x\in(-\infty,+\infty)$ является периодической?	1) 5; 2) 0; 3) –7; 4) – 4; 5) 2.
А9	Период функции $y=15\sin^2 12x+12\cos^2 15x-3$ равен …	1) $\dfrac{2\pi}{12}$; 2) π; 3) $\dfrac{\pi}{3}$; 4) $\dfrac{\pi}{6}$; 5) $\dfrac{2\pi}{15}$.
А10	Если $f(x-1)=2x-1$, а $f(g(x))=4x-3$, то $g(x)$ равна …	1) $g(x)=2x-2$; 2) $g(x)=2x-1$; 3) $g(x)=4x-3$; 4) $g(x)=4x+3$; 5) $g(x)=2x+2$.

№	Задания	Варианты ответов
А11	Если $x \in (-4; 4)$, то множеством значений функции $y = \lvert x^2 - 9 \rvert$ является промежуток…	1) $[0;7]$; 2) $[7;9]$; 3) $(7;9]$; 4) $[0;9]$; 5) $(0;9)$.
А12	Если $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-4}$, то $f(x^2) - f(x+2)$ приводится к виду …	1) $\dfrac{x+1}{x^2-4}$; 2) $-\dfrac{5x+1}{x^2-4}$; 3) $-\dfrac{5(x+1)}{x^2-4}$; 4) $\dfrac{5x+1}{x^2-4}$; 5) $\dfrac{5(x+1)}{x^2-4}$.
А13	Наибольшее значение функции $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 5}{3x^2 + 2x + 1}$ равно ….	1) 5; 2) 6; 3) 4; 4) 7; 5) 10.
А14	Функция $y = \lvert x-1 \rvert + \lvert x-3 \rvert$ принимает наименьшее значение при наименьшем значении x, равном …	1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) –2; 5) -3.
А15	При каких значениях c вершина параболы $y = x^2 + 6x + c$ находится на расстоянии, равном 5 от начала координат?	1) $\{-3; 9\}$; 2) $\{5; 13\}$; 3) $\{5; -5\}$; 4) $\{-3; -5\}$; 5) $\{6; -6\}$.

Часть Б

№	***Условие задания***
Б1	Нечетная функция $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, при $x > 0$. Задать функцию при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = 4$.
Б2	Найти сумму значений x, при которых достигается наименьшее значение функции $y = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) + 10$.
Б3	Количество целых значений параметра а, при которых абсцисса и ордината вершины параболы $y = (x - 9a)^2 + a^2 + 7a + 6$ отрицательны, равно …
Б4	При каком значении a график функции $y = \dfrac{2}{3}x^2 - 2x + \dfrac{a}{3}(5x - 9)$ симметричен относительно оси ординат?
Б5	Площадь фигуры, заданной неравенством $\lvert x-1 \rvert + \lvert y-1 \rvert \le 8$, равна…

Тема 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При изучении данной темы особое внимание следует обратить на область определения уравнения (О.О.У.), понятия равносильности уравнений, решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля, решение иррациональных уравнений, уравнений с параметром. Полезно знать теоремы алгебры, не входящие в программу вступительных экзаменов, но часто применяемые при решении уравнений.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + d$ на двучлен $x - x_0$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = x_0$.

Следствие. Чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на двучлен $(x - x_0)$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число x_0 было его корнем, т.е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема. Если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + d = 0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Пример 1. Решите уравнение $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$. В ответ запишите сумму корней.

Решение. Так как коэффициенты многочлена целые числа, то уравнение может иметь целый корень, который ищем среди делителей свободного члена, т.е. среди чисел ± 1, ± 3. Непосредственно убеждаемся, что $x = -1$ является корнем уравнения. Разделим многочлен $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ на двучлен $x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 & x+1 \\ \hline
\underline{2x^3 + 2x^2} & 2x^2 - 5x - 3 \\
\quad -5x^2 - 8x - 3 & \\
\quad \underline{-5x^2 - 5x} & \\
\qquad -3x - 3 & \\
\qquad \underline{-3x - 3} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Тогда уравнение запишется в виде

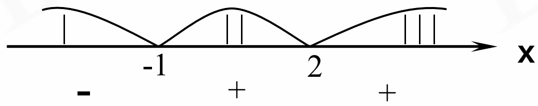
$(x+1)(2x^2 - 5x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{array} \right.$ корнями будут

$x_1 = -1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -0{,}5$. Сумма корней будет равна $-1 + 3 - 0{,}5 = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

Пример 2. Решите уравнение $-2|1+x|+5|2-x|=3x$.

Решение. Найдем значения x, при которых выражения под модулем обращаются в ноль, и нанесем их на числовую ось, т.е. $x=-1$, $x=2$.



$1+x$:	-	+	+
$2-x$:	+	+	-

Рассмотрим решение уравнения на каждом интервале:

1. $\begin{cases} x<-1 \\ 2+2x+5(2-x)=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

2. $\begin{cases} -1\le x\le 2 \\ -2-2x+5(2-x)=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 2 \\ x=\dfrac{8}{10} \end{cases} \Rightarrow x=0{,}8.$

3. $\begin{cases} x>2 \\ -2-2x-10+5x=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ -12=0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Ответ: 0,8.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$.

Решение. Найдем область определения уравнения:

$$\text{О.О.У} = \begin{cases} 2x-15\ge 0 \\ x+16\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{15}{2} \\ x\ge -16 \end{cases} \Rightarrow \quad x\ge \frac{15}{2}.$$

Перенесем один радикал в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат: $\begin{array}{c} \sqrt{2x-15}+1=\sqrt{x+16} \\ (\sqrt{2x-15}+1)^2=(\sqrt{x+16})^2 \end{array}$.

Получим уравнение $2\sqrt{2x-15}=30-x$.

Так как $2\sqrt{2x-15}\ge 0$, то $30-x\ge 0 \Rightarrow x\le 30$.

Возведем уравнение еще раз в квадрат, получим квадратное уравнение $4(2x-15)=(30-x)^2 \Rightarrow x^2-68x+960=0$, корнями которого являются $x_1=20, \quad x_2=48$.

Так как $x\le 30$, то $x_2=48$ корнем данного уравнения не является. Значит, корень уравнения $x=20$.

Ответ: 20.

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{x-4}{x+2}+3\dfrac{x+2}{x-4}=4$.

Решение. Область определения уравнения $\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 4. \end{cases}$ Обозначим $\dfrac{x-4}{x+2} = y,$ тогда уравнение запишется в виде $y + 3 \cdot \dfrac{1}{y} = 4$ или $y^2 - 4y + 3 = 0.$

Его корнями будут
$y = 1$ и $y = 3$. Тогда получим два уравнения, решим их.

1. $\dfrac{x-4}{x+2} = 1.$

$\dfrac{x-4}{x+2} - 1 = 0$

$\dfrac{-6}{x+2} = 0.$

Уравнение решений не имеет.

2. $\dfrac{x-4}{x+2} = 3.$

$\dfrac{x-4}{x+2} - 3 = 0$

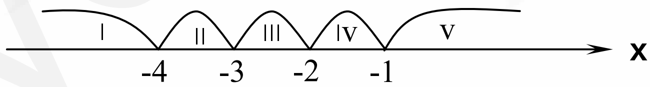
$\dfrac{-2x-10}{x+2} = 0.$

$x = -5.$

Ответ **:** $x = -5.$

Пример 5. При каком значении a уравнение $\left|x^2 + 5x + 6\right| + \left|x^2 + 5x + 4\right| = a$ имеет более десяти решений?

Решение. Из условия следует, что $a \geq 0$. Определим знаки выражений, стоящих под знаком модуля, на интервалах и рассмотрим решение уравнения на каждом из них. Разложим квадратные трехчлены на множители: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3),$ $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$



	I	II	III	IV	V
$x^2 + 5x + 6:$	+	+	-	+	+
$x^2 + 5x + 4:$	+	-	-	-	+

На I и V интервалах $x \in (-\infty, -4]$ $\cup$ $[-1, \infty)$ и уравнение примет вид $2x^2 + 10x + 10 - a = 0$. Максимальное число решений в зависимости от a может быть равно двум.

На III интервале $x \in [-3; -2]$,

$2x^2 + 10x + 10 + a = 0$. Максимальное число решений равно двум.

На II и IV интервалах $x \in (-4, -3)$ $\cup$ $(-2, -1)$ уравнение принимает вид $2 = a$ и решением его будет любое x из указанных промежутков.

Итак, при $a = 2$ уравнение имеет бесчисленное множество решений, а значит, больше 10.

При других значениях параметра a уравнение не может иметь более 10 решений.

***Ответ*:** 2.

Пример 6. Решите систему уравнений при всех значениях параметра a:

$$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

При решении систем линейных уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ее исследуют на совместность.

1. Если коэффициенты при x и y непропорциональны, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

Геометрически это означает, что прямые, определяемые каждым уравнением системы, пересекаются в одной точке.

2. Если коэффициенты при x, y и свободные члены пропорциональны, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Геометрически это означает, что прямые совпадают.

3. Если коэффициенты при x и y пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система решений не имеет (несовместна).

Геометрически это означает, что прямые параллельны.

Решение. Исследуем на совместность данную систему.

1. Так как коэффициенты при x, y и свободные члены пропорциональны, т.е. $\dfrac{a}{1} = \dfrac{1}{a} = \dfrac{a^2}{1}$ при $a = 1$, то в этом случае система имеет бесчисленное множество решений.

2. Так как коэффициенты при x и y пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам, т.е. $\dfrac{a}{1} = \dfrac{1}{a} \neq \dfrac{a^2}{1}$ при $a = -1$, то система решений не имеет.

3. Так как коэффициенты при x и y непропорциональны, т.е. $\dfrac{a}{1} \neq \dfrac{1}{a}$ при $a \neq \pm 1$, то в этом случае система имеет единственное решение.

Найдем его, решив систему методом подстановки. Выразим из первого уравнения y и подставим во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a^2 - ax \\ x + a(a^2 - ax) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a^2 - ax \\ x - a^2x = 1 - a^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = a^2 - ax \\ x(1-a^2) = 1 - a^3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-a^3}{1-a^2} = \frac{a^2+a+1}{1+a}, \qquad y = -\frac{a}{a+1}.$$

Итак, при $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение: $x = \dfrac{a^2+a+1}{a+1}$,

$y = \dfrac{-a}{a+1}$.

При решении ряда задач полезно знать так называемую обобщенную теорему Виета. Сформулируем ее для алгебраического уравнения третьей степени.

Дано уравнение $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$, x_1, x_2, x_3 - корни уравнения.

Тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$

<u>Пример 7.</u> Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$ (1)

В ответ запишите количество решений системы.

<u>Решение</u>. Обозначим: $\begin{cases} x + y + z = u, \\ xy + xz + zy = v, \\ xyz = w. \end{cases}$ (2)

Тогда данная система примет вид $\begin{cases} u = 2, \\ u^2 - 2v = 6, \\ u^3 - 3uv + 3w = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, \\ v = -1, \\ w = -2. \end{cases}$

Примечание. Использовали формулы:

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$.

$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3y^2x + 3x^2z + 3z^2x + 3y^2z + 3z^2y + 3xyz$.

К системе (2) можно применить теорему Виета, если тройку чисел (x; y; z) считать корнями кубического уравнения $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$.

Решая уравнение, находим корни $t_1 = 2$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$.

В силу симметрии системы (2) относительно x, y, z выписываем упорядоченные тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, которые и будут являться решениями системы (1):

(2; 1; -1), (2; -1; 1), (1; 2; -1), (1; -1; 2), (-1; 2; 1), (-1; 1; 2).

Ответ: 6.

Контрольный тест №3

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	При каких значениях параметра a уравнение $(a^2-9)x = a^3+27$ имеет единственное решение?	1) $a \neq 3$; 2) $a \neq -3$; 3) $a = 3$; 4) $a \neq \pm 3$; 5) $a = -3$.
А2	Уравнение $(a^2-1)x^2+(a+1)x+(a+1)=0$ имеет более двух решений, если a равно ...	1) -1; 2) 1; 3) -2; 4) 0; 5) нет правильного ответа.
А3	Среднее арифметическое всех действительных корней уравнения $x^3-13x+12=0$ равно…	1) $2\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) 0.
А4	Корень уравнения $\frac{8x^3+27}{4x+6}=5x+21$ принадлежит промежутку …	1) $(-6;-4)$; 2) $(-2;0)$; 3) $(1;3)$; 4) $(4;6)$; 5) $(7;10)$.
А5	Каким должно быть $n \neq 0$, чтобы корни уравнения $x^2+(m-16)x+7n=0$ были равны m и n?	1) -2; 2) 2; 3) 7; 4) 1; 5) -1.
А6	Найти произведение корней уравнения $5(x^2+2x-1)^2-4(x^2+3x-1)^2+10x^2=0$.	1) -6; 2) 4; 3) 1; 4) -1; 5) 6.
А7	Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+\lvert x\rvert=\frac{3}{2}$ равна …	1) $\sqrt{7}$; 2) $\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1)$; 3) -1; 4) $\sqrt{7}-1$; 5) $-\sqrt{7}$.
А8	Сумма корней уравнения $(x^2-8x+15)\sqrt{4-x}=0$ равна …	1) 8; 2) 7; 3) 12; 4) 9; 5) -4.
А9	Сумма целых отрицательных решений уравнения $\lvert(x^2+8x+15)(x-4)\rvert=(x^2+8x+15)(x-4)$ равна …	1) -8; 2) -7; 3) -12; 4) -9; 5) -15.
№	Задания	Варианты ответов

А10	Количество корней уравнения $\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1+\sqrt{x}$ равно …	1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) 4.
А11	Вычислить $\frac{5x}{x+1}$, если x – корень уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{45+x}=9$.	1) 5; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{4}$; 5) -4.
А12	Меньший корень уравнения $x+\sqrt[8]{x^5}-12x^{1/4}=0$ равен …	1) $-\sqrt[3]{4}$; 2) $\left(-\sqrt[3]{4}\right)^8$; 3) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^8$; 4) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^8$; 5) 0.
А13	Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\left\|x^2-8x+7\right\|=a^2$ имеет четыре корня.	1) $\|a\|>3$; 2) $\|a\|<3$; 3) $0<\|a\|<3$; 4) $a<3$; 5) $0<a<3$.
А14	Найти целые решения системы $\begin{cases}4x^2y+3x^3=49,\\ \cos\frac{x+y}{7}>0.\end{cases}$ В ответ $(x+y)$.	1) 12; 2) 14; 3) 15; 4) –2; 5) 13.
А15	Если $(x_0;y_0)$ - решение уравнения $x^2+y^2=2x-4y-5$, то (x_0+y_0) равно ...	1) 1; 2) -1; 3) -2; 4) 0; 5) 2.

Часть Б

№	***Условие задания***
Б1	Решить уравнение $\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{12x-2x^2+7}=7+\sqrt{2x-x^2+3}$.
Б2	Найти сумму корней уравнения $2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{18}$.
Б3	Решить уравнение $\sqrt{x-8y+16}+\sqrt{x+4y+4}=6$. В ответ записать наибольшее решение x.
Б4	Указать все значения параметра a , при которых система уравнений $\begin{cases}\|x\|+\|y\|=4,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$ имеет ровно четыре решения. В ответ записать сумму таких a.
Б5	Решить уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=0$. В ответ записать корень или сумму корней, если их несколько.

Тема 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При изучении данной темы следует обратить особое внимание на понятие равносильности неравенств, решение неравенств, содержащих неизвестную величину под знаком модуля, решение иррациональных неравенств, решение неравенств с параметром.

Напомним теоремы о равносильности неравенств.

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства $f_1(x) > f_2(x)$, где $x \in X$, X – множество допустимых значений переменной, прибавить одно и то же выражение $\varphi(x)$, имеющее смысл при всех $x \in X$, то новое неравенство $f_1(x) + \varphi(x) > f_2(x) + \varphi(x)$ равносильно данному на множестве *X*.

Теорема 2. Если обе части неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ умножить на одно и то же положительное число или выражение $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in X$, то новое неравенство $f_1(x)\varphi(x) > f_2(x)\varphi(x)$ равносильно данному на множестве *X*.

Теорема 3. Если обе части неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число или выражение $\varphi(x) < 0$ для всех $x \in X$, то получим неравенство противоположного смысла $f_1(x)\varphi(x) < f_2(x)\varphi(x)$, равносильное данному на множестве *X*.

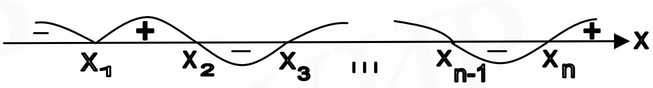
Метод интервалов

Метод интервалов основан на следующей теореме.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси и обращается в ноль в точках $x_1, x_2, ..., x_n$, тогда на любом интервале $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, +\infty)$ функция сохраняет знак.

Пусть надо решить неравенство $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0$, $x_1, x_2, ..., x_n \in R$.

Будем считать, что $x_1 < x_2 < ...x_n$. Отметим эти числа на числовой прямой и рассмотрим функцию $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Для всех $x > x_n$ все выражения в скобках положительны, значит, при $x > x_n$, $f(x) > 0$. При $x_{n-1} < x < x_n$ выражение в последней скобке отрицательно, а все остальные положительны, поэтому $f(x) < 0$. Аналогично получаем, что при $x_{n-2} < x < x_{n-1}$ $f(x) > 0$ и т.д.



Если x_i такое, что $(x - x_i)^{h_i}$, h_i - четное, то справа и слева от x_i, т.е. в смежных промежутках, функция $f(x)$ имеет одинаковые знаки, а если же x_i

такое, что $(x-x_i)^{h_i}$, h_i - нечетное, то справа и слева от x_i, т.е. в смежных промежутках, функция $f(x)$ имеет противоположные знаки.

Если дано неравенство вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены, то его можно привести к равносильному неравенству умножением обеих частей на $(Q_m(x))^2>0$, т.е. $\dfrac{P_n(x)\cdot Q_m{}^2(x)}{Q_m(x)}>0\cdot Q_m{}^2(x)\Leftrightarrow P_n(x)\cdot Q_m(x)>0$, которое решаем методом интервалов.

Итак, неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}P_n(x)\cdot Q_m(x)>0,\\ Q_m(x)\neq 0.\end{cases}$ Обратите внимание на решение простейших неравенств:

$$|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a,$$

$$|x|\ge a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -a,\\ x\ge a.\end{array}\right.$$

При решении иррациональных неравенств следует помнить, что основным методом решения является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

1. $$\sqrt[n]{f(x)}<\sqrt[n]{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ f(x)<g(x),\end{cases} & n=2k,\quad k\in Z,\\ f(x)<g(x), & n=2k+1,\quad k\in Z.\end{array}\right.$$

2. $$\sqrt[n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)>g^n(x),\end{cases} & \\ \begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\ge 0,\end{cases} & n=2k, k\in Z,\\ f(x)>g^n(x), & n=2k+1, k\in Z.\end{array}\right.$$

3. $$\sqrt[n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^n(x),\end{cases} & n=2k, k\in Z,\\ f(x)<g^n(x), & n=2k+1, k\in Z.\end{array}\right.$$

Пример 1. Решите неравенство $x<\sqrt{x+2}$. В ответ запишите сумму всех целых решений.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 < x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x + 2 \ge 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \ge -2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0 \\ -1 < x < 2, \end{cases} \\ -2 \le x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \le x < 2.$$

Сумма всех целых решений будет равна: -2 – 1 + 0 + 1 = -2.

Ответ: -2.

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{x+5} \le x + 3$. В ответ запишите наименьшее решение.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ x + 5 \ge 0 \\ x + 5 \le (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ge -5 \\ x^2 + 5x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ge -5 \\ (x+1)(x+4) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-3, +\infty), \\ (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty). \end{cases}$$

Пересечением полученных множеств является $[-1, +\infty)$.

Ответ: -1.

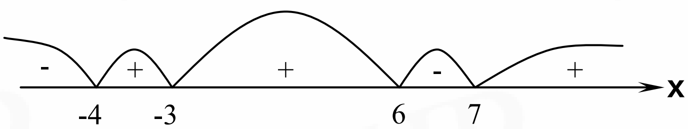
Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{(x-6)(x+3)^2}{(x+4)(x-7)} \le 0$.

В ответ запишите наибольшее целое положительное решение.

Решение. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-6)(x+3)^2(x+4)(x-7) \le 0, \\ x \ne -4, \quad x \ne 7. \end{cases}$$

Значения x = -4, x = -3, x = 6, x = 7 разбивают числовую ось на интервалы



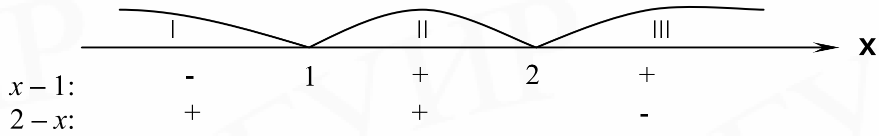
Полученное неравенство решаем методом интервалов.
Решением неравенства является $x \in (-\infty, -4) \cup (3) \cup [6, 7)$.

Ответ: 6.

Пример 4. Решите неравенство $|x-1|+|2-x|>3+x$. В ответ запишите наименьшее целое положительное решение.

Решение. Точки $x=1$ и $x=2$ делят числовую прямую на промежутки: $(-\infty;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Решим данное неравенство на каждом из этих промежутков:



1. $\begin{cases} x<1 \\ 1-x+2-x>3+x \end{cases} \Leftrightarrow x<0$

2. $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x-1+2-x>3+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x<-2 \end{cases} \Rightarrow 0$

3. $\begin{cases} x>2 \\ x-1+x-2>3+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>6 \end{cases} \Rightarrow x>6$.

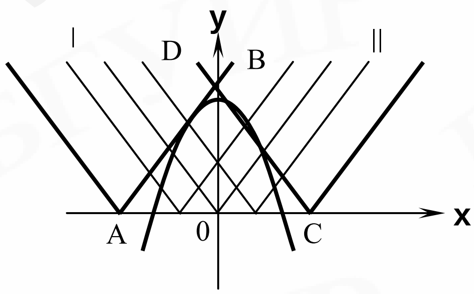
Объединяя полученные решения, имеем: $x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$.

Ответ: 7.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $7-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение. В ответ запишите сумму целых значений a.

Решение. Запишем неравенство в виде $|x-a|<7-x^2$ и рассмотрим геометрическую иллюстрацию решения.

Чтобы неравенство имело хотя бы одно отрицательное решение, графики $y=7-x^2$ и $y=|x-a|$ должны быть расположены так, как показано на рисунке.



При крайнем левом положении (I) прямая AB касается параболы. Ее угловой коэффициент $y'=-2x=1$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=6{,}75$ - точка касания. Уравнение касательной AB: $y=6{,}75+1\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, $y=7{,}25+x$ $(y=x-a)\Rightarrow a=-7{,}25$.

При крайнем правом положении (II) прямая СД проходит через точку $x=0,\quad y=7$. Ее уравнение $y=-(x-a)\Rightarrow\quad y=a\Rightarrow\quad a=7$.

Итак, для $a\in(-7{,}25;7)$ неравенство имеет хотя бы одно отрицательное решение. Сумма всех целых значений a равна –7.

Ответ: –7.

Контрольный тест № 4

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	Сумма целых решений неравенства $\dfrac{(x+2)(x+5)^2(x+4)^4}{(x^2-4)(4-x)^3}\ge 0$ равна …	1) 3; 2) 0; 3) – 9; 4) – 6; 5) – 3.
А2	Сумма наибольшего и наименьшего решений системы неравенств $\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)(x+3)}\le 1,\\ -2{,}5\le x\le 3{,}5\end{cases}$ равна ...	1) 0,5; 2) 5,5; 3) 10; 4) 2,5; 5) 1.
А3	Количество целых решений неравенства $(x^2+x-2)(x^2+x)<24$ равно…	1) 9; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 8.
А4	При каком значении параметра а решением неравенства $\dfrac{(x+3)(x-a)}{x-7}>0$ будет луч?	1) 7; 2) 5; 3) 10; 4) 0; 5) –3 .
А5	Найти значение параметра a, при котором наибольшее отрицательное решение неравенства $\dfrac{ax-12}{x}\le 7$ равно -4.	1) 4; 2) 7; 3) – 7; 4) – 10; 5) 6.
А6	Найти среднее арифметическое целых значений a, при которых решением неравенства $(x-a)^2(x-2)(x+3)\le 0$ будет отрезок.	1) $-\dfrac{3}{2}$; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) 2,5; 4) 0; 5) $\dfrac{3}{2}$.
А7	Сумма целых решений неравенства $0<\lvert 2-x\rvert\le\dfrac{5}{2}$ равна …	1) 10; 2) 7; 3) 8; 4) 5; 5) -10.
А8	Наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{2x-3}{\lvert 2x-3\rvert}\ge 1$ равно …	1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) -2; 5) -3.
А9	Сумма целых решений неравенства $\big\lvert\lvert 3x+1\rvert+x+1\big\rvert\le 2$ равна …	1) 1; 2) – 1; 3) 0; 4) – 4; 5) 4.

№	Задания	Варианты ответов
А10	Найти середину отрезка, который образуют решения неравенства $\|2x-1\| \le \|x+3\|$	1) $\frac{7}{3}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $-\frac{7}{3}$; 5) $\frac{10}{3}$.
А11	Решить неравенство $\sqrt{x-5} > x-12$. В ответ записать наибольшее целое решение.	1) 12; 2) 14; 3) 13; 4) 15; 5) 16.
А12	Среднее арифметическое целых решений неравенства $\sqrt{7-x} \cdot \sqrt[5]{x+4} \ge 0$ равно …	1) 6; 2) 1,5; 3) 3; 4) 9; 5) 2,5.
А13	Сумма решений неравенства $(x^2+3x-10)\cdot\sqrt[8]{2x^2+5x+2} \ge 0$, принадлежащих отрезку [–5; 2], равна …	1) – 2; 2) – 4; 3) – 3; 4) – 1; 5) 7.
А14	Число целых решений неравенства $\sqrt{2-x} - \frac{3}{\sqrt{2-x}} \le -2$ равно …	1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3; 5) 4.
А15	Найти количество целых решений неравенства $\frac{\sqrt[10]{8-2x-x^2}}{x+10} \le \frac{\sqrt[10]{8-2x-x^2}}{2x+9}$.	1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 7; 5) 6.

Часть Б

№	***Условие задания***
Б1	Найти количество целых решений неравенства $\frac{1}{x^2-11x+28} \le \frac{8x-37}{(x^2-8x+16)(x^2-9x+14)}$.
Б2	Решить неравенство $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} < \sqrt[3]{12(x-1)}$. В ответ записать наименьшее целое решение.
Б3	Найти целочисленные решения системы неравенств $\begin{cases} x+y<10, \\ x-y>4{,}5, \\ y-1>0. \end{cases}$ В ответ записать $(x+y)$.
Б4	Найти все значения a, при которых неравенство $\|2a-3x\| < x+1$ имеет хотя бы одно положительное решение. В ответ записать наименьшее целое a.
Б5	Найти количество таких a, при которых неравенства $\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-1} > 0$ и $\sqrt{(x-a)(x-1)} > 0$ равносильны.

Тема 5. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Задачи на составление уравнений и систем уравнений занимают значительное место в общем объеме заданий на вступительных испытаниях. Составить уравнение или систему уравнений, значит, записать условие текстовой задачи на формализованном математическом языке, что бывает часто не легче, чем решение самих уравнений. При составлении уравнений и систем важно «хорошо» ввести обозначения и правильно использовать физические, механические и другие определения и понятия.

Приведем решения некоторых типовых задач.

Задача 1. Два крана, включенные одновременно, могут заполнить бассейн за 2 ч. За сколько часов может заполнить бассейн каждый кран в отдельности, если после того, как первый кран проработал 2 ч, а второй 1 ч, бассейн был заполнен на 5/6 своего объема?

Решение. Пусть $x_ч$ и $y_ч$ - время заполнения бассейна соответственно первым и вторым кранами в отдельности. Примем объем бассейна равным 1 куб. единице. По условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x}=1-\dfrac{2}{y} \\ 1-\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=6. \end{cases}$$

Ответ: 3 ч., 6 ч.

Задача 2. Два велосипедиста выехали одновременно из двух мест, отстоящих друг от друга на 270 км, и едут навстречу друг другу. Второй проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час проезжает первый. Определить скорость каждого велосипедиста.

Решение. Пусть v_1 км/ч и v_2 км/ч - скорости соответственно 1-го и 2-го велосипедистов. Из условия имеем: $v_1 = v_2 + 1{,}5$. Второй велосипедист ехал до встречи v_1 ч и, следовательно, проехал расстояние $v_1 \cdot v_2$. Первый велосипедист до встречи ехал $\dfrac{270 - v_1 \cdot v_2}{v_1}$ ч. Имеем второе уравнение:

$$\frac{270 - v_1 \cdot v_2}{v_1} = v_1.$$

Итак, $\begin{cases} 270 - v_1 v_2 = v_1^{\,2} \\ v_2 + 1{,}5 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1^{\,2} - 1{,}5v_1 - 270 = 0 \\ v_2 = v_1 - 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 12, \\ v_2 = 10{,}5. \end{cases}$

Ответ: 12 км/ч, 10,5 км/ч.

Задача 3. По окружности равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 3 с быстрее первой. Время между последовательными встречами точек равно 18 с. Определить время в секундах полного обхода окружности первой точкой (более быстрой).

Решение. Известно, что если две точки движутся по окружности радиусом R с постоянными скоростями v_1 и v_2 в разных направлениях, то время между их встречами равно $\frac{2\pi R}{v_1 + v_2}$, а если они движутся в одном направлении, причем $v_1 > v_2$, то время между их встречами равно $\frac{2\pi R}{v_1 - v_2}$. Обозначим время обхода окружности первой точкой через x_c, второй через $(x+3)$ c. Скорость движения первой точки будет $\frac{2\pi R}{x}$, второй - $\frac{2\pi R}{x+3}$.

Составим уравнение

$$\frac{2\pi R}{\frac{2\pi R}{x} - \frac{2\pi R}{x+3}} = 18, \quad x^2 + 3x - 54 = 0, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = -9.$$

Ответ: 6 с.

Задача 4. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70 %-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90 %-ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился *ч* %-ный раствор серной кислоты. Найти все значения *ч*, при которых задача имеет решение.

Решение. Пусть x литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый. В x литрах раствора будет содержаться $\frac{9x}{10}$ чистой (100 %) серной кислоты. В первом сосуде первоначально было $\frac{7}{10} \cdot 4$ л чистой серной кислоты. После того как в первый сосуд долили x л 90 % - ного раствора серной кислоты, в нем стало $\left(\frac{7}{10} \cdot 4 + \frac{9}{10}x\right)$ л чистой серной кислоты.

Составим уравнение: $\dfrac{\dfrac{7}{10}\cdot 4+\dfrac{9}{10}x}{x+4}\cdot 100\,\% = ч\,\% \Rightarrow \dfrac{4(ч-70)}{90-ч}$. Исследуем, при каких $ч$ задача имеет решение. Из условия видно, что долить раствора можно не более 2 л (объем сосуда – 6 л, налито – 4л), т.е. $0 \le x \le 2$. Используя это неравенство, получим $0 \le \dfrac{4(ч-70)}{90-ч} \le 2$, $70 \le ч \le 76,(3)$.

Ответ: $\dfrac{4(ч-70)}{90-ч}$, $70 \le ч \le 76,(3)$.

<u>*Задача 5.*</u> В одной бочке содержится смесь воды и спирта в соотношении 2 : 3, а в другой – 3 : 7. Сколько ведер смеси надо взять из первой бочки, чтобы смешав ее с некоторым количеством смеси из второй бочки, получить 12 ведер смеси воды и спирта в отношении 3 : 5 ?

<u>*Решение*</u>

	Вода	Спирт
1 бочка	2	3
2 бочка	3	7
3 бочка (12 ведер)	3	5

Пусть x ведер смеси нужно взять из 1 бочки, тогда из 2 бочки – (12–x) ведер смеси. В x ведрах смеси, взятой из 1 бочки, будет содержаться $\dfrac{2}{5}x$ ведер чистой воды, в (12–x) ведрах смеси, взятых из 2 бочки – $\dfrac{3}{10}\cdot(12-x)$ ведер чистой воды. Составим уравнение: $\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{10}\cdot(12-x)=\dfrac{3}{8}\cdot 12$, $x=9$.

Ответ: 9 ведер.

Можно было составить уравнение, вычисляя количество спирта в каждой из бочек.

<u>*Задача 6.*</u> Первое число составляет 50 % от второго. Сколько процентов от первого числа составляет второе ?

<u>*Решение.*</u> Пусть x - второе число, тогда $0{,}5x$ – первое число. Составим пропорцию: $\begin{matrix} 0{,}5x & -100\,\% \\ x & -y\,\% \end{matrix}$ $\quad y=\dfrac{x\cdot 100\,\%}{0{,}5x}=200\,\%$.

Ответ: 200 %.

Контрольный тест № 5

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	Один из двух заводов может выполнить некоторый заказ на 4 дня быстрее, чем другой. За сколько дней может выполнить этот заказ завод с большей производительностью, если известно, что при совместной работе они выполняли за 24 дня заказ в 5 раз больший?	1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 6; 5) 10.
А2	Две группы студентов отремонтировали 31 компьютер. Первая группа работала 8 дней, а вторая – 5 дней. Сколько всего компьютеров отремонтировали студенты первой группы, если известно, что за 4 дня работы они отремонтировали на 2 компьютера больше, чем студенты второй группы за 2 дня?	1) 24; 2) 12; 3) 15; 4) 16; 5) 21.
А3	В бассейн проведена труба. Вследствие ее засорения приток воды через нее уменьшился на 20 %. На сколько процентов увеличилось время наполнения бассейна?	1) 15; 2) 25; 3) 10; 4) 20; 5) 24.
А4	Руда содержит 40 % примесей, а выплавляемый из нее металл содержит 4 % примесей. Сколько тонн металла получится из 24 тонн руды?	1) 13,86; 2) 14,4; 3) 15; 4) 13,8; 5) 15,4.
А5	После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена товара упала с 30 до 19,2 р. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз?	1) 18; 2) 10,5; 3) 12; 4) 22; 5) 20.
А6	Первое число на 25 % больше второго. На сколько процентов второе число меньше первого?	1) 25 ; 2) 18; 3) 20; 4) 16; 5) 24.
А7	Мощности двух насосов относятся как 2:3. При совместной работе двух насосов ванна наполняется за 10,8 мин. Через сколько минут наполнится ванна при включенном только первом насосе?	1) 27; 2) 25 ; 3) 24; 4) 28; 5) 30.
А8	Первую четверть пути поезд двигался со скоростью 80 км/ч, а оставшуюся часть – со скоростью 60 км/ч. Какова средняя скорость движения поезда на всем пути?	1) 126; 2) 120 ; 3) 128; 4) 130; 5) 132.

№	Задания	Варианты ответов
A9	На перегоне в 240 км поезд шел со скоростью на 10 км/ч меньше чем предполагалось, и поэтому прибыл на место с опозданием на 20 мин. С какой скоростью должен был двигаться поезд на этом перегоне?	1) 100; 2) 110; 3) 80; 4) 90; 5) 120.
A10	По окружности, длина которой 100 м, движутся равномерно две точки. Они встречаются через каждые 4 с, двигаясь в противоположном направлении, и через 20 с, двигаясь в одном направлении. Найдите большую из скоростей.	1) 12 ; 2) 10; 3) 8; 4) 16 ; 5) 15.
A11	Катер прошел 15 км по течению реки и 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Если скорость течения реки 4 км/ч, то скорость катера по озеру равна …	1) 14; 2) 18; 3) 16; 4) 20; 5) 22.
A12	Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, то новое число станет на единицу больше утроенного первоначального. Найти это число.	1) 143; 2) 133; 3) 123; 4) 113; 5) 103.
A13	В гараже работают 54 шофера. Сколько свободных дней может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25 % машин из имеющихся 60-ти остаются в гараже для профилактического ремонта?	1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 8; 5) 9.
A14	В первом сплаве меди и цинка количество этих металлов находится в отношении 1:2, а во втором – в отношении 2:3. Сколько граммов первого сплава надо взять, чтобы получить 19 г сплава с отношением меди и цинка 7:12 ?	1) 10; 2) 9; 3) 12; 4) 15; 5) 7.
A15	В двух бригадах более 27 человек. Число членов 1-й бригады более чем в 2 раза превышает число членов 2-й бригады, уменьшенное на 12. А число членов 2-й бригады превышает более чем в 9 раз число членов 1-й бригады, уменьшенное на 10. Сколько членов во второй бригаде?	1) 14; 2) 17; 3) 22; 4) 11; 5) 18.

Часть Б

№	Условие задания
Б1	Книга дважды уценивалась сначала на 30 %, а потом на 50 %. На сколько процентов подешевела книга по сравнению с первоначальной ценой?
Б2	В одном бидоне молока в 7 раз больше, чем в другом. Если из большего бидона перелить в меньший 15 л, то в каждом бидоне молока станет поровну. Сколько литров молока было первоначально в меньшем бидоне?
Б3	На заводе имеются станки токарные, фрезерные и шлифовальные, количество которых относится как $\frac{11}{12}:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$. Сколько всего станков на заводе, если фрезерных и шлифовальных станков вместе на 92 меньше, чем токарных?
Б4	Турист за три дня прошел 48 км. В первый день он прошел на 6 км меньше, чем во второй, а в третий день 0,7 пути, пройденного во второй день. Сколько километров прошел турист за второй день?
Б5	Найти два числа, если их среднее арифметическое на 28 меньше большего из этих чисел, а среднее геометрическое на 26 больше меньшего из них. В ответ записать большее число.

Тема 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ

В данной теме необходимо обратить внимание на следующие вопросы: 1) графики тригонометрических функций; 2) формулы приведения; 3) основные тригонометрические тождества и выражения одних тригонометрических функций через другие; 4) формулы решения простейших тригонометрических уравнений, к которым сводятся после ряда тождественных преобразований любые тригонометрические уравнения:

1. $\sin x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$, $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\cos x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$, $\arccos a \in [0; \pi]$.

3. $tgx = a, \quad a \in R, \quad x = arctga + \pi n, \quad n \in Z$, $arctga \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. $c\,tgx = a, \quad a \in R, \quad x = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$, $arcctga \in (0; \pi)$.

Полезно знать частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений:

$\sin x = 0 \quad x = \pi n, \quad n \in Z$;

$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$;

$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$;

$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$;

$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$;

$\cos x = 1 \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z$.

Решение простейших тригонометрических неравенств:

а) $\sin x \ge 0$ - сначала находим решение при изменении угла в пределах периода функции, т.е. на промежутке $[0;2\pi]$: $\sin x \ge 0$ в 1-й и 2-й четвертях, т.е. $0 \le x \le \pi$, затем учитываем периодичность функции. Итак, $\sin x \ge 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n$, или $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], \quad n \in Z$;

б) $\sin x < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Можно ответ записать и так: $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n, \quad n \in Z$;

в) $\cos x \ge 0 \Rightarrow$ 1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, 2) $2\pi n - \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$;

г) $\cos x < 0 \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$;

д) $tgx \geq 0, \Rightarrow \quad 1)\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \qquad 2)\ \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$;

е) $tgx < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi n - \frac{\pi}{2} < x < \pi n, \quad n \in Z$.

Примечание. Для иллюстрации решений вместо тригонометрических кругов можно брать графики соответствующих функций.

Пример 1. Вычислите без таблиц $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}$.

Решение

$\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} =$ (умножим и разделим выражение на $2\sin\frac{2\pi}{7}$) $=$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}}{2 \cdot 2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)}{4\sin\frac{2\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)}{4 \cdot 2\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

***Ответ*:** 0,125.

<u>Пример 2.</u> Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что $2tg^2\alpha - 7tg\alpha + 3 = 0$ и угол α удовлетворяет неравенству $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

<u>Решение.</u> Решим уравнение $2tg^2\alpha - 7tg\alpha + 3 = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3, \\ tg\alpha = 0{,}5. \end{array}\right.$

Так как $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $1 < tg\alpha < \infty$, т.е. $tg\alpha = 3$. Воспользуемся формулой: $\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$. Получим: $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{1+9} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

Пример 3. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$. (1)

Найти: 1. $\sin\alpha + \cos\alpha$. 2. $\sin\alpha - \cos\alpha$. 3. $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

4. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$. 5. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

Решение. 1. Возведем в квадрат равенство (1):

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = b^2 \Rightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = b^2 \Rightarrow \sin 2\alpha = b^2 - 1.$$

2. Рассмотрим выражение $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$:

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - (b^2 - 1) = 2 - b^2,$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \pm\sqrt{2 - b^2}.$$

3. Возведем в куб равенство (1):

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^3 = b^3 \Rightarrow \sin^3\alpha + \cos^3\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) =$$

$$= b^3 \Rightarrow \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \frac{b}{2}(3 - b^2).$$

4. $$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2}(b^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(1 - 2b^2 - b^4).$$

5. $$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \pm b\sqrt{2 - b^2}.$$

В тригонометрических задачах нередко встречаются выражения вида $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha$. Нужно уметь их преобразовывать:

1. $$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

2. $$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 =$$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cdot(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2.$$

3. $$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha =$$

$$= \cos^2 2\alpha + \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha.$$

Существуют различные методы решения тригонометрических уравнений: метод оценки, метод подставки, разложение на множители и др., нередко эти методы комбинируют. Получив уравнение, подумайте, имеет ли оно смысл . Если да, то при каких условиях?

Пример 4. Решите уравнение: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения и применим метод оценки:

$(-2\sin 3x\cdot\sin x)^2=4+\cos^2 3x,$

$4\sin^2 3x\sin^2 x=4+\cos^2 3x.$

Нетрудно заметить, что левая часть ≤ 4, а правая ≥ 4, т.к. $0\le\cos^2 3x\le 1$. Значит, равенство возможно, если:

$$\begin{cases}\sin^2 3x\sin^2 x=1\\ \cos^2 3x=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\sin^2 3x=1\\ \sin^2 x=1\\ \cos 3x=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}|\sin 3x|=1\\ |\sin x|=1\\ \cos 3x=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m\\ 3x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}, & k\in Z\\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+\pi m, & m\in Z\\ x_3=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}, & n\in Z\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\quad m\in Z$$

$x_1=x_3$ при $k=n$

$\left(x_1=x_2\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}=\dfrac{\pi}{2}+\pi m\Rightarrow 1+2k=3=6m\Rightarrow k=3m+1\Rightarrow\right.$

$\left.\Rightarrow x_2\subset x_1=x_3\right).$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\quad m\in Z$.

<u>Пример 5</u>. Решите уравнение $\cos 2x=3\sin 63^\circ\cos 58^\circ$.

<u>Решение.</u> Применим метод оценки.

Очевидно, что $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sin 63^\circ$, $\dfrac{1}{2}\le\cos 58^\circ$, перемножим неравенства: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\le\sin 63^\circ\cdot\cos 58^\circ\le 1\Rightarrow\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\le 3\sin 63^\circ\cos 58^\circ\le 3$, т.к. $-1\le\cos 2x\le 1$, то равенство левой и правой частей уравнения невозможно $\Rightarrow\ x\in 0$.

***Ответ*:** нет.

При решении уравнений вида $a\sin x+b\cos x=c$, где a, b, c – постоянные (1), удобно преобразовать левую часть, вводя вспомогательный угол, следующим образом:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=$$

т.к. $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1,\quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1,\quad \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$ то числа $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *и* $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ можно рассматривать как синус и косинус одного и того же угла φ, т.е. $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, угол φ можно найти, решая уравнение $tg\varphi=a/b$ и выбирая какое-нибудь одно значение, например, $\varphi=arctga/b$.

$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cdot\sin\varphi+\cos x\cdot\cos\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$.

Уравнение (1) принимает вид $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)=c$,

$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, то $x-\varphi=\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi n$.

$$x=\varphi\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi n,\quad n\in Z,\quad \varphi=arctg\frac{a}{b}.$$

Таким образом, $x=arctg\frac{a}{b}\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi n,\quad n\in Z$.

<u>Пример 6</u>. Найдите в градусах наименьшее положительное решение уравнения $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$.

<u>Решение.</u> Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sqrt{3+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}.$$

Обозначим $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\varphi$, $\frac{1}{2}=\cos\varphi$, тогда $tg\varphi=\sqrt{3}$, $\varphi=60^{\circ}$.

Уравнение примет вид $\cos(x+60^{\circ})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$x+60^{\circ}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+360^{\circ}k,\quad k\in Z.$$

$$x=-60^{\circ}\pm 135^{\circ}+360^{\circ}k,\quad k\in Z.$$

Найдем наименьшее положительное решение уравнения. Будем давать значения k :

$k=0 \quad x_1 = -60^\circ + 135^\circ = 75^\circ,$

$\qquad\quad x_2 = -60^\circ - 135^\circ = -195^\circ,$

$k=1 \quad x_3 = 435^\circ, \qquad\qquad k=-1 \quad x_5 = -285^\circ,$

$\qquad\quad x_4 = 165^\circ, \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 = -555^\circ.$

Очевидно, что наименьший корень уравнения равен 75°.

Ответ: 75°.

Уравнение вида $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin 2x = c$ можно решить подстановкой: $\sin x \pm \cos x = Z$.

$(\sin x \pm \cos x)^2 = Z^2, \qquad 1 \pm \sin 2x = Z^2, \qquad \pm\sin 2x = Z^2 - 1.$

Уравнение вида $a\cos 2x + b\sin^2 x + c\cos^2 x = 0$ удобно решать с помощью формул понижения степени: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. Вводится подстановка $\cos 2x = Z$.

Уравнение вида $R(\sin x, \cos x) = 0$ можно решать с помощью универсальной подстановки $tg(x/2) = Z$, $\quad \sin x = 2Z/(1+Z^2)$, $\quad \cos x = (1-z^2)/(1+z^2)$ и уравнение принимает вид $\quad R\left(\dfrac{2z}{1+z^2}; \quad \dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right) = 0$, но при введении этой подстановки область определения уравнения сужается:

$\cos\dfrac{x}{2} \neq 0, \quad \dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in z$, и возможна потеря корней вида $x = \pi + 2\pi n$. Нужна проверка.

Обратите внимание и на однородные уравнения n-го порядка:

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + \ldots + a_n \cos^n x = 0.$

Путем деления всех членов уравнения на $\cos^n x \neq 0$ (или $\sin^n x \neq 0$) приходим к алгебраическому уравнению относительно tgx:

$a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1} x + \ldots + a_n = 0, \qquad tgx = z.$

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$

Нежелательно в уравнении одну тригонометрическую функцию выражать через другую, вводя действие извлечения квадратного корня (например, $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$), т.к. это может привести либо к потере корней, либо к появлению посторонних. Нужна проверка.

<u>Пример 7.</u> Решите уравнение: $\sqrt{8}(\sin x - \cos x) = tgx - ctgx$.

Решение. О.О.У. $\left[\begin{array}{l}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x \neq k\pi, & k \in z,\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, & n \in z.\end{array}\right.$

$$\sqrt{8}(\sin x - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left(\sqrt{8} - \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x - \cos x = 0\\ (\textit{однородное уравнение 1 степени}) \Leftrightarrow\\ \dfrac{\sqrt{8}\sin x \cos x - (\sin x + \cos x)}{\sin x \cdot \cos x} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} tgx = 1\\ 2\sqrt{2}\sin x \cos x - (\sin x + \cos x) = 0, \textit{введем подстановку}\\ \sin x + \cos x = z, \quad \sin 2x = z^2 - 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} tgx = 1\\ \sqrt{2}(z^2 - 1) - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ z_1 = \sqrt{2}, \quad z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\\ \sin x + \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, & k \in z\\ x_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, & n \in z\\ x_3 = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, & n \in z. \end{array}\right.$$

Так как множество решений x_2 содержится в множестве x_1, то имеем ответ:

$$\left[\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, & k \in z\\ x_2 = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, & m \in z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, & k \in z\\ x_2 = \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi m, & m \in z\\ x_3 = -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi m. & \end{array}\right.$$

Пример 8. Решите уравнение $|2\sin(x/5) + \cos(x/5)| = 2$, приводя к однородному.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения, т.к. $|a|^2 = a^2$, то

$$\left(2\sin\frac{x}{5} + \cos\frac{x}{5}\right)^2 = 4, \qquad 4\sin^2\frac{x}{5} + 4\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5} + \cos^2\frac{x}{5} = 4\left(\sin^2\frac{x}{5} + \cos^2\frac{x}{5}\right).$$

Приводя подобные члены, получим

$$4\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}-3\cos^2\frac{x}{5}=0,\ \text{поделим на}\ \cos^2\frac{x}{5}\neq 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} 4tg\frac{x}{5}-3=0,\ tg\frac{x}{5}=\frac{3}{4}, \\ \cos\frac{x}{5}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{x}{5}=arctg\frac{3}{4}+\pi n, & n\in z, \\ \frac{x}{5}=\frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{5arctg\frac{3}{4}+5\pi n\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{2}+5\pi n\right\}.$

Пример 9. Найдите в градусах наибольшее решение уравнения $\cos(2\pi-6x)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right),\quad x\in(0^{\circ};180^{\circ})$.

Решение. Используя формулы приведения, получим:

$$\cos 6x=-2\cos 2x \Leftrightarrow \cos 6x+\cos 2x=-\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x=-\cos 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ 2\cos 4x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \\ \cos 4x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} \\ 4x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} \\ 4x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, & k\in z, \\ x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, & n\in z. \end{array}\right.$$

Выделим решения, принадлежащие $(0^{\circ};180^{\circ})$

при $\left[\begin{array}{ll} k=0 & x_1=45^{\circ} \\ k=1 & x_1=135^{\circ} \\ k=2 & x_1=225^{\circ} \end{array}\right.$ при $\left[\begin{array}{ll} n=0 & x_2=30^{\circ} \\ n=1 & x_2=120^{\circ}\ \textit{или}\ \ 60^{\circ} \\ n=2 & x_2=150^{\circ}\ \textit{или}\ \ 210^{\circ} \\ n=3 & x_2=300^{\circ}\ \textit{или}\ \ 240^{\circ} \end{array}\right.$

Наибольшим решением, принадлежащим этому промежутку, будет $x=150^{\circ}$.

Ответ: 150°.

Пример 10. При каких a уравнение $actgx-1=\cos 2x$ имеет 4 решения, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$?

Решение. Воспользуемся формулой $\cos 2x=\dfrac{ctg^2x-1}{ctg^2x+1}$, получим:

$$actgx-\frac{ctg^2x-1}{ctg^2x+1}-1=0 \qquad \text{О.О.У. } \sin x\neq 0\Rightarrow \quad x\neq\pi k, \quad k\in z.$$

$$actg^3x+actgx-ctg^2x+1-ctg^2x-1=0$$

$$ctgx(actg^2x-2ctgx+a)=0$$

$$\left[\begin{array}{c} ctgx=0 \\ actg^2x-2ctgx+a=0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in z, \\ ctgx_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}, a\neq 0, \quad |a|\leq 1. \end{array}\right.$$

Выделим решения $\in[0;2\pi]$ из множества x_1:

$k=0 \quad x_1=\dfrac{\pi}{2}, \qquad k=1 \quad \dfrac{3\pi}{2}$, их два.

Запишем второе множество решений:

$$x_2=arcctg\frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}+\pi n, \quad n\in z, \quad a\neq 0, \quad |a|\leq 1.$$

Проанализируем это множество решений.

1. Если $|a|=1$, то $x_2=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n$.

Если $a=1$, то $x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in z$.

Решения $\in[0;2\pi]$ получаются при $n=0 \quad x_2=\dfrac{\pi}{4}$, $n=1 \quad x_2=\dfrac{5\pi}{4}$, их два.

Если $a=-1$, то $x_2=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in z$.

Решения $\in[0;2\pi]$ получаются при $n=1 \quad x_2=\dfrac{3\pi}{4}$, $n=2 \quad x_2=\dfrac{7\pi}{4}$, их тоже два.

2. Если $|a|<1$, то $x_2=arcctg\dfrac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}+\pi n, \quad n\in z, \quad a\neq 0$ и решений, $\in[0;2\pi]$, имеем уже 4, они получаются при $n=0$ и $n=1$.

3. При $a=0$ исходное уравнение принимает вид $\cos 2x=-1$ (или $ctgx=0$), которое на промежутке $[0;2\pi]$ имеет 2 решения.

4. При $|a|>1$ исходное уравнение имеет два решения, $\in[0;2\pi]$, это следует из уравнения $ctgx=0$.

Итак, исходное уравнение на отрезке $[0;2\pi]$ имеет 6 решений при $|a|<1$, 2 решения при $|a|>1$ и $a=0$ и 4 решения при $|a|=1$.

Ответ: $\{-1;1\}$.

Контрольный тест № 6

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	Выражение $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$ равно …	1) $\frac{7}{3}2ctg4\alpha$; 2) $4\cos 4\alpha$; 3) 1; 4) 2; 5) $\frac{10}{3}4ctg4\alpha$.
А2	Выражение $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)$ равно ...	1) $-\cos 2x$; 2) -1; 3) $-3\sin^2 2x-1$; 4) 1; 5) $\cos x$.
А3	Вычислить $\cos^3\frac{11\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}-\sin^3\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.	1) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$; 5) $-\frac{10}{23}$.
А4	Вычислить $\sin 42^\circ-\sin 78^\circ+\sin 66^\circ-\sin 6^\circ$.	1) 2; 2) 1; 3) 0,5; 4) 1,5; 5) –1 .
А5	Если $ctg\alpha=\frac{1}{2}$, то выражение $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+2\cos^3\alpha}$ равно ….	1) – 1; 2) 1; 3) 0,5; 4) – 0,5; 5) 1,5.
А6	Если $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}$, то выражение $13\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)$ равно …	1) 7 ; 2) -7 3) 17; 4) – 17; 5) 10.

№	Задания	Варианты ответов
А7	Выражение $1-\sin\alpha - a\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ не зависит от a, если a равно …	1) 1; 2) -1; 3) 2; 4) -2; 5) 0,5.
А8	Найти $ctgx$, если $3ctgx + 4\sin x - \cos x = 12$.	1) 4; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) 3; 4) -3; 5) -4.
А9	Наименьшее значение выражения $4\sin^2 x + 10\sin x + tg^2 y - 3tgy + 0{,}25$ равно…	1) -1; 2) $-\dfrac{33}{4}$; 3) -8; 4) $-\dfrac{1}{4}$; 5) $-\dfrac{9}{4}$.
А10	Вычислить $arctg(ctg0{,}4)$, если $\pi = 3{,}14$.	1) 0,4; 2) $-0{,}4$; 3) $-0{,}6$; 4) $-0{,}64$; 5) 0,64.
А11	Число решений уравнения $\dfrac{\sin(x-45^\circ)}{\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 0$, принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$, равно…	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0; 5) 4.
А12	Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sin 5x = \cos 4x$, принадлежащих отрезку $[0;\pi]$.	1) 105°; 2) 125°; 3) 90°; 4) 180°; 5) 75°.
А13	Сколько решений уравнения $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$ принадлежит отрезку $[0;2\pi]$?	1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) 2; 5) 4.
А14	Сумма корней уравнения $\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1$, принадлежащих отрезку $[-180^\circ, 180^\circ]$ равна …	1) 60°; 2) -60°; 3) 150°; 4) 90^0; 5) 180°.
А15	Найти посторонний корень уравнения $(x-2)^2\lvert\cos x\rvert = \cos x$.	1) 1; 2) 2; 3) $\dfrac{\pi}{2}$; 4) $\dfrac{3\pi}{2}$; 5) 3.

Часть Б

№	***Условие задания***
Б1	Число целых решений уравнения $tg(\sin(\cos x)) = 0$, принадлежащих отрезку $[0^\circ, 360^\circ]$, равно …

№	Условие задания
Б2	Сумма решений уравнения $\sqrt{3tg^2x+\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x$, принадлежащих отрезку $[0^\circ, 360^\circ]$, равна …
Б3	Решить уравнение $\cos(2\arccos x)=-4-7x$. В ответ записать сумму корней или корень, если он единственный.
Б4	Уравнение $5a\cdot\sin 2x = tgx+ctgx$ имеет хотя бы один корень при *a,* равном …
Б5	Наименьшее натуральное решение неравенства $\left\|\sin(-x)\right\|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ равно …

Тема 7. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на то, что арифметическая и геометрическая прогрессии являются примерами числовых последовательностей. При решении задач на прогрессии используют их определения и основные формулы.

Для арифметической прогрессии:

формула общего члена $a_n = a_1 + d(n-1)$,

формула суммы n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии $a_n + a_m = a_k + a_e$, если $m + n = k + e$, в частности, при $k = n + i, \quad e = n - i, \quad i = \overline{1, n}$, имеем $a_n = \dfrac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2}$.

Для геометрической прогрессии:

формула общего члена $b_n = b_1 q^{n-1}$,

формула суммы n первых членов прогрессии $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии с положительными членами $b_n{}^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, где $1 \le k < n, \quad n \ge 2$. В частности $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1, \quad S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Задача 1. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 10. Каждый из остальных членов в $\dfrac{10}{3}$ раза меньше суммы двух соседних с ним. Найдите сумму членов этой прогрессии.

Решение. Запишем прогрессию: 10, $10q$, $10q^2$, ... По условию $10q \cdot \dfrac{10}{3} = 10 + 10q^2$, $3q^2 + 10q + 3 = 0$, $q_1 = \dfrac{1}{3}$, $q_2 = 3$. Значение $q_2 = 3$ не удовлетворяет условию задачи, т.к. $|q| < 1$. Тогда сумма членов прогрессии $S = \dfrac{10}{1 - \dfrac{1}{3}} = 15$.

Ответ: 15.

Задача 2. Найдите трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть $\overline{xyz}$ - искомое число. Тогда $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Учитывая данные условия задачи и свойства арифметической и геометрической прогрессий, запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 100x + 10y + z - 792 = 100z + 10y + x \\ y^2 = xz \\ y = \dfrac{x - 4 + z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 6, \\ z = y - 2, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

$y^2 = (y+6)(y-2), \quad x = 9, \quad y = 3, \quad z = 1.$

Итак, искомое число 931.

Ответ: 931.

Задача 3. Три числа, сумма которых 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии, или как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

Решение. Пусть $x, \quad y, \quad z$ - первое, второе и третье числа. По условию $x + y + z = 114$. Так как эти числа образуют геометрическую прогрессию, то имеет место равенство $y^2 = xz$. С другой стороны, т.к. эти числа являются первым четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии, то $y = x + 3d, \quad z = x + 24d$.

Запишем систему:

$$\begin{cases} x + x + 3d + x + 24d = 114 \\ (x+3d)^2 = x(x+24d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 27d = 114 \\ d^2 = 2xd \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 38, \\ d_1 = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_2 = 2, \\ d_2 = 4. \end{cases}$$ Учитывая найденные x и d, найдем y и z, т.е. $y_1 = 38, \quad y_2 = 14, \quad z_1 = 38, \quad z_2 = 98$.

Ответ: 38, 38, 38; 2, 14, 98.

Задача 4. Найдите сумму все четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Нетрудно заметить, что наименьшее четное трехзначное число, делящееся на 3, есть 102, следующее 108, затем 114 и так далее до 996.

Эти числа образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 102$, $d = 6$, $a_n = 996$. Найдем количество таких чисел: $996 = 102 + 6(n-1)$, $n = 150$. Тогда $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82350$.

Ответ: 82350.

Контрольный тест № 7

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	Найти сумму чисел $15 + 6 + \frac{12}{5} + \frac{24}{25} + \frac{48}{125} + \ldots$	1) 75; 2) $\frac{3}{125}$; 3) $\frac{47}{125}$; 4) 25; 5) 100.
А2	Найти x из уравнения $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 117$.	1) 19; 2) 17; 3) 24 4) 25; 5) 26.
А3	Найти пятый член возрастающей арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 15$.	1) -7; 2) $1 - 4\sqrt{14}$; 3) $1 + 4\sqrt{14}$; 4) 9; 5) 10.
А4	Найти 1% от суммы всех четных трехзначных положительных чисел .	1) 2475; 2) 2470,5; 3) 2470; 4) 2472,5; 5) 2474,5 .
А5	В арифметической прогрессии $a_1 = 10$, $a_n = 40$, $S_n = 275$. Найти разность прогрессии.	1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) –1.
А6	Сколько нужно взять членов в арифметической прогрессии 81, 78, 75, … , чтобы сумма их равнялась нулю?	1) 42; 2) 35 3) 55; 4) 40; 5) 50.
А7	Шестой член арифметической прогрессии составляет 60 % от третьего, а их сумма равна 48. Тогда разность прогрессии равна…	1) 4; 2) 6; 3) -4; 4) -6; 5) 10.
А8	В арифметической прогрессии четвертый член равен 9. При каком значении разности этой прогрессии величина $a_1 a_3 + a_2 a_3$ будет наименьшей?	1) 5,7; 2) 6; 3) 6,5; 4) 6,1; 5) 6,3.
А9	Если в геометрической прогрессии $b_3 = 2$, то произведение $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$ равно…	1) 32; 2) 26; 3) 28; 4) 16; 5) -18.
А10	Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Сумма средних ее членов равна 60, а сумма крайних равна 140. Найти большее из этих чисел.	1) 132; 2) 137; 3) 130; 4) 134; 5) 135.

№	Задания	Варианты ответов
А11	Известно, что числа 9, $x-4$, $\cos(\arccos x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найти x.	1) 16; 2) 1; 3) 3; 4) 13; 5) 0.
А12	Если каждый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше суммы всех следующих за ним членов, то ее знаменатель равен …	1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{5}$.
А13	Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти знаменатель прогрессии.	1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{1}{5}$; 5) $-\frac{1}{2}$.
А14	Произведение первого и пятнадцатого членов геометрической прогрессии равно 289. Найти восьмой член прогрессии.	1) 19; 2) 21; 3) 17; 4) 15; 5) 18.
А15	Определить первый член геометрической прогрессии, если знаменатель $q=2$, а сумма первых восьми членов прогрессии равна 765.	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5 ; 5) 6.

Часть Б

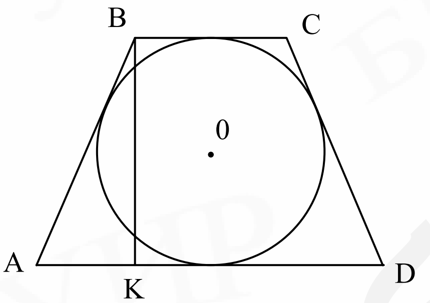
№	***Условие задания***
Б1	Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна наименьшему значению квадратного трехчлена $2x^2-4x+10$. Найти сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.
Б2	Найти сумму всех целых положительных трехзначных чисел, которые при делении на 57 дают в остатке 19.
Б3	Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найдите члены этой прогрессии. Укажите наибольшее число.
Б4	В арифметической прогрессии известно, что $a_n = 4n-25$. Определить, при каком количестве членов прогрессии (начиная с первого) их сумма будет наименьшей.
Б5	Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

Тема 8. ГЕОМЕТРИЯ

Прежде чем приступить к выполнению данной контрольной работы, необходимо четко усвоить соответствующие разделы теоретического курса, знать основные определения, теоремы, свойства, соотношения фигур на плоскости и в пространстве, уметь изобразить геометрические фигуры на чертеже, строить сечения. Особое внимание следует обратить на формулы тригонометрии и их применение при решении задач. Объем такого материала достаточно обширный и, естественно, охватить все разнообразие задач в одной контрольной работе практически невозможно. Для самостоятельного дополнительного решения задач можно воспользоваться одним из пособий. Решения некоторых задач приводятся без объяснений, т.к. записанные формулы и последовательность действий достаточно полно освещают ход решения.

Задача 1. Около окружности описана равнобочная трапеция, периметр которой равен 8, а острый угол равен 30°. Найдите площадь трапеции.

Решение



Известно, что «если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны». Следовательно, имеем $2AB = BC + AD$. С другой стороны, по условию имеем

$2AB + BC + AD = 8$,

$4AB = 8, \quad AB = 2$.

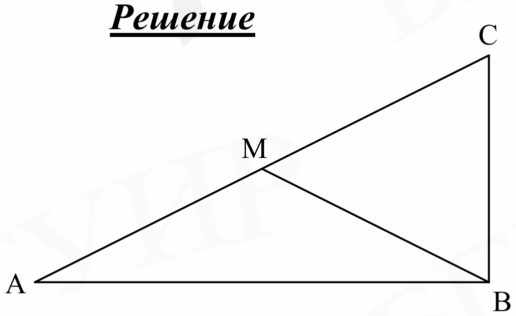
Используем второе условие: $\dfrac{BK}{AB} = \sin 30^\circ$, $\quad KB = AB \cdot \sin 30^\circ = 1$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BK \cdot AB = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 2. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $\quad \angle B = 90^\circ$, BM – медиана. Найдите угол BMC (в градусах).

Решение



Сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Следовательно, $\angle C = 60^\circ$. Так как BM – медиана, то AM = MC. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против угла 30°, составляет половину гипотенузы, так что CB = MC. Значит, ABC – равнобедренный, поэтому $\angle CBM = \angle CMB = \alpha$.

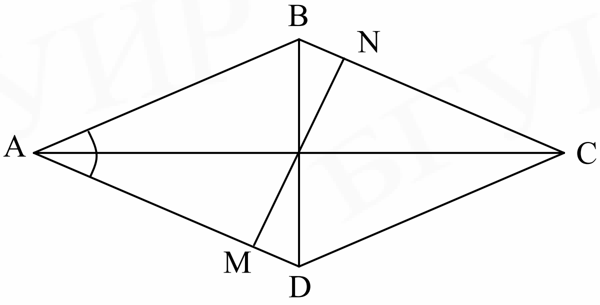
$2\alpha + 60^\circ = 180^\circ, \quad \alpha = 60^\circ$.

Ответ: $\alpha = 60^\circ$.

Задача 3. Острый угол ромба равен α, длина меньшей диагонали равна d. Найдите длину стороны ромба и радиус вписанной в него окружности.

Решение. $BD = a, \quad AC = \frac{1}{2} d_1 = \frac{1}{2} dctg\frac{\alpha}{2},$

$$d_1 = AC = dctg\frac{\alpha}{2}, \qquad AB = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$



Найдем площадь ромба:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d = \frac{1}{2} d^2 ctg^2 \frac{\alpha}{2}.$$

С другой стороны ,

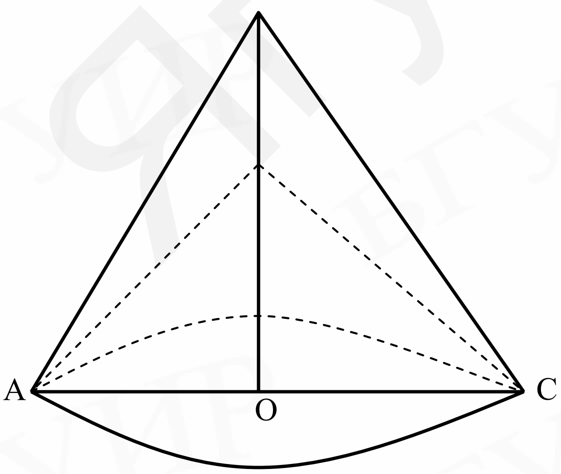
$$S = AD \cdot NM = 2Ra \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{S}{2a} = \frac{1}{2} d\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{d\cos\frac{\alpha}{2}}{2} \right\}.$

Задача 4. Два конуса имеют общее основание и один из них помещен внутри другого. Образующая внешнего конуса наклонена к плоскости основания под углом α, внутреннего – под углом β. Объем тела, ограниченного боковыми поверхностями конусов, равен V. Определите радиус основания конусов.

Решение. Осевое сечение конусов приведено на рисунке. Имеем:



$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_1, \qquad (H_1 = OS_1)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_2, \qquad (H_2 = OS_2),$$

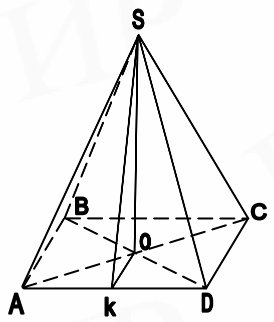
$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 (H_1 - H_2), \qquad H_1 = Rtg\alpha,$$

$$H_2 = Rtg\beta, \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 (tg\alpha - tg\beta).$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(tg\alpha - tg\beta)}}.$

Задача 5. Найдите объем правильной пирамиды, высота которой $3\sqrt[3]{4}$ и все грани - равносторонние треугольники.

Решение. $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$. Пирамида правильная. Значит, ABCD квадрат и $S_{осн} = AD$. Так как все грани – правильные треугольники, то $\angle SAD = 60^{\circ}$, SK – и медиана, и высота, поэтому



$$\frac{SK}{AK} = tg60^{\circ} = \sqrt{3}, \quad SK = AK\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} AD.$$

С другой стороны,

$$SK^2 = OK^2 + SO^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} AD\right)^2 + SO^2 = \frac{AD^2}{4} + 9\sqrt[3]{16},$$

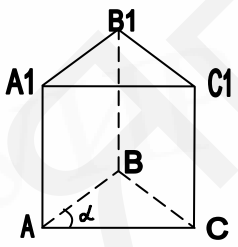
$$AD^2 = 18\sqrt[3]{16},$$

$$V = \frac{1}{3} 18\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = 72.$$

Ответ: 72.

Задача 6. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a. Угол при основании равен α. Найдите объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

Решение. По условию $AB = BC,\ AC = a,\ S_{\delta} = 2S_{осн}$. Обозначим $A_1A = H$:



$$S_{осн} = \frac{a^2}{4} tg\alpha, \quad S_{\delta} = Ha + 2H\frac{a}{2\cos\alpha} = Ha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right),$$

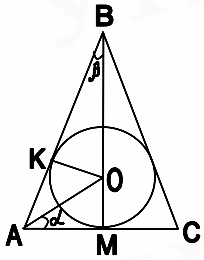
$$S_{\delta} = 2S_{осн} = \frac{a^2}{2} tg\alpha = Ha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

$$H = \frac{a\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)}, \quad V = \frac{a^2}{4} tg\alpha \cdot \frac{a\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{a^3 \sin^2 \alpha/2}{4\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{4} \frac{\sin^2 \alpha/2}{\cos\alpha}$.

Задача 7. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

Решение. ΔABC – осевое сечение конуса, r – радиус шара, $\angle ABC = 2\beta$,



R – радиус основания конуса. Согласно условию задачи имеем: $\pi R^2 = 4\pi r^2$, $R = 2r$, $BM = H = Rctg\beta = 2rctg\beta$.

С другой стороны, $H = BM = OB + OM = r + \dfrac{r}{\sin\beta} = 2r \cdot ctg\beta$,

Обозначая $\cos\beta = x$, получим уравнение $\sin\beta + 1 = 2\cos\beta$,

$\sqrt{1-x^2} = 2x - 1$, $\quad x_1 = 0$, $\quad x_2 = \dfrac{4}{5}$.

Так как $1 + \cos 2\beta = 2\cos^2\beta$, то $\cos 2\beta = 2 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{25}$.

***Ответ*:** 0,28.

Контрольный тест № 8

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она, пересекая две большие стороны треугольника, разделила его на треугольник и четырехугольник. Найти периметр полученного треугольника.	1) 28 ; 2) 8; 3) 16; 4) 14; 5) 22 .
А2	Стороны параллелограмма равны 5 и 3, а синус угла между диагоналями равен $\frac{3}{5}$. Найти площадь параллелограмма.	1) 8 ; 2) 10; 3) 6; 4) 7,5; 5) 8,5.
А3	Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\frac{7}{13}$. Найти длину высоты трапеции.	1) 6 ; 2) 4; 3) 5; 4) 4,5; 5) 8.
А4	Дан прямоугольник. Перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на две части в отношении 3:1. Найти угол (в градусах) между этим перпендикуляром и другой диагональю.	1) 60°; 2) 75°; 3) 35°; 4) 45°; 5) 30°.
А5	Через вершины произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найти отношение площади параллелограмма, образованного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{1}$; 5) 2.

№	Задания	Варианты ответов
A6	Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана боковой стороны равна 5. Найти боковую сторону.	1) 6 ; 2) 4; 3) 5,5; 4) 8; 5) 4,5.
A7	Осевое сечение цилиндра есть квадрат. Боковая поверхность цилиндра равна 180. Найти полную поверхность цилиндра.	1) 280; 2) 320 ; 3) 275; 4) 290; 5) 270.
A8	Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4, площади боковых граней равны 9, 10 и 17. Определить объем призмы.	1) 12; 2) 22 ; 3) 16; 4) 18; 5) 21.
A9	Основание пирамиды – треугольник со сторонами 20, 21, 29. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти высоту пирамиды.	1) 6,5; 2) 8,3; 3) 7; 4) 6; 5) 10.
A10	Шар радиусом $R=\sqrt[3]{2}$ равновелик прямому конусу, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Найти высоту конуса.	1) 2 ; 2) 6; 3) 3,5; 4) 8; 5) 4.
A11	Объем конуса равен 81. Высота разделена на 3 равные части и через точки деления проведены плоскости параллельные основанию. Найти объем средней части.	1) 19; 2) 21,5; 3) 21; 4) 22; 5) 23.
A12	На ребре двугранного угла в 120° взят отрезок $AB = 3$, из его концов в различных гранях к нему восстановлены перпендикуляры $AC = 1$, $BД = 2$. Вычислить расстояние между точками C и $Д$.	1) 4,5; 2) 5; 3) 4; 4) 6; 5) 8.
A13	Найти координаты (x, y) центра окружности, описанной около треугольника, образованного координатными осями и касательной к гиперболе $xy=12$ в точке касания $M(1;12)$. В Ответ записать $(x+y)$ - сумму координат центра окружности.	1) 10; 2) 13; 3) 15; 4) 16; 5) 8.
A14	Найти площадь фигуры, состоящей из точек $A(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases}(y-3x)(y+x)\ge 0,\\ 2\le y\le 5.\end{cases}$	1) 10; 2) 14; 3) 12; 4) 16; 5) 18.
A15	Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^\circ$, причем $\lvert\vec{a}\rvert=5$, $\lvert\vec{b}\rvert=8$. Определить $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert$.	1) 3; 2) 7; 3) 10; 4) 8 ; 5) 9.

Часть Б

№	Условие задания
Б1	В трапеции *АВСД* основания равны 28 и 7. На продолжении основания *ВС* выбрана точка *М* так, что прямая *АМ* отсекает от трапеции треугольник, площадь которого составляет 0,5 от площади трапеции. Найти длину *СМ*.
Б2	Стороны треугольника равны 25, 39 и 56. Определить расстояние от плоскости треугольника до точки, которая удалена от каждой стороны треугольника на 25.
Б3	Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 8. Найти площадь *S* наибольшего сечения, проходящего через два параллельных, не лежащих в одной грани ребра параллелепипеда. В ответ записать S^2.
Б4	В шаре, радиус которого равен 13, проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии 4 и 12 от центра. Определить длину их общей хорды.
Б5	В параллелограмме *АВСД* заданы координаты двух вершин $A(4;-2;4)$, $B(5;-1;-8)$ и координаты точки пересечения диагоналей $P(7;-1;4)$. Найти сумму координат вектора $\overrightarrow{AD}$.

Тема 9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

При изучении данной темы следует обратить особое внимание на графики показательной и логарифмической функций и с их помощью уметь формулировать основные свойства этих функций, а также хорошо усвоить нижеприведенные свойства показательных функций и логарифмов.

1. $a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$.
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
3. $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$
4. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.
6. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.
7. а) $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y, \quad x > 0, \quad y > 0$;

   б) $\log_a (x \cdot y) = \left| xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \right| = \log_a |x| + \log_a |y|$.

(Надо следить за тем, чтобы не произошло сужение или расширение области определения выражения).

8. а) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0$;

   б) $\log_a \dfrac{x}{y} = \left| \dfrac{x}{y} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \right| = \log_a |x| - \log_a |y|$.
9. $\log_a x^k = k \log_a |x|, \quad x^k > 0, \quad k \in R$.

Область определения выражений в правой и левой частях должна быть одна и та же.

Например: $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$

$D(\log_a x^2) = R, \quad x \neq 0, \quad D(2\log_a |x|) = R, \quad x \neq 0$

Если бы вы записали $\log_a x^2 = 2\log_a x$, то произошло бы сужение области определения: $D(2\log_a x) = R+$.

Но $\log_a x^3 = 3\log_a x$, *т.к.* $D(\log_a x^3) = D(3\log_a x) = R+$.

10. а) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1, \quad c > 0, \quad c \neq 1$;

б) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

11. а) $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b, \quad m,n \in R, \quad a>0, \quad a \ne 1, \quad b>0$;

б) $\log_b a = \log_{b^k} a^k, \quad k \in R$.

12. $a^{\log_a b} = b, \quad a>0, \quad a \ne 1, \quad b>0$ (основное логарифмическое тождество).

13. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (в частном случае: $a^{\lg b} = b^{\lg a}$),
$a>0, \quad a\ne 1, \quad b>0, \quad b \ne 1, \quad c>0, \quad c \ne 1$.

14. $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x, \quad x>0, \; y>0$.

Пример 1. Найдите $\log_8 30$, *если* $\lg 5 = a, \quad \lg 3 = b$.

Решение. $\log_8 30 = \dfrac{\lg 30}{\lg 8} = \dfrac{\lg 3 + \lg 10}{3\lg 2} = \dfrac{\lg 3 + 1}{3\lg\dfrac{10}{5}} = \dfrac{b+1}{3(1-a)}$.

Ответ: $\dfrac{b+1}{3(1-a)}$.

Общий вид простейшего показательного уравнения
$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a>0, \quad a \ne 1$. Оно равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Если $a = \varphi(x)$, то $\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$ Случаи $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(x) = 1$ рассматриваются отдельно и найденные корни проверяются подстановкой в данное уравнение. Если они не удовлетворяют ему, или получаются выражения вида 0^{o} или $0^{-\alpha^2}$, то эти значения x не являются корнями исходного уравнения.

Существуют различные методы решения показательных уравнений. Рассмотрим некоторые из них на примерах.

Пример 2. Решите уравнение
$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

Решение. Обратите внимание, что $3 - \sqrt{8} = \dfrac{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})}{3+\sqrt{8}} = \dfrac{1}{3-\sqrt{8}}$, т.е. выражения $(3-\sqrt{8})$ и $(3+\sqrt{8})$ взаимно обратны. Введем подстановку $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = z$, тогда $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = \dfrac{1}{z}, \quad z>0$.

Уравнение примет вид $z + \dfrac{1}{z} = 6, \quad z^2 - 6z + 1 = 0, \quad z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$. Итак,

$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3-\sqrt{8}, \quad x=3$, и $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3+\sqrt{8}, \quad x=-3$.

Ответ: {-3; 3}.

Пример 3. Решите уравнение $5^{2x+1} + 6^{x+1} = 30 + 150^x$.

Решение. О.О.У.: $x \in R, \quad 5^{2x} \cdot 5 + 6^x \cdot 6 = 5 \cdot 6 + \left(5^2\right)^x \cdot 6^x$.

Сгруппируем первое и четвертое, втрое и третье слагаемые и вынесем общий множитель, получим:

$$5^{2x}(5-6^x) + 6(6^x - 5) = 0, \quad (5-6^x)\cdot(5^{2x}-6) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 5-6^x = 0 \\ 5^{2x} - 6 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{matrix} 6^x = 5 \\ 5^{2x} = 6 \end{matrix}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{matrix} x = \log_6 5, \\ x = \log_{25} 6. \end{matrix}\right.$$

Ответ: $\{\log_6 5; \log_{25} 6\}$.

Пример 4. Решите уравнение $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0$.

Решение. О.О.У. $x \in R, \quad x \neq 0$.

Уравнение содержит показательные функции с разными основаниями. Чтобы свести данное уравнение к уравнению, содержащему одну показательную функцию, разделим почленно все члены уравнения на показательную функцию с большим основанием, т.е. на $9^{1/x} \neq 0$.

$$6 - 13\left(\frac{6}{9}\right)^{1/x} + 6\left(\frac{4}{9}\right)^{1/x} = 0.$$ Обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x} = z, \quad z > 0$,

$$6 - 13z + 6z^2 = 0, \quad z_1 = \frac{3}{2}, \quad z_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x} = \frac{3}{2}, \quad x = -1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{1/x} = \frac{2}{3}, \quad x = 1.$$

Ответ: {-1; 1}.

Общий вид простейшего логарифмического уравнения

$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

Такое уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Все логарифмические уравнения различными способами сводятся к простейшим.

Пример 5. Решите логарифмическое уравнение путем потенцирования:

$$2\lg\sqrt{x^2-36}+\frac{1}{3}\lg(x^3+3x^2+3x+1)-\lg(x+6)=\lg(15-x).$$

Решение

О.О.У. $\begin{cases} x^2-36>0, \\ x^3+3x^2+3x+1>0, \\ x+6>0, \\ 15-x>0. \end{cases}$

Так как отыскание О.О.У. займет много времени, то вначале решим уравнение, затем сделаем проверку:

$\lg(x^2-36)\cdot(x^3+3x^2+3x+1)^{1/3}\cdot(x+6)^{-1}=\lg(15-x)$,

$\dfrac{(x^2-36)(x+1)}{x+6}=15-x$

$(x-6)(x+1)=15-x$

$x^2-4x-21=0, \quad x_1=7, \quad x_2=-3.$

Выполним проверку: $x_1=7$

$\begin{cases} 47-36>0 \\ (7+1)^3>0 \\ 7+6>0 \\ 15-7>0 \end{cases}$ – истинно, $x_2=-3$. Легко убедиться, что это значение не удовлетворяет О.О.У.

Ответ: 7.

***Пример* 6.** Решите уравнение с помощью перехода к одному основанию: $\log_{4x+1}7+\log_{3x}7=0$.

Решение

О.О.У. $\begin{cases} 4x+1>0, & 4x+1\neq 1 \\ 9x>0, & 9x\neq 1 \end{cases}$

$$\frac{1}{\log_7(4x+1)}+\frac{1}{\log_7 9x}=0\Rightarrow \qquad \frac{\log_7 9x+\log_7(4x+1)}{\log_7(4x+1)\cdot\log_7 9x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \log_7\big(9x\cdot(4x+1)\big)=\log_7 1\Rightarrow \quad 9x(4x+1)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 36x^2+9x-1=0, \qquad x_1=-\frac{1}{3}, \quad x_2=\frac{1}{12}.$$

***Ответ*:** (1/12).

Пример 7. Решите уравнение

$\log_2(x-2)\log_2(x-4)=\log_2(x^2-6x+8)-1$.

Решение

$$\text{О.О.У.}=\begin{cases} x>2 \\ x>4 \\ x^2-6x+8>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ (x-2)(x-4)>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x\in(4,+\infty)$$

$\log_2(x-2)\log_2(x-4)=\log_2\big((x-2)(x-4)\big)-1$.

Обозначим $\log_2(x-2)=u$, $\log_2(x-4)=v$, тогда уравнение примет вид

$uv=u+v-1$, $(uv-u)-v+1=0$, $u(v-1)-(v-1)=0$,

$$(v-1)(u-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &u-1=0, \\ &v-1=0. \end{aligned}\right.$$

$u-1=0$

$\log_2(x-2)=1$, $x-2=2$, $x_1=4$ не удовлетворяет О.О.У.

$v-1=0$, $\log_2(x-4)=1$, $x-4=2$, $x_2=6$.

Ответ: 6.

<u>Пример 8.</u> Решите уравнение путем логарифмирования левой и правой частей уравнения $2^{x-3}=5^{x^2-5x+6}$. Укажите целое решение.

<u>Решение.</u> О.О.У. $x\in R$

$(x-3)\lg 2=(x^2-5x+6)\lg 5$,

$(x-3)\lg 2=(x-3)(x-2)\lg 5$,

$(x-3)(\lg 2-(x-2)\lg 5)=0$,

$x_1=3$, $x_2=2+\log_5 2$.

Ответ: 3.

<u>Пример 9.</u> Решите уравнение $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$. В ответ запишите сумму корней.

<u>Решение.</u> Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, считая $|x-3|>0$. $\begin{cases} (3x^2-10x+3)\lg|x-3|=0 \\ |x-3|\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-10x+3=0 \\ \begin{cases} \lg|x-3|=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \quad x_2=1 \\ \begin{cases} |x-3|=1 \\ x\neq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \quad x_2=1, \\ x_3=4, \quad x_4=2. \end{array}\right.$$

При $|x-3|=0, \quad x=3$. Если это значение подставить в исходное уравнение, то в левой части получим неопределенное выражение 0^o, откуда следует, что $x=3$ не является корнем уравнения. Итак, корнями уравнения будут числа 1; 4; 2. Их сумма равна 7.

Ответ: 7.

<u>Пример 10</u>. Решите неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$. Укажите наименьшее целое решение.

<u>Решение.</u> Основание и показатель есть функции от x, поэтому мы должны положить $x-2>0, \quad x-2\neq 1$ и снова рассмотреть два случая:

1) $0<x-2<1$ 2) $x-2>1$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x-2<1 \\ (x-2)^{x^2-6x+8}>(x-2)^0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x-2>1 \\ (x-2)^{x^2-6x+8}>(x-2)^0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2<x<3 \\ x^2-6x+8<0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x>3 \\ x^2-6x+8>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2<x<3. \\ 2<x<4 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x>3 \\ \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<3 \\ x>4 \end{array}\right..$$

Случай $x-2=1$ тоже может дать решение неравенства. Проверяем непосредственно подстановкой в неравенство $x-3$.

$$1^{9-18+8}>1 \text{ – ложно.}$$

Ответ: $x\in(2;3)\bigcup(4;+\infty)$ наименьшее $x=5$.

<u>Пример 11</u>. Решите неравенство $\log_{x-2}(x^2-8x+15)>0$.

<u>Решение</u>. Основание логарифма – переменное, поэтому надо рассмотреть два случая: 1) $0<x-2<1$, 2) $x-2>1$. Учитывая область определения и что $\log_{x-2}1=0$, будем иметь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x-2<1\\x^2-8x+15>0\\\log_{x-2}(x^2-8x+15)>\log_{x-2}1\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x-2<1\\x^2-8x+15>0\\\log_{x-2}(x^2-8x+15)>\log_{x-2}1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<3\\(x-5)(x-3)>0\\(x-4+\sqrt{2})(x-4-\sqrt{2})<0\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x>3\\(x-4+\sqrt{2})(x-4-\sqrt{2})>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-\sqrt{2}<x<3\\x>4+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(4-\sqrt{2};3)\cup(4+\sqrt{2};+\infty)$.

<u>Пример 12</u>. При каких a неравенство $\log_{\frac{a+4}{a+9}}\left(x^2+3\right)>1$ выполняется для любого x? В ответ запишите наибольшее целое a.

<u>Решение.</u> Нетрудно заметить, что данное неравенство будет выполняться для любого x при условии $1<\dfrac{a+4}{a+9}<3$, т.к. $x^2+3\geq 3$.

$$\begin{cases}\dfrac{a+4}{a+9}>1\\\dfrac{a+4}{a+9}<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{5}{a+9}>0\\\dfrac{-2a-23}{a+9}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+9<0\\-2a-23>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<-9\\2a<-23\end{cases}$$

$\Rightarrow\ a<-\dfrac{23}{2}$. Итак, при $a\in(-\infty;-11{,}5)$ неравенство выполняется для любого $x\in R$.

Ответ: – 12.

Контрольный тест № 9

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
A1	Выражение $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(\sqrt{3}+2)^2}$ равно …	1) $2\sqrt{3}$; 2) 4; 3) 0; 4) 14; 5) – 4.
A2	Выражение $7^{\sqrt{\log_7 5}}-5^{\sqrt{\log_5 7}}+7$ равно …	1) –5; 2) 2; 3) 7; 4) 14; 5) 5.
A3	Выражение $\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$ равно …	1) $2\lg 2$; 2) 2; 3) $2+2\lg^2 2$; 4) 1; 5) 10.
A4	Вычислить $\log_{ab}\dfrac{\sqrt{b}}{a}$, если $\log_a b=3$.	1) 1; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{4}$; 4) $-\dfrac{1}{2}$; 5) $\dfrac{1}{8}$.
A5	Вычислить 8^x+8^{-x}, если $64^x+64^{-x}=79$.	1) 9; 2) 16; 3) 8; 4) 3; 5) 10.
A6	Если $x\in(-1000;-0{,}01)$, то множеством значений функции $y=\lvert\lg(-x)\rvert$ является промежуток …	1) (2; 3); 2) [2; 3); 3) $(0;2)\cup(2;3)$; 4) (0; 3); 5) [0; 3).
A7	Корень уравнения $7^{1-2x}\cdot 5^{4x-2}=1999^{\circ}$ равен …	1) 0,5; 2) 1; 3) – 1; 4) 2; 5) – 2.
A8	Решить уравнение $\log_6(6^x-35)=2-x$. Если решений несколько, то в ответ записать их сумму.	1) 2; 2) 1 ; 3) 35; 4) 36; 5) 8.
A9	Корень уравнения $2\log_3 x^2-\log_3^2(-x)=4$ принадлежит промежутку …	1) (5; 10); 2) $\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{1}{5}\right)$; 3) (–10; – 5); 4) $\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{1}{10}\right)$; 5) (– 8; 0).
A10	Сумма корней уравнения $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-0{,}8x)-9}=25^{\log_{\frac{1}{5}}(7-0{,}8x)}$ равна …	1) 0; 2) 1; 3) 4; 4) – 4; 5) – 1.
A11	Определить, какие из чисел: – 3; – 1; 1; 3 являются решением неравенства $\left\lvert\dfrac{1}{2}-\log_9 5\right\rvert\cdot x\le\dfrac{1}{2}-\log_9 5$. В ответ записать большее из них.	1) – 3; 2) 1; 3) 4; 4) – 4; 5) – 1.

№	Задания	Варианты ответов
А12	Наименьшее целое решение неравенства $25^{x-3} > 19^{3-x}$ равно …	1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 6; 5) 7.
А13	Решить неравенство $\log_{2x+3}\frac{1}{5} \le \log_{5x-9}\frac{1}{5}$. В ответ записать сумму целых решений, принадлежащих промежутку$[-2;5]$.	1) 8; 2) 9; 3) 7; 4) 3; 5) 12.
А14	Уравнение $(x+a)\log_2(x-1)=0$ имеет ровно один корень, если a равно…	1) $a=-2$; 2) $a=2$; 3) $-1 \le a < 0$; 4) $\left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a \ge -1. \end{array}\right.$ 5) нет правильного ответа.
А15	Решением неравенства $\log_{x^2+1}(x+1)^2 \le 0$, является множество …	1) $[0;+\infty)$; 2) $[-2;0)$; 3) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; 4) $[-2;-1)\cup(-1;0]$; 5) $(-\infty;-1)\cup(-1;0]$.

Часть Б

№	***Условие задания***
Б1	Наибольшее решение уравнения $25\cdot 9^x - 34\cdot 15^x + 9\cdot 5^{2x} = 0$ равно ...
Б2	Наибольшее значение x, не удовлетворяющее неравенству $4^{\sqrt{x}} - 9\cdot 2^{\sqrt{x}} + 8 > 0$, равно …
Б3	Решить уравнение $4(\log_2 \cos x)^2 + \log_2(1+\cos 2x) = 3$. В ответ записать сумму решений, принадлежащих промежутку $(-90^\circ;360^\circ)$.
Б4	Решить систему неравенств $\begin{cases} 0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25, \\ \log_4(x+7) > \log_2(x+1). \end{cases}$ В ответ записать целое решение или сумму целых решений, если таковые существуют.
Б5	При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} \lg(4+y) = \lg x, \\ a - y = 0{,}5(x+a)^2 \end{cases}$ имеет решение?

Тема 10. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Данная тема является одной из основных тем математического анализа. При ее изучении следует обратить внимание на определение производной, теоремы о производной алгебраической суммы, произведения и частного. Особое внимание следует обратить на вычисление производной сложной функции и на приложения производной.

<u>Задача 1.</u> Вычислите производную функции $y = \dfrac{5x^3 + 2x}{4 + \sqrt{x}}$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся правилом дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{5x^3 + 2x}{+\sqrt{x}}\right)' = \frac{(5x^3 + 2x)'(4 + \sqrt{x}) - (4 + \sqrt{x})'(5x^3 + 2x)}{\left(4 + \sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{(15x^2 + 2)(4 + \sqrt{x}) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(5x^3 + 2x\right)}{\left(4 + \sqrt{x}\right)^2} = \frac{25x^2 + 120x^2\sqrt{x} + 2x + 16\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(4 + \sqrt{x}\right)^2}.$$

<u>Задача 2.</u> Покажите, что касательные, проведенные к графику функции $y = \dfrac{x - 4}{x - 2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

<u>Решение.</u> Две прямые l_1 и l_2 параллельны, если их угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны. Учитывая геометрический смысл производной, будем иметь: тангенс угла наклона касательной, проведенной к данной кривой, равен $y' = \dfrac{x - 2 - x + 4}{(x - 2)^2} = \dfrac{2}{(x - 2)^2}$.

Найдем точки пересечения кривой с осью OX:

$y = 0$, $x = 4$ или $M_1(4{,}0)$. С осью ОУ : $x = 0$, $y = 2$ или $M_2(0{,}2)$.

Значения k в этих точках будут $k_1 = y'(4) = \dfrac{1}{2}$, $k_2 = y'(0) = \dfrac{1}{2}$. Так как $k_1 = k_2$, то касательные параллельны.

<u>Задача 3.</u> Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{10x}{1 + x^2}$ на отрезке [0, 3].

<u>Решение.</u> Найдем производную функции

$$y' = \frac{10(1 + x^2) - 2x \cdot 10x}{(1 + x^2)^2} = \frac{10 - 10x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{10(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Приравняем y' к нулю и найдем критические точки, т.е. $1 - x^2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Так как точка $x = -1$ не принадлежит данному отрезку, то ее не рассматриваем.

Далее находим значение функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка, т.е. $y(0) = 0$, $y(1) = 5$, $y(3) = 3$.

Итак, наименьшее значение функции равно 0, наибольшее значение равно 5.

<u>Задача 4.</u> Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом 6,28 м^3. Каким должен быть радиус бака, чтобы на изготовление его ушло наименьшее количество листовой стали? (Считать $\pi = 3{,}14$).

<u>Решение.</u> Полная поверхность цилиндра равна $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$, а объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H = 6{,}28$. Найдем H цилиндра: $H = \dfrac{6{,}28}{\pi R^2}$.

Итак, $S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \dfrac{6{,}28}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \dfrac{12{,}56}{R}$.

Будем рассматривать полную поверхность цилиндра S как функцию радиусом R, т.е. $S(R)$ и найдем производную этой функции:

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{12{,}56}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 12{,}56}{R^2}.$$

Найдем критические точки функции:

$$S'(R) = \frac{4\pi R^3 - 12{,}56}{R^2} = 0, \quad 4\pi R^3 - 12{,}56 = 0,$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{12{,}56}{4\pi}}, \text{ при } \pi = 3{,}14 \quad R = 1.$$

При $R < 1$, $S'(R) < 0$, а при $R > 1$, $S'(R) > 0$. Значит, при $R = 1$ функция достигает минимума. А если при $R > 0$ критическая точка одна и в ней функция имеет минимум, то это и будет наименьшее значение нашей функции. Итак, при $R = 1$ на изготовление бака уйдет наименьшее количество листовой стали.

Контрольный тест № 10

Часть А

№	Задания	Варианты ответов
А1	Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sqrt{5 - x^2}$ в точке $x_0 = 2$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{3}{2}$; 4) –2; 5) – 1.

№	Задания	Варианты ответов
A2	Найти разность max и min функции $f(x)=2x^3+3x^2-1$.	1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) 5.
A3	Прямая $y=ax+4$ касается графика функции $y=-\dfrac{10}{x}$, если значение параметра a равно…	1) – 0,4 ; 2) 0,5; 3) – 5; 4) 1; 5) 0,4.
A4	Максимум функции $y=3ax^2-12ax+a^2-11$ равен 2, если значение параметра a равно…	1) 13; 2) – 13; 3) 1; 4) -1; 5) 4.
A5	При каком значении x сумма $(10x-1)^2+(10x-2)^2+...+(10x-1001)^2$ принимает наименьшее значение?	1) 50,4; 2) 50,1; 3) 50,3; 4) 50,5; 5) 50.
A6	Сумма абсцисс точек, в которых касательные к графику функции $y=\dfrac{x^3}{6}-x+1$ перпендикулярны прямой $y=2x-1$, равна …	1) 1; 2) – 1; 3) 0; 4) – 2; 5) – 2.
A7	Количество целых значений x, принадлежащих интервалам убывания функции $y=\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{256}{x}$ и находящихся на отрезке $[-6; 6]$, равно …	1) 4; 2) 6; 3) 10; 4) 2; 5) 3.
A8	Если m и M значения функции $f(x)=\dfrac{6}{5}x+\dfrac{30}{x+3}$ в точках минимума и максимума соответственно, то значение выражения $m+2M$ равно…	1) 1,2; 2) – 14 ; 3) – 22,8; 4) – 4; 5) – 1,2.
A9	Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=1-x^3+ax^2-3ax$ убывает для всех $x\in R$.	1) $a<-9$; 2) $a<0$; 3) $a>9$; 4) $0\le a\le 9$; 5) $-9<a<0$.
A10	Касательная к графику функции $f(x)=8\cdot 2^{x-3}$ с угловым коэффициентом $k=2\ln 2$ пересекает ось абсцисс в точке x, равной …	1) $\dfrac{1}{\ln 2}$; 2) $\dfrac{\ln 2-1}{\ln 2}$; 3) $\dfrac{1-\ln 2}{2}$; 4) $\dfrac{\ln 2}{1-\ln 2}$; 5) $\dfrac{\ln 2}{\ln 2-1}$.
A11	Наибольшее значение функции $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$ на отрезке [2; 4] равно…	1) 3; 2) 3,5; 3) 4; 4) 2; 5) 4,5.

№	Задания	Варианты ответов
А12	Производная функции $y=\ln(\sin 4x)+\dfrac{2x^2}{\pi}+\dfrac{1}{4}$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{16}$ равна …	1) 1,25; 2) 1,5; 3) 4,5; 4) 4,25; 5) 3,75.
А13	Число точек экстремума функции $y=(x-1)^3(x-3)^3$ равно …	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.
А14	Найти $f'(f(3))$, если $f(x)=4^{\log_2 x}$.	1) 10; 2) 9; 3) 18; 4) 14; 5) 12.
А15	Вычислить площадь треугольника, образованного касательной к кривой $y=x^2+2x-3$ в точке $M_0(2;5)$ и осями координат.	1) $\dfrac{57}{13}$; 2) $\dfrac{37}{12}$; 3) $\dfrac{33}{12}$; 4) $\dfrac{47}{13}$; 5) $\dfrac{49}{12}$.

Часть Б

№	Условие задания
Б1	Производные в точке $x=2$ произведения и частного функций $f(x)$ и $g(x)$ равны 16 и 1, а $f'(2)=-4$. Найти $g(2)$.
Б2	Найти наибольшую площадь параллелограмма, у которого две вершины лежат на прямой $x=6$, а две другие на параболах $y=x^2$, $y=2x^2$.
Б3	На кривой $y=x^4-4x^3+4x^2$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y=-4$.
Б4	Точка M, двигаясь по окружности против часовой стрелки, сорвалась с нее и, двигаясь по касательной к окружности, пересекла ось OX в точке $M(-2;0)$. Определить координаты точки окружности, с которой сорвалась точка, если уравнение окружности $(x-4)^2+(y-8)^2=20$. В ответ записать ординату точки.
Б5	При каком отношении радиуса основания к высоте цилиндр с данной площадью поверхности имеет наибольший объем?

Учебное издание

Методические указания и контрольные тесты по математике

для слушателей
заочных подготовительных курсов

Составители:
Васильева Виктория Ивановна,
Юхо Людмила Константиновна

Редактор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать 14.06.2005.	Формат 60х84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 5,0.
Уч.-изд. л. 3,9.	Тираж 200 экз.	Заказ 294.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0131518 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6