



В.В.Воробьев

Практикум по математике

**неравенства,
задачи С1 и С3 ЕГЭ и
ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ**

2014



СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Задачи С1 ЕГЭ по математике	4
Задания для самостоятельного решения	8
3. Задачи С3 ЕГЭ по математике	9
Задания для самостоятельного решения	17
4. Неравенства. Методы доказательства неравенств	19
Задания для самостоятельного решения	22
4. Поисково-исследовательские задачи	24
Задания для самостоятельного решения	30
Ответы	31
Список литературы и источники информации	32

Введение

В данном «Практикуме» не просто рассматриваются основные методы и приемы решения задач, а осуществляется попытка, использовать метод «Ключевых задач» (ключевых методов и приемов) для формирования умений и навыков решения задач различного уровня. Практика показывает, что такой подход в обучении дает положительные результаты.

Содержание «Практикума» нацеливает не только на более качественную подготовку к ЕГЭ по математике, но и, прежде всего, на удовлетворение индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей, учащихся в математике.

Целесообразность использования данного «Практикума» состоит в том, что содержание и соответственная форма учебной работы, помогут школьнику через практические занятия оценить свой потенциал, с точки зрения образовательной перспективы, и предоставят ему возможность работать на уровне повышенных возможностей.

«Практикум» позволит школьникам систематизировать, расширить и укрепить знания, подготовиться для дальнейшего изучения математики, научиться решать разнообразные задачи различного уровня сложности.

Основные цели:

- использовать «Практикум» для качественной подготовки обучающихся к ЕГЭ по темам: неравенства и уравнения (задачи C1 и C3);
- развить логическое и алгоритмическое мышление;
- сформировать навыки исследования и анализа получаемой информации;
- вооружить обучающихся системой знаний и умений по решению задач C1, C3 ЕГЭ, олимпиадных задач и задач исследовательского характера.
- сформировать навыки применения данных знаний при решении разнообразных задач различной сложности.

1. Задачи С1 ЕГЭ по математике

Решить неравенство

$$\frac{\sin 2x \cos x + \sin x - 2 \sin^3 x - 1}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0$$

Решение. Левая часть неравенства определена, если $4-x^2 > 0$, $-2 < x < 2$.

Преобразуем левую часть исходного неравенства (используем формулы:

$$1 - 2 \sin^2 \beta = \cos 2\beta; \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta))$$

$$\frac{\sin 2x \cos x + \sin x(1 - 2 \sin^2 x) - 1}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0;$$

$$\frac{\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x - 1}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0;$$

$$\frac{\sin(2x+x)-1}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0; \frac{\sin 3x-1}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно смешенной системе

$$\begin{cases} \sin 3x = 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z \\ -2 < x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

Неравенству $-2 < x < 2$ удовлетворяют только числа: $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}$. Отсюда

следует, что числа $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}$ являются решением системы (1) и, следовательно, решением исходного неравенства.

Пусть $f(x) = \frac{\sin 2x \cos x + \sin x - 2 \sin^3 x - 1}{\sqrt{4-x^2}}$ или (после преобразований)

$$f(x) = \frac{\sin 3x - 1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ вспомогательная функция.}$$

Если переформулировать условие задачи, то необходимо определить, при каких значениях аргумента функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения.

Функция принимает неотрицательные значения, если $x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{6}$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}.$$

Решить неравенство

$$\frac{2 \cos 2x \cos 3x - 2 \cos^2 2,5x}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(64-x^2)^2} + \left(\sqrt{64-x^2} \right)^2 \right)^{0,5}} \geq 0$$

Решение. Левая часть неравенства имеет смысл, если $64-x^2 > 0$,
 $-8 < x < 8$.

Преобразуем левую часть исходного неравенства (используем формулы:

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta); \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \text{ и другие})$$

$$\frac{\cos 5x + \cos(-x) - 2 \left(\frac{1 + \cos 5x}{2} \right)}{\frac{1}{\sqrt{2}} (|64-x^2| + 64-x^2)^{0,5}} \geq 0;$$
$$\frac{\cos 5x + \cos x - 1 - \cos 5x}{\frac{1}{\sqrt{2}} (64-x^2 + 64-x^2)^{0,5}} \geq 0; \frac{\cos x - 1}{(64-x^2)^{0,5}} \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно смешенной системе

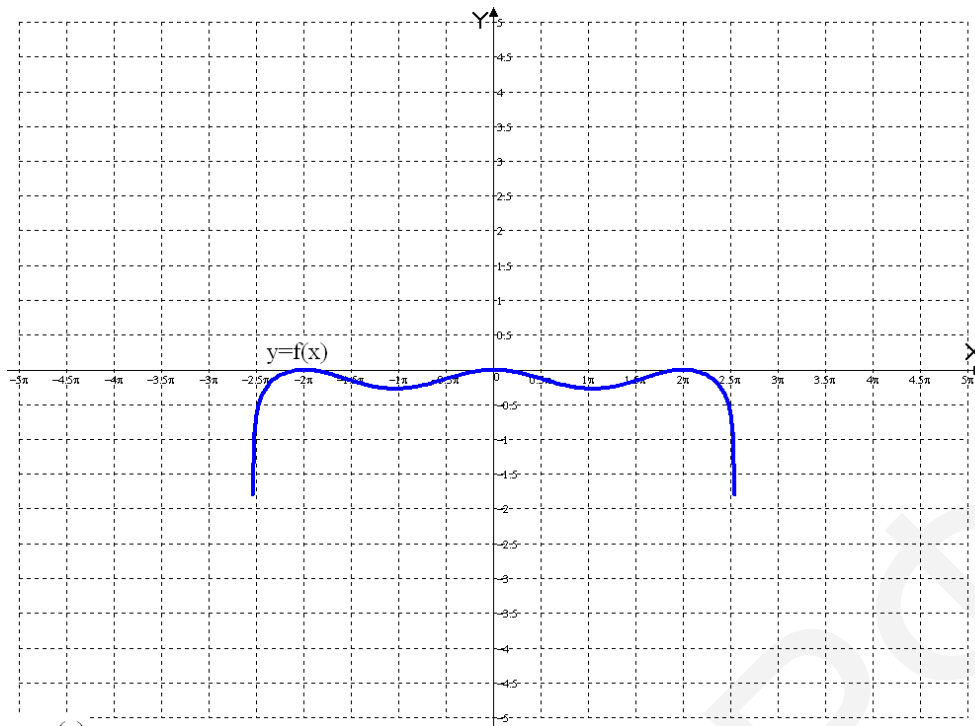
$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ -8 < x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -8 < x < 8 \end{cases} \quad (1)$$

Неравенству $-8 < x < 8$ удовлетворяют только числа: $-2\pi; 0; 2\pi$. Отсюда следует, что числа $-2\pi; 0; 2\pi$ являются решением системы (1) и, следовательно, решением исходного неравенства.

Пусть $f(x) = \frac{2 \cos 2x \cos 3x - 2 \cos^2 2,5x}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(64-x^2)^2} + \left(\sqrt{64-x^2} \right)^2 \right)^{0,5}}$ или (после преобразований)

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sqrt{64-x^2}} \text{ - вспомогательная функция.}$$

Функция принимает неотрицательные значения, если $x = -2\pi; x = 0; x = 2\pi$ (см. рис.2).



Ответ: $-2\pi; 0; 2\pi$

рис.2

Решить неравенство

$$\frac{4\cos^4 x - 3\cos^2 x - \cos^2 2x}{\log_2(16 - x^2)} \geq 0$$

Решение. Левая часть неравенства определена, если

$$16 - x^2 > 0, \log_2(16 - x^2) \neq 0, \text{ или } -4 < x < 4, x \neq \pm\sqrt{15}.$$

Преобразуем левую часть исходного неравенства (используем формулы:

$$\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ и другие})$$

$$\frac{4\cos^4 x - 3\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)^2}{\log_2(16 - x^2)} \geq 0$$

$$\frac{4\cos^4 x - 3\cos^2 x - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 1}{\log_2(16 - x^2)} \geq 0; \frac{\cos^2 x - 1}{\log_2(16 - x^2)} \geq 0;$$

Последнее неравенство равносильно смешенной системе

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ -4 < x < 4, x \neq \pm\sqrt{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -4 < x < 4, x \neq \pm\sqrt{15} \end{cases} \quad (1)$$

Неравенству $-4 < x < 4, x \neq \pm\sqrt{15}$ удовлетворяют только числа: $-\pi; 0; \pi$.

Отсюда следует, что числа $-\pi; 0; \pi$ являются решением системы (1) и, следовательно, решением исходного неравенства.

Ответ: $-\pi; 0; \pi$.

Решить неравенство

$$\frac{\left(16\sin^3 \frac{x}{6} - 12\sin \frac{x}{6}\right)\cos(0,5x) + 2}{\sqrt{25-x^2}} \leq 0$$

Решение. Левая часть неравенства определена, если

$$25 - x^2 > 0; -5 < x < 5.$$

Преобразуем левую часть исходного неравенства (используем формулы:

$$\sin 3\beta = 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta; \sin 2\beta = 2\sin \beta \cos \beta)$$

$$\frac{4\left(4\sin^3 \frac{x}{6} - 3\sin \frac{x}{6}\right)\cos(0,5x) + 2}{\sqrt{25-x^2}} \geq 0$$

$$\frac{-4\left(-4\sin^3 \frac{x}{6} + 3\sin \frac{x}{6}\right)\cos(0,5x) + 2}{\sqrt{25-x^2}} \geq 0$$

$$\frac{-4\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\cos(0,5x) + 2}{\sqrt{25-x^2}} \geq 0$$

$$\frac{-2(2\sin(0,5)\cos(0,5x)) + 2}{\sqrt{25-x^2}} \geq 0$$

$$\frac{-2\sin x + 2}{\sqrt{25-x^2}} \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно смешенной системе

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ -5 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -5 < x < 5 \end{cases} \quad (1)$$

Неравенству $-5 < x < 5$ удовлетворяют только числа $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$. Отсюда

следует, что числа $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ являются решением системы (1) и, следовательно, решением исходного неравенства.

Пусть $f(x) = \frac{\left(16\sin^3 \frac{x}{6} - 12\sin \frac{x}{6}\right)\cos(0,5x) + 2}{\sqrt{25-x^2}}$ или (после преобразований)

$$f(x) = \frac{-2\sin x + 2}{\sqrt{25-x^2}}$$

Функция принимает неотрицательные значения, если $x = -\frac{3\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (задачи уровня С1 ЕГЭ)

51. $\frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{|\sin x| + |\cos x|} \leq 0$
52. $\frac{1 - \frac{4(\operatorname{tg}(0,5x) - \operatorname{tg}^3(0,5x))}{(1 + \operatorname{tg}^2(0,5x))^2}}{\sqrt{\operatorname{tg} 0,5x}} \leq 0$
53. $\frac{-\cos^2 \frac{\pi x}{2} + 4 \sin \frac{\pi x}{2} - 4}{\sqrt{-x^2 + 36}} \geq 0$
54. $\frac{-\sin^2 \frac{\pi x}{4} + 6 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) - 6}{\sqrt{-x^2 + 49}} \geq 0$
55. $\frac{(3 \sin^2 \pi x - \sqrt{2} \sin \pi x + \cos^2 \pi x) \sqrt{1 - x^2}}{\log_2^2 x + \log_2(16x^4)} \leq 0$
56. $\frac{\left(1,25 - \sin^2 \frac{\pi x}{27} - \cos \frac{\pi x}{27}\right) \sqrt{100 - x^2}}{\log_3^2 x + \log_3\left(\frac{81}{x^4}\right)} \leq 0$
57. $\frac{-\frac{1}{\cos^2 2\pi x} + \frac{2}{\operatorname{ctg} 2\pi x}}{(\log_2^2 x + \log_2(512x^6)) \sqrt{1 - x^2}} \geq 0$
58. $\frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2} + 6 \sin \frac{\pi x}{2} - 7}{(14 - x - 6\sqrt{5 - x}) \sqrt{-x^2 + 169}} \geq 0$
59. $\frac{2^{4 \sin \frac{\pi x}{2}} - 2^{2 \sin \frac{\pi x}{2} + 1} - 8}{16 - 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{17-x}} \geq 0$
60. $\frac{9^{\cos \pi x} - 2^{\cos \pi x + 1} \cdot 3^{\cos \pi x} + 4^{\cos \pi x}}{5 - \sqrt{4x+4} \cdot \sqrt{4-x}} \leq 0.$

61. $\frac{(1 - \sin(0,5\pi x))(4 - \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{7-x})}{(x-3)\sqrt{x-3} + (7-x)\sqrt{7-x}} \leq 0$
62. $\left(2 - \cos^2 \frac{\pi x}{6}\right) \sqrt{x+4} \geq x+5$
63. $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 2}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 1}} \leq \frac{4}{x^2 - 24x + 146}$
64. $\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 1\right)(|x-6| + |x+6|) \leq 36$
65. $\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) + \frac{3}{4}} + \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) + \frac{1}{4}} \geq |x-7| + |x-1| - 4$
66. $\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi x}{9}\right) + \frac{1}{4}} + \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi x}{9}\right) + \frac{3}{4}} \geq \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)$
67. $\left(1 + \sin^2 \frac{\pi x}{8}\right)^2 \geq \frac{x+6}{\sqrt{x+5}} + 2$
68. $2^{\sin \frac{\pi x}{4}} - (x^2 - 1)^2 (x^2 - 4)^2 (x^2 - 196)^2 \geq 2$
69. $\frac{\cos^2 \pi x + 8 \cos \pi x - 9}{6 - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{28-4x}} \geq 0$
70. $\frac{(\sin(0,25\pi x) - 1)(9 - \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{11-x})}{(x-2)\sqrt{x-2} + (11-x)\sqrt{11-x}} \geq 0$

3. Задачи уровня С3 ЕГЭ по математике

Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} \leq \frac{x+4}{x-1}$$

Решение. Левая часть неравенства определена, если

$$x-2 \geq 0; \quad x \geq 2.$$

Заданное неравенство равносильно системе

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x-2 \leq \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^2 \\ x \geq 2 \\ \frac{x+4}{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 - \frac{x^2+8x+16}{x^2-2x+1} \leq 0 \\ x \geq 2 \\ x \leq -4; x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3-5x^2-3x-18}{x^2-2x+1} \leq 0 \\ x \geq 2 \\ x \leq -4; x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x^3-6x^2)+(x^2-3x-18)}{x^2-2x+1} \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2(x-6)+(x-6)(x+3)}{x^2-2x+1} \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-6)(x^2+x+3)}{x^2-2x+1} \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}$$

Так как $x \geq 2$, то $x^2 - 2x + 1 > 0$ и $x^2 + x + 3 > 0$, откуда следует, что система неравенств (1) равносильна системе $\begin{cases} x-6 \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$ или $2 \leq x \leq 6$

Таким образом, решением исходного неравенства является отрезок $2 \leq x \leq 6$.

Пусть $f(x) = \sqrt{x-2}$ и $q(x) = \frac{x+4}{x-1}$ вспомогательные функции.

Если переформулировать условие задачи, то необходимо определить, при каких значений x разность значений функций $f(x)$ и $q(x)$ принимает неположительные значения.

Графики функций $f(x) = \sqrt{x-2}$ и $q(x) = \frac{x+4}{x-1}$ изображены на рисунке (см. рис.4). Разность значений функций $f(x)$ и $q(x)$ принимает неположительные значения, если $2 \leq x \leq 6$.

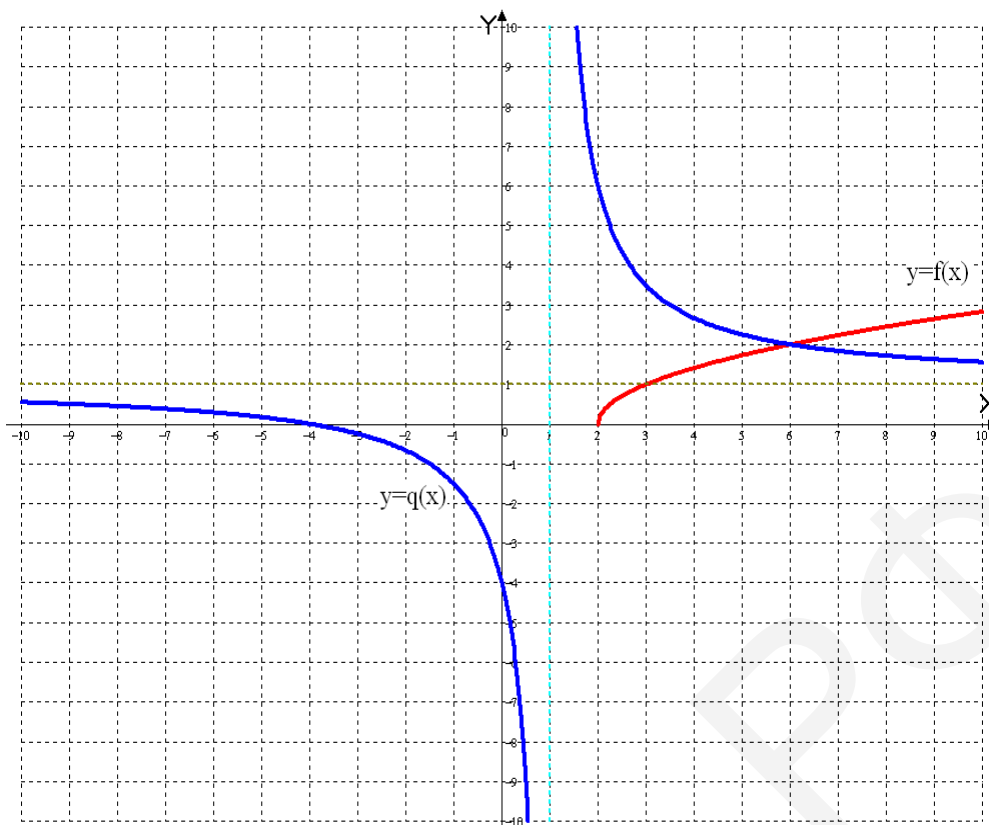


рис.4

Ответ: $[2;6]$

Решить неравенство

$$x^3 - 2x + \frac{1}{x} \geq \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 \sqrt{x+2}$$

Решение. Неравенство определено, если

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Выполнив преобразования, имеем:

$$x \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \right) \geq \left(\frac{1}{x} - x \right)^2 \sqrt{x+2};$$

$$x \left(\frac{1}{x} - x \right)^2 - \left(\frac{1}{x} - x \right)^2 \sqrt{x+2} \geq 0;$$

$$\left(\frac{1}{x} - x \right)^2 \cdot (x - \sqrt{x+2}) \geq 0$$

Последнее неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = 0 \\ x \geq \sqrt{x+2} \\ x \neq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x \leq -1; x \geq 2 \\ x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Так как $x > 0$, то совокупность (1) равносильна совокупности

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Таким образом, решением исходного неравенства является объединение $\{-1\} \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Пусть $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{x}$ и $q(x) = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 \sqrt{x+2}$ вспомогательные функции.

Если переформулировать условие задачи, то необходимо определить при каких значений аргумента x разность значений функций $f(x)$ и $q(x)$ принимает неотрицательные значения.

Графики функций $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{x}$ и $q(x) = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 \sqrt{x+2}$

изображены на рисунке (см. рис.6). Разность значений функций $f(x)$ и $q(x)$ принимает неотрицательные значения при $x = \pm 1; x \geq 2$.

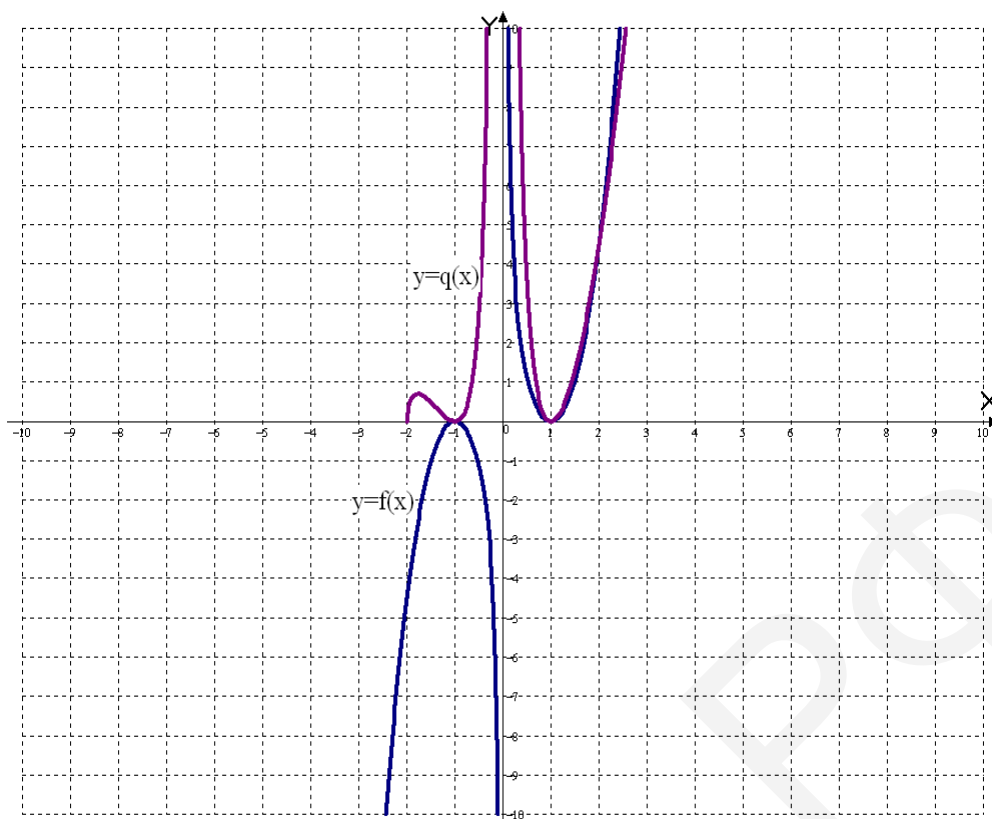


рис.6

Ответ: $\{-1\} \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Решить неравенство

$$x \left(\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 \frac{16}{x^8}} \right) \leq \left(\sqrt{4 - \log_2 x} \right)^2 \sqrt{x+6}$$

Решение. Неравенство определено, если

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x > 0 \\ 4 - \log_2 x \geq 0 \\ \log_2^2 x + \log_2 \frac{16}{x^8} \geq 0 \end{cases}$$

Выполнив преобразования, имеем:

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x > 0 \\ \log_2 x \leq \log_2 16 \\ \log_2^2 x + \log_2 16 - \log_2 x^8 \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 16 \\ \log_2^2 x + \log_2 16 - 8 \log_2 |x| \geq 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 16 \\ (\log_2 x - 4)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{(\log_2 x - 4)^2}\right) \leq \left(\sqrt{4 - \log_2 x}\right)^2 \sqrt{x+6} \Leftrightarrow; \\ 0 < x \leq 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x|\log_2 x - 4| - (4 - \log_2 x)\sqrt{x+6} \leq 0 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases}$$

Так как $4 - \log_2 x \geq 0$, то $|\log_2 x - 4| = -(\log_2 x - 4)$, тогда

имеем:
$$\begin{cases} x(4 - \log_2 x) - (4 - \log_2 x)\sqrt{x+6} \leq 0 \Leftrightarrow \\ 0 < x \leq 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4 - \log_2 x)(x - \sqrt{x+6}) \leq 0 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases}$$

Учитывая, что $4 - \log_2 x \geq 0$, то получим систему равносильную последней системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - \sqrt{x+6} \leq 0 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases} \end{aligned}$$

Решением системы, и, следовательно, решением исходного неравенства является $0 < x \leq 3$

Пусть $f(x) = x\left(\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 \frac{16}{x^8}}\right)$ и $q(x) = \left(\sqrt{4 - \log_2 x}\right)^2 \sqrt{x+6}$

вспомогательные функции.

Графики функций $f(x) = x\left(\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 \frac{16}{x^8}}\right)$ и $q(x) = \left(\sqrt{4 - \log_2 x}\right)^2 \sqrt{x+6}$.

изображены на рисунке (см. рис.7). Разность значений функций $f(x)$ и $q(x)$ принимает неположительные значения при $0 < x \leq 3$.

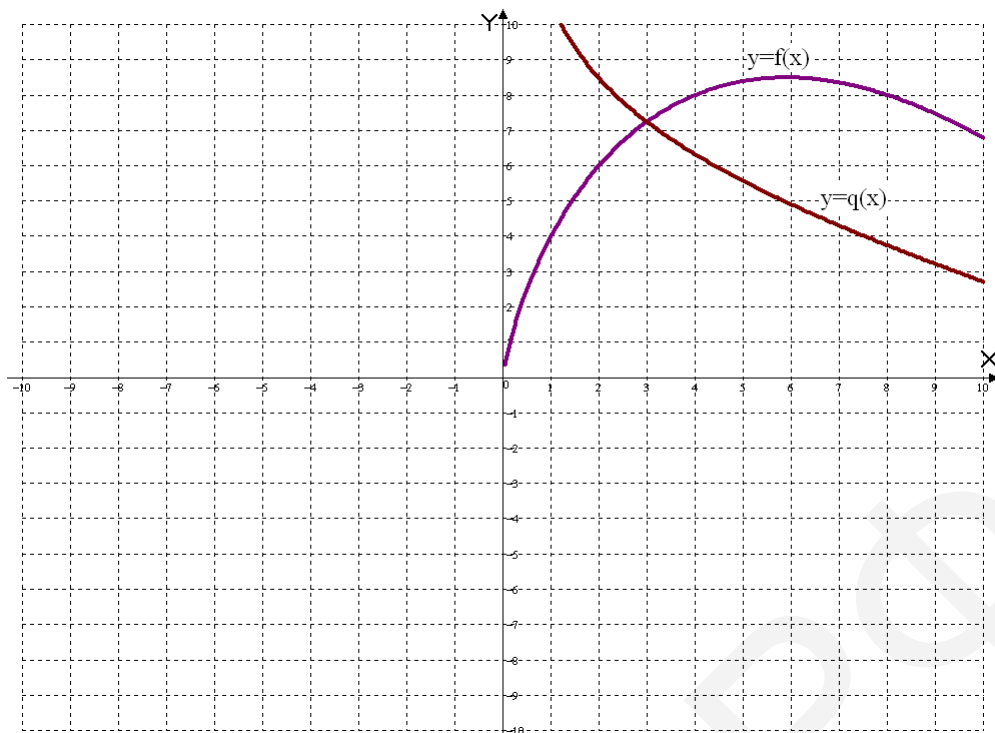


рис.7

Ответ: $(0;3]$.

Решить неравенство

$$28 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{10-x} \leq -\log_2^4 x + 8\log_2^2 x$$

Решение. Неравенство определено, если

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 10-x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 10 \\ x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Система неравенств (1) имеет решение $0 < x \leq 10$.

Исходное уравнение перепишем следующим образом

$$12 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{10-x} \leq -\log_2^4 x + 8\log_2^2 x - 16$$

Выполнив преобразования, имеем:

$$\begin{aligned} 12 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{10-x} &\leq -\log_2^4 x + 8\log_2^2 x - 16; \\ 12 + x - x - 2\sqrt{x+2}\sqrt{10-x} &\leq -(\log_2^2 x - 4)^2; \\ 2 + x - 2\sqrt{x+2}\sqrt{10-x} + 10 - x &\leq -(\log_2^2 x - 4)^2; \\ (\sqrt{x+2} - \sqrt{10-x})^2 + (\log_2^2 x - 4)^2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Неравенство (2) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система

$$\begin{cases} (\sqrt{x+2} - \sqrt{10-x})^2 = 0 \\ (\log_2^2 x - 4)^2 = 0 \\ 0 < x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = \sqrt{10-x} \\ \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \\ 0 < x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \\ 0 < x \leq 10 \end{cases}$$

Решением системы, и, следовательно, решением исходного неравенства является число 4.

Пусть $f(x) = 12 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{10-x}$ и $q(x) = -\log_2^4 x + 8\log_2^2 x - 16$ вспомогательные функции.

Графики функций $f(x) = 12 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{10-x}$ и $q(x) = -\log_2^4 x + 8\log_2^2 x - 16$ изображены на рисунке (см. рис.8). Разность значений функций $f(x)$ и $q(x)$ принимает неположительные значения при $x = 4$.

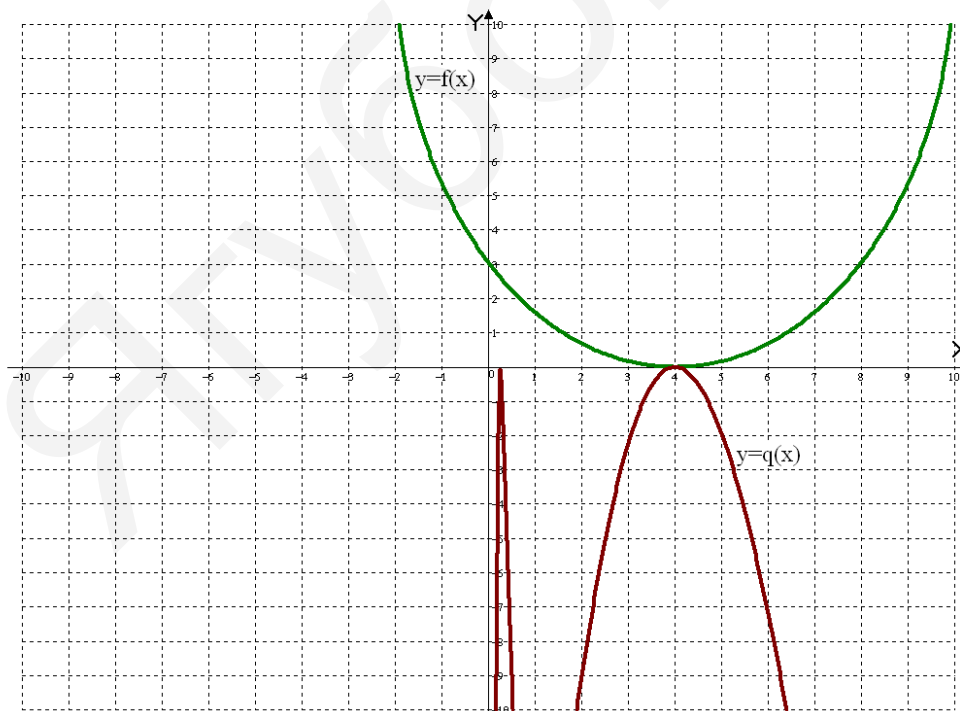


рис.8

Ответ:4.

Задачи для самостоятельного решения**Решите неравенства (задачи уровня С3 ЕГЭ)**

$$71. \log_2 \frac{2x-1}{x-2} + \log_2 ((x-2)(2x-1)) \leq 4$$

$$72. \log_3 \frac{x+3}{3x-9} - \log_3 ((x+3)(3x-9)) \leq -2$$

$$73. \sqrt{x+4} \leq \frac{x+4}{x-2}$$

$$74. \sqrt{x+3} \leq \frac{x+6}{x-2}$$

$$75. 2 \cdot 3^{2x^2-18} - 3^{x^2-9} (2^{x-2} + 2^{7-2x}) + 2^{2x-6} + 2^{12-4x} \leq 0$$

$$76. 2 \cdot 5^{2x+4} - 5^{x+2} (2^{x^2-3} + 2^{2x^2-7}) + 2^{2x^2-8} + 2^{4x^2-16} \leq 0$$

$$77. 5^{x^2-3x-4} \leq 2^{x^2-5x+4}$$

$$78. 6^{x^2-4x-5} \geq 2^{x^2-6x+5}$$

$$79. \frac{(x-2)\sqrt{x-2} + (10-x)\sqrt{10-x}}{8 - \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{10-x}} \leq 2 + \frac{1}{2} \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{10-x}$$

$$80. \frac{2((x+2)\sqrt{x+2} - (6-x)\sqrt{6-x})}{8 + \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{6-x}} \geq 4 - \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{6-x}$$

$$81. \log_{0,25} (x+6) \log_3 (7-x) \leq \log_4 (4x+24) - 1$$

$$82. \log_{0,1} (x+7) \log_2 (11-x) \leq \lg (100x+700) - 2$$

$$83. \log_{16}^2 x^2 + 1 \leq 5 \log_{16} (-x)$$

$$84. 24 \log_{0,25} (-x) - 8 \geq \log_{0,25}^2 x^4$$

$$85. 5 \log_2 (x^2 - 49) + \log_{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{x-7}{x+7} \right) \leq -8 - 0,5 \log_2^2 (x-7)^2$$

$$86. 6 \log_2 (x^2 - 36) + \log_{\sqrt[6]{2}} \left(\frac{x-6}{x+6} \right) \geq -10 - 0,5 \log_2^2 (x-6)^2$$

$$87. \log_4^2 x + \sqrt{(\log_{0,25} x + 4)^2} \geq 2 \log_{0,25} x$$

$$88. \log_{0,5} x \left(\sqrt{(\log_{0,5} x + 4)^2} + 4 \right)^{-1} \geq 0,5$$

$$89. \sqrt{\frac{x-2}{14-x}} + \sqrt{\frac{14-x}{x-2}} \leq \frac{10\sqrt{x-7}}{x-6+3\sqrt{x-7}}$$

$$90. 2\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{x^2-x^4} - 1 + 2x \geq 2\sqrt{2}.$$

3. Неравенства. Методы доказательства неравенств.

Занятие 1;2

1. Неравенства
2. Доказательство неравенств с помощью определений.
3. Синтетический метод доказательства неравенств
4. Доказательство неравенств методом от противного

Занятие 3;4

5. Доказательство неравенств методом математической индукции
6. Доказательство неравенств более общего вида используя различные методы

Рассмотрим **ключевые задачи** (неравенства), при доказательстве которых более ярко можно показать использование основных методов доказательства неравенств.

Доказательство неравенств с помощью определений

По определению считается, что $a > b$, если разность $a - b$ – положительное число. Поэтому для доказательства неравенства

$f(a, b, c, \dots, k) > g(a, b, c, \dots, k)$ на заданном множестве значений $a, b, c, \dots, k$ необходимо составить разность $f(a, b, c, \dots, k) - g(a, b, c, \dots, k)$ и убедиться в том что она положительна при заданных значениях $a, b, c, \dots, k$ (аналогично применяется этот способ для доказательств неравенств вида $(f < g, f \geq g, f \leq g)$)

Ключевая задача 1

Докажем, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd \quad (1)$$

Доказательство. Составим разность $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd$ и выясним ее знак. Имеем $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd =$

$$= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (c^4 - 2c^2d^2 + d^4) + 2a^2b^2 - 4abcd + 2c^2d^2 =$$

$$= (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2. \text{ Ясно, что выражение}$$

$(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2$ неотрицательно при любых неотрицательных значениях a, b, c, d . Значит, и разность

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd$ неотрицательна, а это значит, что неравенство (1) справедливо. Отметим, что знак равенства имеет место лишь при $a = b = c = d$

Синтетический метод доказательства неравенств

Суть этого метода заключается в том, что с помощью ряда преобразований доказываемое неравенство выводят из некоторых известных

(опорных) неравенств. В качестве опорных неравенств могут использоваться, например, такие неравенства: а) $a^{2n} \geq 0$; б) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$;

в) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, где $ab > 0$; г) $ax^2 + dx + c > 0$, где $b^2 - 4ac < 0, a > 0$.

Ключевая задача 2

Докажем, что если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, то

$$(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16 \quad (2)$$

Доказательство. 1-й способ. Возьмем в качестве опорных неравенств следующие неравенства

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2; \frac{a}{d} + \frac{d}{a} \geq 2; \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2; \frac{b}{d} + \frac{d}{b} \geq 2; \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \geq 2.$$

Сложив их, получим $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{d} + \frac{d}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \geq 12$

$$\frac{a+b+c+d}{a} + \frac{a+b+c+d}{b} + \frac{a+b+c+d}{c} + \frac{a+b+c+d}{d} \geq 16.$$

Выносим за скобки сумму $a+b+c+d$, получим:

$$(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16.$$

Знак равенства имеет место лишь в случае, когда $a=b=c=d$.

2-й способ. Неравенство $(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$ можно доказать по определению.

Имеем $(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) - 16 =$

$$= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 1 + \frac{a}{d} + \frac{d}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 1 + \frac{b}{d} + \frac{d}{b} + 1 + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} - 16 =$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 + \frac{a}{d} + \frac{d}{a} - 2 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 + \frac{b}{d} + \frac{d}{b} - 2 + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} - 2 =$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)^2}{ac} + \frac{(a-d)^2}{ad} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(b-d)^2}{bd} + \frac{(c-d)^2}{cd} \geq 0 \text{ очевидное}$$

неравенство. Значит неравенство (2) справедливо.

Ключевая задача 3

Докажем, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a+b+c=7$, то

$$\sqrt{2a+3b+4c+1} + \sqrt{3a+4b+2c+2} + \sqrt{4a+2b+3c+3} < 36 \quad (3)$$

Доказательство. Возьмем в качестве опорного

неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$, тогда имеем:

$$\sqrt{(2a+3b+4c+1) \cdot 1} \leq \frac{2a+3b+4c+1+1}{2};$$

$$\sqrt{(3a+4b+2c+2) \cdot 1} \leq \frac{3a+4b+2c+2+1}{2};$$

$$\sqrt{(4a+2b+3c+3) \cdot 1} \leq \frac{4a+2b+3c+3+1}{2}$$

Складываем полученные неравенства и получим

$$\sqrt{2a+3b+4c+1} + \sqrt{3a+4b+2c+2} + \sqrt{4a+2b+3c+3} < \frac{9a+9b+9c+6+3}{2}$$

Так как $a+b+c=7$, тогда после преобразований имеем:

$$\sqrt{2a+3b+4c+1} + \sqrt{2a+3b+4c+2} + \sqrt{4a+2b+3c+3} < \frac{9 \cdot 7 + 6 + 3}{2}$$

$$\sqrt{2a+3b+4c+1} + \sqrt{2a+3b+4c+2} + \sqrt{4a+2b+3c+3} < 36$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство неравенств методом от противного.

При доказательстве неравенств методом от противного предполагается противное утверждение (отрицание). Выполняя равносильные преобразования, приходим к неравенству, которое противоречит очевидным неравенствам, и, следовательно, исходное неравенство справедливо.

Ключевая задача 4

Докажем, что $a^6 + b^6 \geq \frac{1}{32}$, если $a+b=1$ (3)

Доказательство. Нам нужно доказать, неравенство (3).

Предположим противное (отрицание), что если $a+b=1$, то справедливо

неравенство $a^6 + b^6 < \frac{1}{32}$.

Заметим, что если $a+b=1$, то $(a+b)^6 = 1^6$;

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 = 1;$$

Выполнив ряд равносильных преобразований:

$$32a^6 + 32b^6 < a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6;$$

$$31a^6 + 31b^6 - 6a^5b - 15a^4b^2 - 20a^3b^3 - 15a^2b^4 - 6ab^5 < 0;$$

$$30a^6 + 30b^6 - 30a^4b^2 - 30a^2b^4 + (a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6) < 0;$$

$$(30a^6 - 30a^4b^2) + (30b^6 - 30a^2b^4) + (a-b)^6 < 0;$$

$$30a^4(a^2 - b^2) - 30b^4(a^2 - b^2) + (a-b)^6 < 0;$$

$$30(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) + (a-b)^6 < 0;$$

$$30(a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2) + (a-b)^6 < 0;$$

получили неравенство, в котором левая часть принимает только неотрицательные значения. Таким образом, пришли к противоречию. Следовательно, неравенство $a^6 + b^6 \geq \frac{1}{32}$ справедливо, если $a+b=1$, что и требовалось доказать.

Доказательство неравенств, используя свойства транзитивности неравенства.

Пусть требуется доказать на области M неравенство $A < C$. Если известно или уже доказано, что на области M справедливы неравенства $A < B$, $B < C$, или неравенства $A < B$, $B \leq C$ или неравенства $A \leq B$, $B < C$, то по свойству транзитивности неравенства будет справедливо и исходное неравенство.

Ключевая задача 5

Докажем следующее неравенство

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 \quad (4)$$

на множестве $M = \{(n) | n \in N\}$.

Доказательство.

Для $n=1$ неравенство (4) очевидное. Рассмотрим любое натуральное $n \geq 2$. Каждое слагаемое начиная со второго заменим на большее

$$\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{(k+1) \cdot (k+1)} < \frac{1}{(k+1)k}, \text{ где } 2 \leq k \leq n+1.$$

Таким образом имеем справедливое неравенство $A_n < B_n$, где

$$A_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \text{ и } B_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$$

Следует заметить, что неравенство $A_n < B_n$ является строгим при любом натуральном $n \geq 2$.

Алгебраическое выражение B_n можно упростить, если каждое слагаемое начиная со второго заменить алгебраической суммой

$$\frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}. \text{ Получим}$$

$$B_n = \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Неравенство $B_n < 2$ является, как легко заметить, справедливым для любого натурального n . Следовательно, по свойству транзитивности неравенств имеем $A_n < 2$, что и требовалось доказать.

Доказательство неравенств методом математической индукции.

Доказательство по методу математической индукции проводится следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется при $n=1$ (или для наименьшего значения n , если указаны ограничения для n слева). Эта часть доказательства называют *базисом* индукции. Следующую часть доказательства называют *индукционным шагом*. В этой части доказывают справедливость неравенства для $n=k+1$ в предположении справедливости утверждения для $n=k$ (предположение индукции)

Ключевая задача 6

Доказать, что если $n \in N$, то

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3^n - 1} > \frac{n}{3}. \quad (5)$$

Доказательство. Выражение, содержащиеся в левой части

неравенства (5), представляют сумму дробей знаменатели которых – натуральные числа от 1 до $3^n - 1$. При $n=1$ оно обращается в верное числовое неравенство $1 > \frac{1}{3}$.

Предположим, что неравенство (5) выполняется при $n = k$.

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3^k - 1} > \frac{k}{3}.$$

Докажем, что тогда неравенство (5) справедливо и при $n = k + 1$ т.е.

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3^{k+1} - 1} > \frac{k+1}{3}.$$

В самом деле,

$$S_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{3^k - 1}\right) + \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^k + 1} + \frac{1}{3^k + 2} + \dots + \frac{1}{3^{k+1} - 1}\right) = S_k + Q_k,$$

где $Q_k = \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^k + 1} + \frac{1}{3^k + 2} + \dots + \frac{1}{3^{k+1} - 1}$.

Выражение Q_k представляет сумму 3^k дробей, каждая из которых больше, чем $\frac{1}{3^{k+1}}$. Значит,

$$Q_k = \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^k + 1} + \frac{1}{3^k + 2} + \dots + \frac{1}{3^{k+1} - 1} > \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} + \dots + \frac{1}{3^{k+1}} = 3^k \cdot \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}.$$

Итак, $S_k > \frac{k}{3}$, $Q_k > \frac{1}{3}$. Но тогда

$$S_{k+1} = S_k + Q_k > \frac{k}{3} + \frac{1}{3} = \frac{k+1}{3}, \text{ т.е. } S_{k+1} > \frac{k+1}{3}.$$

На основании математической индукции заключаем, что неравенство (5) справедливо для всех $n \in N$.

Доказать неравенства

1. $a^4 + b^4 \geq ab^3 + ba^3$
2. $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$, если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$
3. $1,5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq ab + ac + ad + bc + bd + cd$
4. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$
5. $a^8 - a + \frac{3}{4} > 0$
6. $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$, если $a + b + c = 1, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
7. $a^4 + b^4 \geq 32$, если $a + b = 2$
8. $a(1+b) + b(1+c) + c(1+a) \geq 6\sqrt{abc}$, если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
9. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \geq \frac{25}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}$, если $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_5 > 0$.
10. $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$.

11. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10}} \geq 2\sqrt{10} - 1$
12. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$, если $a > 0, b > 0$.
13. $\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$
14. $\frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$, если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$..
15. $(1+a)(1+b)(a+c)(b+c) \geq 16abc$, если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
16. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} > \frac{3}{a+b+c}$ если $a > 0, b > 0, c > 0$.
17. $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$
18. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 16$, если $a+b+c+d=8$.
19. $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} < 4$, если $a+b+c=1$.
20. $\sqrt{6a+1} + \sqrt{6b+1} + \sqrt{6c+1} < 9$, если $a+b+c=2$.
21. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{6^n - 1} > \frac{n}{6}$.
22. $3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$
23. $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\left(\frac{1}{d}-1\right) \geq 16$, если $a+b+c+d=1$, если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
24. $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[3]{5} < 2$ (n – радикалов).
25. $a^{2^n} - a + \frac{n}{4} > 0$, ($n > 1$)
26. $a^{2^n} + b^{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^n-1}}$, если $a+b=1$.
27. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} + \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}$ если $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$.
28. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n} - 1$
29. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
30. $\sqrt[n]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}$, если $a > 0, b > 0$.
31. $\sqrt[n]{a-b} > \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ если $a > b > 0, n \geq 2$.
32. $2\sqrt{a} + n\sqrt[n]{b} \geq (n+2)\sqrt[n+2]{ab}$, если $a > 0, b > 0$.

33. $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$ 34. $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$, если $n \geq 2$.
35. $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$, если $n \geq 2$. 36. $a^{4n} + b^{4n} + c^{4n} + d^{4n} \geq 4(abcd)^n$
37. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8^{n+2}-1} > \frac{n+2}{8}$
38. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2$
39. $\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\left(\frac{1}{x_3}-1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n}-1\right) \geq 2^n$, если $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$,
 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$
40. $\sqrt{2na+2n-1} + \sqrt{2nb+2n-1} + \sqrt{2nc+2n-1} < n^2$, если $a+b+c=n-3$.
41. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$
42. $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$, если $n \geq 2$.
43. Доказать неравенство Коши $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$,
 если $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_n > 0$.
44. Доказать неравенство Бернулли $(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$. $\varepsilon > -1, n \geq 2$.
45. Доказать неравенство Непера $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.
46. Доказать неравенство Коши-Буняковского
 $n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2$, если $x_i \in R$.
47. $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \dots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$.
48. $2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \dots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$
49. $\sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}} < 1$, если $n \geq 2$
50. $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$, если
 $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ – среднее гармоническое положительных
 чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$;
 $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ – среднее геометрическое неотрицательных чисел
 $a_1, a_2, \dots, a_n$;
 $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ – среднее арифметическое неотрицательных чисел
 $a_1, a_2, \dots, a_n$;

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} - \text{среднее квадратическое неотрицательных чисел } a_1, a_2, \dots, a_n.$$

4. Поисково-исследовательские задачи

Решить поисково-исследовательскую задачу

а) Доказать неравенство $\frac{4k^2}{9} \left(1 - \frac{9(xy + xz + yz)}{k^2} \right) \geq \left(x - \frac{k}{3} \right)^2$, если

$$x + y + z = k, \quad k \in N;$$

б) Доказать неравенство $\frac{9k^2}{16} \left(1 - \frac{16(xy + xz + xt + yz + yt + zt)}{6k^2} \right) \geq \left(x - \frac{k}{4} \right)^2$, если

$$x + y + z + t = k, \quad k \in N.$$

Доказать неравенство более общего вида.

1. Постановка проблемы

Найти зависимость между параметрами c , b и d , при которой неравенство

$$c \left(1 - \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n}{b} \right) \geq (x_1 - d)^2 \text{ справедливо,}$$

если $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k, \quad k \in N$.

2. Сбор фактического материала (решение частных задач)

а). Доказать неравенство

$$\frac{4k^2}{9} \left(1 - \frac{3(xy + xz + yz)}{k^2} \right) \geq \left(x - \frac{k}{3} \right)^2, \quad (1)$$

если $x + y + z = k$.

Доказательство

$$x + y + z = k \Rightarrow x = k - y - z,$$

$$\frac{4k^2}{9} - \frac{4(xy + xz + yz)}{3} \geq \left(k - y - z - \frac{k}{3} \right)^2, \quad \frac{4k^2}{9} - \frac{4(k - y - z)(y + z) + 4yz}{3} \geq \left(\frac{2k}{3} - y - z \right)^2,$$

$$\frac{4k^2}{9} - \frac{4ky}{3} - \frac{4kz}{3} + \frac{4y^2}{3} + \frac{8yz}{3} + \frac{4z^2}{3} - \frac{4yz}{3} - \frac{4k^2}{9} - y^2 - z^2 + \frac{4ky}{3} + \frac{4kz}{3} - 2yz \geq 0,$$

$$\frac{y^2}{3} - \frac{2yz}{3} + \frac{z^2}{3} \geq 0, \quad y^2 - 2yz + z^2 \geq 0, \quad (y - z)^2 \geq 0 - \text{очевидное неравенство,}$$

следовательно, неравенство (1) истинно.

б) Доказательство неравенства

$$\frac{9k^2}{16} \left(1 - \frac{16(xy + xz + xt + yz + yt + zt)}{6k^2} \right) \geq \left(x - \frac{k}{4} \right)^2 \quad (2),$$

если $x + y + z + t = k$

$$\left(\frac{3k}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{xy + xz + xt + yz + yt + zt}{6\left(\frac{k}{4}\right)^2}\right) \geq \left(x - \frac{k}{4}\right)^2 \text{ если } x + y + z + t = k$$

Доказательство:

$x + y + z + t = k \Rightarrow x = k - y - z - t$ подставим вместо x .

$$\begin{aligned} \frac{9k^2}{16} - \frac{3}{2}((k - y - z - t)y + (k - y - z - t)z + (k - y - z - t)t + yz + yt + zt) &\geq \left(\frac{3}{4}k - y - z - t\right)^2 \\ \frac{9k^2}{16} - \frac{3}{2}(ky - y^2 - yz - yt + kz - yz - z^2 - zt + kt - yt - zt - t^2 + yz + yt + zt) &\geq \frac{9k^2}{16} + y^2 + z^2 + \\ + t^2 + 2yz + 2yt + 2zt - \frac{3}{2}ky - \frac{3}{2}kz - \frac{3}{2}kt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9k^2}{16} - \frac{3}{2}ky - \frac{3}{2}kz - \frac{3}{2}kt + \frac{3}{2}yz + \frac{3}{2}yt + \frac{3}{2}zt + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{2}t^2 &\geq \frac{9k^2}{16} + y^2 + z^2 + t^2 + 2yz + 2yt + \\ + 2zt - \frac{3}{2}ky - \frac{3}{2}kz - \frac{3}{2}kt, \end{aligned}$$

$$2y^2 + 2z^2 + 2t^2 - 2yz - 2yt - 2zt \geq 0,$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}yz - \frac{1}{2}yt - \frac{1}{2}zt \geq 0,$$

$$(y^2 - 2yz + z^2) + (y^2 - 2yt + t^2) + (z^2 - 2zt + t^2) \geq 0,$$

$(y - z)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2 \geq 0$ – очевидное неравенство, следовательно, неравенство (2) истинно.

в) Доказать неравенство (дополнительная частная задача)

$$16\left(1 - \frac{xy + xz + xt + xv + yz + yt + yv + zt + zv + tv}{10}\right) \geq (x - 1)^2 \quad (3),$$

если $x + y + z + t + v = 5$

Доказательство:

$x + y + z + t + v = 5 \Rightarrow x = 5 - y - z - t - v$ вместо x подставим в левую и правую части выражение $5 - y - z - t - v$.

$$\begin{aligned} 16\left(1 - \frac{(5 - y - z - t - v)y + (5 - y - z - t - v)z + (5 - y - z - t - v)t + (5 - y - z - t - v)v + \right. \\ \left. + yz + yt + yv + zt + zv + tv}{10}\right) \geq (4 - y - z - t - v)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 - 8 \frac{(5y - y^2 - yz - yt - yv + 5z - yz - z^2 - zt - zv + 5t - yt - zt - tv - t^2 + 5v - yv - zv - \\ - tv - v^2 + yz + yt + yv + zt + zv + tv)}{5} \geq 16 - 8y - 8z - 8t - 8v + 2yz + 2yt + 2yv + 2zt + 2zv + \\ + 2tv + y^2 + z^2 + t^2 + v^2 \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части неравенства на 5.

$$80 - 40y - 40z - 40t - 40v + 8y^2 + 8z^2 + 8t^2 + 8v^2 + 8yz + 8yt + 8yv + 8zt + 8zv + 8tv \geq$$

$$\geq 80 - 40y - 40z - 40t - 40v + 10yz + 10yt + 10yv + 10zt + 10zv + 10tv + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2 + 5v^2$$

Выполнив ряд равносильных преобразований, получим:

$$3y^2 + 3z^2 + 3t^2 + 3v^2 - 2yz - 2yt - 2yv - 2zt - 2zv - 2tv \geq 0$$

$$y^2 - 2yz + z^2 + y^2 - 2yt + t^2 + y^2 - 2yv + v^2 + z^2 - 2zt + t^2 + z^2 - 2zv + v^2 + t^2 - 2vt + v^2 \geq 0$$

Получим сумму полных квадратов:

$$(y - z)^2 + (y - t)^2 + (y - v)^2 + (z - t)^2 + (z - v)^2 + (t - v)^2 \geq 0 - \text{очевидное}$$

неравенство, следовательно, неравенство (3) истинно.

3. Систематизация и анализ полученных результатов

Количество слагаемых	Значение суммы	Количество попарных произведений	Параметр c	Параметр d	Параметр b
3	k	3	$\frac{(2k)^2}{3^2}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{3k^2}{3^2}$
4	k	6	$\frac{(3k)^2}{4^2}$	$\frac{k}{4}$	$6\left(\frac{k}{4}\right)^2$
5	5	10	$(5-1)^2$	$\frac{5}{5}$	$10 \cdot 1^2$
	.	.	.	.	.
n	k	$\frac{n^2 - n}{2}$	$\left(k - \frac{k}{n}\right)^2$	$\frac{k}{n}$	$\frac{n^2 - n}{2} \left(\frac{k}{n}\right)^2$

Лемма

Неравенство $c \left(1 - \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n}{b} \right) \geq (x_1 - d)^2$ справедливо,

если $c = \left(k - \frac{k}{n}\right)$, $b = \frac{n^2 - n}{2} \left(\frac{k}{n}\right)^2$, $d = \frac{k}{n}$, $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$,

$n \geq 3$, $n \in N$, $k \in N$.

4. Докажем неравенство

$$\left(k - \frac{k}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n}{\left(\frac{n^2 - n}{2}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right) \geq \left(x_1 - \frac{k}{n}\right)^2 \quad (4)$$

если $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$

Доказательство: Сначала выполним несколько равносильных преобразований.

$$k^2 \left(\frac{(n-1)^2}{n^2} \right) \left(1 - \frac{x_1(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n) + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n}{\left(\frac{n^2 - n}{2} \right) \frac{k^2}{n^2}} \right) \geq \left(k - (x_2 + x_3 + \dots + x_n) - \frac{k}{n} \right)^2$$

Пусть $x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = y$

$$k^2 \frac{(n-1)^2}{n^2} - \left(k^2 \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) \left(\frac{2n^2}{n(n-1)k^2} \right) \left(\frac{(k-y)y + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n}{1} \right) \geq \frac{k^2(n-1)^2}{n^2} - 2 \frac{k(n-1)}{n} y + y^2$$

$$- \frac{2(n-1)(ky - y^2) + (2n-1)(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n)}{n} + 2 \frac{k(n-1)}{n} y - y^2 \geq 0,$$

$$- 2(n-1)ky + 2(n-1)y^2 - 2(n-1)(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n) + 2k(n-1)y - y^2 n \geq 0,$$

$$y^2(2n-2-n) - 2(n-1)(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n) \geq 0,$$

$$y^2(n-2) - 2(n-1)(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n) \geq 0.$$

Докажем методом полной математической индукции:

Проверим при $n = 3$.

$$(x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \geq 0,$$

$$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 4x_3x_4 \geq 0,$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_2 - x_4)^2 \geq 0 \text{ -очевидное неравенство.}$$

Допустим, что при $n = m$, неравенство

$$(m-2)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_m)^2 \geq 2(m-2)(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_mx_{m+1}) \text{ справедливо.}$$

Докажем, что при $n = m+1$ неравенство

$$(m-1)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_m + x_{m+1})^2 \geq 2m(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_mx_{m+1}) \text{ справедливо.}$$

Доказательство:

$$(m-1)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_m + x_{m+1})^2 \geq 2(m-1)(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_mx_{m+1}) + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + \dots + 2x_mx_{m+1},$$

$$(m-1)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_m + x_{m+1})^2 \geq 2(m-2)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_m)^2 + 2(m-1)(x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_mx_{m+1}) + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + \dots + 2x_mx_{m+1},$$

$$(m-2)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{m+1})^2 + (x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{m+1})^2 - (m-2)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_m)^2 \geq$$

$$\geq (m-2)(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{m+1})^2.$$

Пусть $x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_m = z$, тогда, выполнив несколько равносильных преобразований, получим:

$$(2m-4-2m+2)zx_{m+1} + (m-2)x_{m+1}^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{m+1}^2 \geq 0,$$

$$-2zx_{m+1} + (m-2)x_{m+1}^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{m+1}^2 \geq 0,$$

$$(m-1) \begin{cases} (x_{m+1} - x_2)^2, \\ (x_{m+1} - x_3)^2, \\ (x_{m+1} - x_4)^2, \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ (x_{m+1} - x_m)^2 \end{cases}$$

$(x_{m+1} - x_2)^2 + (x_{m+1} - x_3)^2 + (x_{m+1} - x_4)^2 + \dots + (x_{m+1} - x_m)^2 \geq 0$ – очевидное неравенство, следовательно, неравенство (4) истинно.

5. Вывод

Неравенство

$$c \left(1 - \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n}{b} \right) \geq (x_1 - d)^2 \text{ истинно,}$$

$$\text{если } c = \left(k - \frac{k}{n} \right), \quad b = \frac{n^2 - n}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^2, \quad d = \frac{k}{n}, \quad x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$$

$$n \geq 3, \quad n \in N, \quad k \in N.$$

Нетрудно увидеть зависимость между параметрами c , b и d : $c = k - d$

$$b = \frac{n^2 - n}{2} (d)^2; \quad b = \frac{n^2 - n}{2} (k - c)^2$$

Задачи для самостоятельного решения

Решите поисково-исследовательские задачи

91. а) Докажите, что $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 \geq \frac{25}{2}$,
($\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$).

б) При каких значениях параметра a неравенство

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^{2n} + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{2n} \geq a \quad (n \in N) \text{ справедливо?}$$

92. а) Докажите, что $\sin^8 x + \cos^8 x \geq \frac{1}{128}$;

б) Докажите, что $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x \geq \frac{1}{2^{2n-1}} \quad (n \in N)$.

в) При каких значениях параметра a неравенство $\sin^{2n} x + \cos^{2m} x \geq a$ ($n, m \in N$) справедливо?

93. а) Докажите, что $\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \geq \frac{3}{4}$

б) При каких значениях параметра a неравенство $\sin^{4n} x + \sin^{2n} x \cos^{2n} x + \cos^{4n} x \geq a$ ($n \in N$) справедливо?

в) При каких значениях параметра a неравенство $\sin^{4m} x + \sin^{2m} x \cos^{2n} x + \cos^{4n} x \geq a$ ($n, m \in N$) справедливо?

94. а) Докажите, что

$$(\sin x + \cos x + 1)^2 + (\sin x + \cos x + 2)^2 + (\sin x + \cos x + 3)^2 \geq 20 - 12\sqrt{2}$$

б) При каких значениях параметра a неравенство

$$(\sin x + \cos x + 1)^2 + (\sin x + \cos x + 2)^2 + (\sin x + \cos x + 3)^2 + \dots + (\sin x + \cos x + n)^2 \geq a$$

($n \in N$) справедливо?

в) При каких значениях параметра a неравенство

$$(\sin x + \cos x + 1)^{2k} + (\sin x + \cos x + 2)^{2k} + (\sin x + \cos x + 3)^{2k} + \dots + (\sin x + \cos x + n)^{2k} \geq a$$

($n, k \in N$) справедливо?

95. а) Докажите, что $\sin^4 x \cos^4 x - \sin x \cos x + \frac{7}{16} \geq 0$

б) При каких значениях параметра a

$$\sin^{2n} x \cos^{2n} x - \sin x \cos x - 1 > a$$

($n \in N$) справедливо?

в) При каких значениях параметра a

$$\sin^{2^n} x \cos^{2^n} x - \sin x \cos x - 1 > a$$

($n \in N$) справедливо?

96. а) Докажите, что $(tg x + ctg x)^2 + (tg^2 x + ctg^2 x)^2 + (tg^3 x + ctg^3 x)^2 \geq 12$

б) При каких значениях параметра a

$$(tg x + ctg x)^{2n} + (tg^2 x + ctg^2 x)^{2n} + (tg^3 x + ctg^3 x)^{2n} \geq a$$

($n \in N$) справедливо?

в) При каких значениях параметра a неравенство

$$(tg x + ctg x)^{2n} + (tg^2 x + ctg^2 x)^{2n} + (tg^3 x + ctg^3 x)^{2n} + \dots + (tg^k x + ctg^k x)^{2n} \geq a$$

($n, k \in N$) справедливо?

97. а) Докажите, что $\sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{x_2 + 2} + \sqrt{x_3 + 3} < \frac{35}{8}$, если

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha$$

б) При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{x_2 + 2} + \sqrt{x_3 + 3} + \dots + \sqrt{x_n + n} < a$$

справедливо, если $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-2} \alpha$ ($n \in N$) ?

Ответы

51. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 52. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 53. $-3; 1; 5$. 54. $-4; 4$.
55. $0,75; 1$. 56. 10 . 57. $\frac{5}{8}$. 58. $-12; -8; 4$. 59. $5; 13; 17$.
60. $-0,5; 0,5; 2,5; 3,5$. 61. 5 . 62. -3 . 63. 12 . 64. $\pm 1; \pm 3; \pm 5$.
65. $1; 5; 7$. 66. $3 + 6n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$. 67. -4 . 68. $2; -14$.
69. $2; 6$. 70. $2; 10$. 71. $[1,5; 2) \cup (2; 2,5]$. 72. $[2; 3) \cup (3; 4]$. 73. $(2; 5]$.
74. $(2; 5]$. 75. 3 . 76. -2 . 77. $[-\log_{2,5} 10; 4]$. 78. $(-\infty; -\log_3 12] \cup [5; +\infty)$.
79. 6 . 80. $[2; 6]$. 81. $\left[-5; \frac{20}{3}\right]$. 82. $[-6; 10,5]$. 83. $[-16; -2]$. 84. $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]$.
85. $\left[7\frac{1}{16}; 7\frac{1}{2}\right]$. 86. $(-\infty; -6) \cup \left(6; 6\frac{1}{12}\right] \cup \left[6\frac{1}{2}; \infty\right)$. 87. $(0; \infty)$.
88. $\left(0; (0,5)^{\frac{8}{3}}\right]$. 89. 8 . 90. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Список литературы

и использование источников

1. Вольпер Е.Е. Задачи по математике Ч.1: Уравнения и неравенства / ОМИПКРО; Школа-лицей №66. – Омск, 1998. – 64с.
2. Воробьев В.В. Практикум по подготовке к ЕГЭ по математике: практические рекомендации для выпускников 11 классов» -Омск. Изд-во ОмГПУ, 2010. – 84с.
3. Далингер В.А. Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике. Нестандартные уравнения и неравенства и методы их решения. Учеб. пособие – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1995.
4. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект –Центр, 2007.
5. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. –М.: Национальное образование, 2010.
6. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 10 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2010.
7. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011.
8. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011.
9. Жафяров А.Ж. Математика ЕГЭ. Решение задач уровня С1. – Новосибирск Сиб. унив. изд-во, 2010. – 203с
10. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2011: Математика /авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2011. – (Федеральный институт педагогических измерений).
11. Титаренко А.М. Форсированный курс подготовки к экзамену по математике Практикум: 5770 задач: Учебное пособие: – Изд-во Эксмо, 2005. – 336с.
12. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.

Воробьёв Василий Васильевич

**«Практикум по математике: неравенства,
задачи С1 и С3 ЕГЭ и поисково-
исследовательские»**
/для учащихся 10-11 классов/