Захаров В.С.

Сборник задач по стереометрии для подготовки к ЕГЭ

Екатеринбург 2012

Введение

Данное методическое пособие состоит из 8 уроков, охватывающих все задания по стереометрии, которые встречаются в задании С2.

У данной книги есть преимущества по сравнению с обычным репетитором. Важным моментом является то, что решения всех задач пособия есть в видео формате. С ними Вы можете ознакомиться на сайте . Кроме того, данная книга всегда у Вас под рукой и вы можете заниматься в любое удобное время. Это приводит к тому, что Вам не надо осваивать материал за жестко отведенный промежуток времени и вы можете вернуться к необходимому материалу неоднократно.

Приятным моментом является то, что Вам совершенно не надо знать метод сечений, чтобы решать задачи. Все задачи решаются с помощью координатно-векторного способа. К каждому типу задач приведен свой алгоритм.

Как работать с пособием? Все очень просто. Все уроки устроены одинаково. Сначала идет теоретическая справка, состоящая из напоминания основных фактов, теорем и формул, а также алгоритмов решения задач. Прежде всего, Вы должны хорошо освоить эту часть урока.

Когда Вы заучите вводную часть, переходите к практической части. Попытайтесь решать задачи самостоятельно и только если Вы попробовали все способы и все равно не смогли ее решить, посмотрите урок с моим решением. Постарайтесь понять весь ход решения и воспроизвести его самостоятельно. Старайтесь оформлять задачи также как и я.

В конце урока дается домашнее задание. Не переходите к следующему уроку пока не решите домашнее задание и не получите за него положительную оценку.

Как выставлять себе оценку? Если задача решена абсолютно верно, что означает верный ответ, верный рисунок и все выкладки, то ставьте себе отметку +. Если есть незначительная ошибка, т.е.

-арифметическая ошибка, повлиявшая на менее, чем треть ответа, или

-пропущено доказательство одного из свойств в геометрической задаче при верном ответе, или

-пропущено рассмотрение случая, который мог повлиять на ответ, но не повлиял,

то поставьте себе оценку $\pm$(плюс-минус).

Если ход решения правильный, но из за ошибок по невнимательности получено менее $\frac{2}{3}$, но не менее половины правильного ответа, или

- если найдена основная идея, упрощающая геометрическую задачу, или

-не доказано главное свойство, упрощающее задачу, но с его использованием получен правильный ответ,

То поставьте оценку $\mp$ (минус − плюс).

Оценка за урок и за домашнее задание выставляется стандартным образом. Это означает, что

-если у Вас 90% чистых плюсов (в число которых можно включить два плюс – минуса), Вы ставите себе 5.

-если у Вас 75% чистых плюсов (в число которых можно включить два плюс-минуса), то оценка 4.

-если у Вас 50% чистых плюсов, то оценка 3.

-все остальное 2.

Занятие 1. Расстояние от точки до прямой

Теоретическая справка

Блок 1. Основные сведения

Определение. Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Алгоритм.

1. Выбрать на данной прямой две точки и соединить их с третьей точкой, от которой нужно найти расстояние.

2. Вычислить длины сторон треугольника.

3. Выяснить каким является данный треугольник (остроугольный, тупоугольный или прямоугольный).

4. Используя теорему косинусов найти высоту.

Примечание. Пусть с-наибольшая сторона треугольника АВС, тогда если

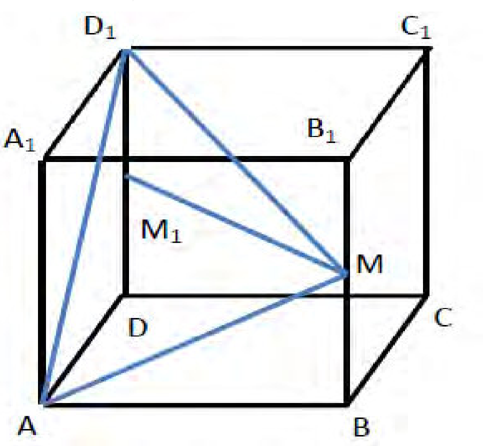
а) $a^2 + b^2 = c^2$, то треугольник прямоугольный

b) $a^2 + b^2 < c^2$, то треугольник прямоугольный

c) $a^2 + b^2 > c^2$, то треугольник остроугольный.

Пример. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$найдите расстояние от точки А до прямой D_1M, где М- середина ребра BB_1.

Решение.



1. Соединим точку А с точками D_1 и М. Вычислим стороны треугольника AD_1M.

2. Найдем АМ из треугольника АВМ.

$AM=\sqrt{AB^2+MB^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

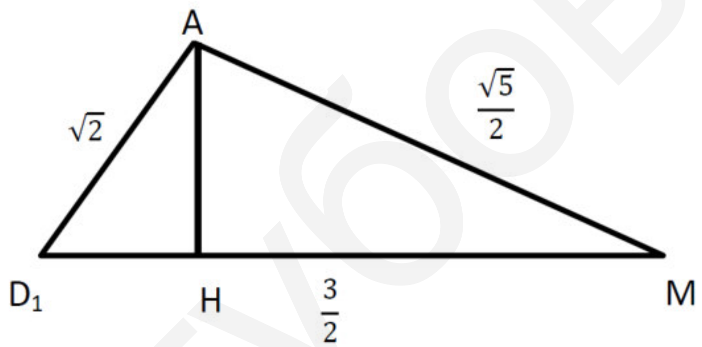
3. Найдем AD_1 из треугольника ADD_1.

$AD_1=\sqrt{AD^2+DD_1^2}=\sqrt{2}$.

4. Чтобы найти D_1M, проведем отрезок MM_1, параллельный BD. Треугольник D_1M_1M- прямоугольный, $MM_1=\sqrt{2}$, $D_1M_1=\frac{1}{2}$. Тогда $D_1M=\frac{3}{2}$.

5. Необходимо определить вид треугольника AD_1M. Так как $D_1M^2<AM^2+D_1A^2$, то треугольник остроугольный.

6.



$$\cos\angle AMD_1=\frac{AM^2+D_1M^2-AD_1^2}{2\cdot AM\cdot MD_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\angle AMD_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AH=AM\cdot\sin\angle AMD_1=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=1.$$

Ответ. АН=1.

Задачи

Задача 1.

Треугольник ABC – равнобедренный, AB=AC=b, BC= a. Найдите высоту AH.

Задача 2.

Треугольник ABC- равнобедренный, AC = BC= a, AB= c. Найдите высоту AH.

Задача 3.

Треугольник ABC –произвольный. AB= c, AC=b, BC= a. Найдите AH.

Задача 4.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямых:

a) B_1C_1 b) B_1D_1 c) A_1C.

Задача 5.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$найдите расстояние от точки D_1 до прямой PQ , где P и Q – середины ребер A_1B_1 и BC.

Задача 6.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямых: a) B_1C_1 b) BC_1.

Задача 7.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$высота равна 2, сторона основания равна 1. Найти расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

Задача 8.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до прямых:

a) BC b) D_1E_1 c) C_1D_1 d) B_1C_1 e) BE_1 f) BC_1.

Домашнее задание

Задача 1.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямых:

a) BD   b) BD_1.

Задача 2.

На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P. Считая ребро куба равным a, найти расстояние от точки A_1 до прямой C_1P в том случае когда отношение AP:AD равно 3:4.

Задача 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до прямых:

a) DC b) E_1F_1 c) BF_1 d) CE_1.

Задача 4.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$высота равна 1, сторона основания равна 2. Найти расстояние от точки A до прямой BC_1.

Задача 5.

Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ромб ABCD,   в котором AB=10, AC=$6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.

Задача 6.

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние отточи C до прямой SA.

***Занятие* 2**. Расстояние от точки до прямой

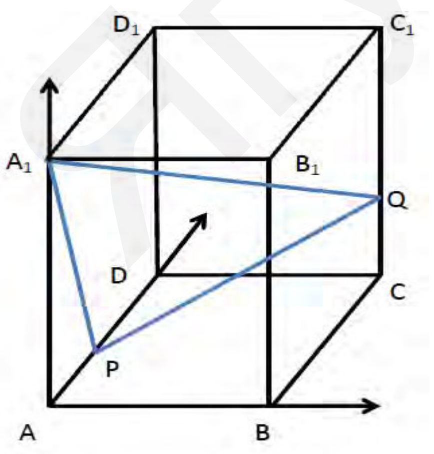
<u>Теоретическая справка</u>

Блок 2. Алгоритм координатного метода расчета
1. Ввести прямоугольную систему координат.
2. Выбрать на данной прямой две точки и соединить их с третьей точкой, от которой нужно найти расстояние.
3. Составить координаты вершин получившегося треугольника.
4. Вычислить длины сторон треугольника.
5. Выяснить каким является данный треугольник (остроугольный, тупоугольный или прямоугольный).
6. Используя теорему косинусов найти высоту.

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$. отношение ребер $AA_1:AB:AD=1:2:3$. На ребрах AD и CC_1 взяты соответственно точки P и Q, такие, что $AP:AD=1:3$, $CQ:CC_1=1:2$. Считая $AA_1=a$, найдите расстояние от точки A_1 до прямой PQ.

Решение.

1. Введем прямоугольную систему координат.



2. Найдем координаты точек P, Q и A.

AP:AD=1:3, значит AP=a. Координаты точки P(0;a;0).

CQ:CC_1=1:2, значит CQ=$\frac{a}{2}$. Координаты точки Q(2a;3a; $\frac{a}{2}$).

A_1(0;0;a).

3. Вычислим длины сторон треугольника A_1PQ, используя формулу

$\rho=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

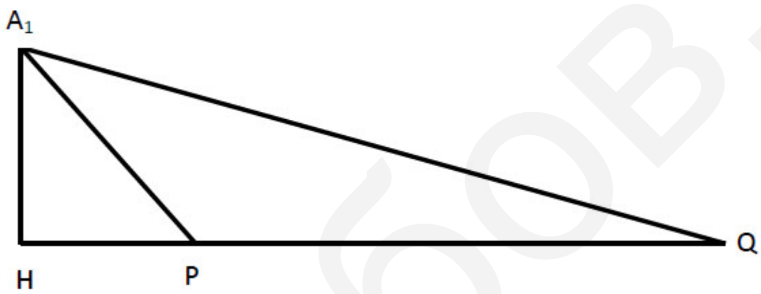
$A_1P=a\sqrt{2}$

$A_1Q=\frac{a\sqrt{53}}{2}$

$PQ=\frac{a\sqrt{33}}{2}$

4. Так как $\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{33}}{2}\right)^2<\frac{53a^2}{5}$, то треугольник тупоугольный.

5. Найдем требуемое расстояние из треугольника A_1PQ.



По теореме косинусов

$$cosA_1QP=\frac{\frac{53a^2}{4}+\frac{33a^2}{4}-2a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{53}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{33}}{2}}=\frac{39}{\sqrt{53}\sqrt{33}}$$

Из основного тригонометрического тождества находим синус

$sinA_1QP=\frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{53}\sqrt{11}}$

6. Из прямоугольного треугольника A_1HQ найдем A_1H

$A_1H=A_1Q\cdot sinA_1QP=\frac{a\sqrt{209}}{11}$.

Ответ. $\frac{a\sqrt{209}}{11}$.

Задачи

Задача 1.

Точки P и Q- середины соответственно ребер A_1B_1 и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от прямой PQ до точки D_1.

Задача 2.

На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от вершины A_1 до прямой C_1P, если AP:AD=3:4.

Задача 3.

В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре CC_1 взята точка P- середина этого ребра. Считая AB=a, AA_1=3a, найдите расстояние от точки D_1 до прямой B_1P.

Задача 4.

Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. Считая сторону основания равной a, найдите расстояние отточки P, взятой на ребре BB_1, до прямой AC_1, если BP:BB_1=1:4.

Задача 5.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом C, а ее боковое ребро равно меньшей стороне основания. В грани AA_1CC_1 взята точка O- центроид этой грани. Считая AC= a, найдите расстояние от точки A_1до прямой BO.

Задача 6.

В основании пирамиды MABCD лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. На ребре MA взята точка P- середина этого ребра. Считая AB= a, найдите расстояние от O- центроида основания, до прямой CP.

Задача 7.

В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник с отношением сторон AB:AD=1:2. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания, и

MB=AB. На ребрах AM и BC взяты точки P и Q- середины этих ребер. Считая AB=a, найдите расстояние от прямой PQ до точки M.

Домашнее задание

Задача 1.

Точки P и Q- середины соответственно ребер A_1B_1 и BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от прямой PQ до точки C_1.

Задача 2.

На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от вершины A_1 до прямой C_1P, если AP:AD=1:4.

Задача 3.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:1$ на ребре CC_1 взята точка P- середина этого ребра. Считая AB= a, найдите расстояние от точки A_1 до прямой DP.

Задача 4.

На ребрах AD и A_1B_1 правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которой $AB:AA_1=1:2$, взяты соответственно точки P и M- середины этих ребер, а на ребре CC_1 взята точка Q. Считая AB= a, найдите расстояние от точки M до прямой PQ, если $CQ:CC_1=3:4$.

Задача 5.

Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания. Считая сторону основания равной a, найдите расстояние отточки P, взятой на ребре BB_1, до прямой AC_1, если $BP:BB_1=3:4$.

Задача 6.

Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. На ребрах BB_1 и AC взяты соответственно точки P и Q-середины этих ребер. Считая AB=a, найдите расстояние от точки C_1 до прямой PQ.

Задача 7.

В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с углом при вершине A, равным 60^0. Боковое ребро параллелепипеда равно стороне основания. На ребре B_1C_1 взята точка P- середина этого ребра. Считая AB=a, найдите расстояние от точки A_1 до прямой PD.

Задача 8.

В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник с отношением сторон AB:AD=1:2. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания, и MB=AB. На ребрах AM и BC взяты точки P и Q- середины этих ребер. Считая AB=a, найдите расстояние от прямой PQ до точки C.

Задача 9.

В основании пирамиды MABCD лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. На ребре MA взята точка P- середина этого ребра. Считая AB= a, найдите расстояние от точки A до прямой CP.

Занятие 3. Расстояние от точки до плоскости

Теоретическая справка

Блок 3. Уравнение плоскости

1. Уравнение вида Ax+By+Cz+D=0 называется общим уравнением плоскости. Коэффициенты A, B, C имеют простой геометрический смысл: вектор {A;B;C} перпендикулярен плоскости Ax+By+Cz+D=0. Этот вектор называют вектором нормали или нормалью.

2. Пусть в пространстве задана плоскость Q, точка $M(x_0;y_0;z_0)$ принадлежит данной плоскости и вектор $\vec{n}=${A;B;C} перпендикулярен данной плоскости. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

3. Пример. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной вектору {2;5;7} и проходящей через точку M(3;-4:1}.

Решение.

2(x-3)+5(y+4)+7(z-1)=0

2x+5y+7z+7=0.

Блок 4. Основные определения

Определение. Отрезок, для которого указано какой из его концов считать началом, а какой- концом называется вектором.

Если A$(x_1;y_1;z_1)$ -координаты начала вектора, B$(x_2;y_2;z_2)$- координаты конца вектора, тогда вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ имеет координаты:

$\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$

Блок 5. Скалярное произведение

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

2. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{e_1} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\overrightarrow{e_2} = \{x_2; y_2; z_2\}$ равно

$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = x_1x_2 + y_1y + z_1z_2$

3. Косинус угла между ненулевыми векторами $\overrightarrow{e_1} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\overrightarrow{e_2} = \{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$cos\varphi = \frac{|x_1x_2+y_1y+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

Блок 6. Расстояние от точки до плоскости

1. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

2. Пример. Найти расстояние от точки А(1;-1;2) до плоскости 3x-4y+z-1=0.

Решение.

$$d = \frac{|3 * 1 + 4 + 2 - 1|}{\sqrt{9 + 16 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{26}}$$

Блок 7. Алгоритм расчета расстояния от точки до прямой

1. Выбрать два вектора, которые либо лежат в данной плоскости, либо параллельны ей

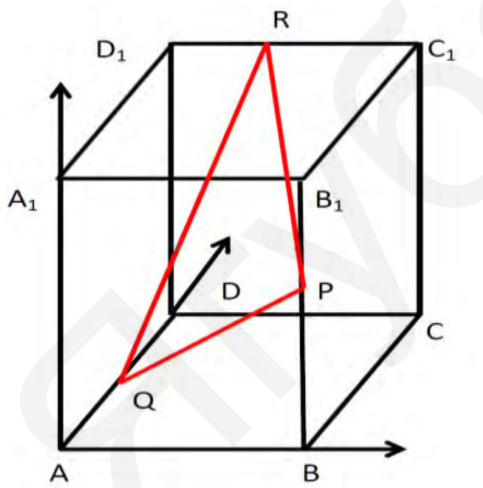
2. Используя скалярное произведение, найдите уравнение нормали к данной плоскости

3. Составить уравнение плоскости перпендикулярной данному вектору, проходящей через точку, принадлежащую данной плоскости

4. Используя формулу $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ найдите искомое расстояние.

Пример. На ребрах BB_1, AD и D_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R- середины этих ребер. Считая ребро куба равным 4, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости PQR.

Решение.



1. Координаты точек P, Q, R:

$P(4; 0; 2), Q(0; 2; 0), R(2; 4; 4)$

2. Координаты векторов

$\overrightarrow{QP} = \{4; -2; 2\}$

$\overrightarrow{QR} = \{-2; 4; 2\}$

3. Найдем координаты вектора нормали $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Так как он перпендикулярен плоскости PQR, то скалярное произведение вектора нормали и векторов $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QR}$ равно нулю.

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4A - 2B + 2C = 0 \\ -2A + 4B + 2C = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2A - B + C = 0 \\ A - 2B - C = 0 \end{cases}$

Эта система уравнений задает бесконечное множество коллинеарных векторов. Поэтому найдем хотя бы один вектор. Положим C=1. Тогда

$\begin{cases} 2A - B + 1 = 0 \\ A - 2B - 1 = 0 \end{cases}$

Тогда B=-1, A=-1.

Получаем вектор нормали $\vec{n} = \{-1; -1; 1\}$

Таким образом уравнение плоскости имеет вид $-x - y + z + D = 0$.

4. Найдем коэффициент D. Так как точка $Q(0; 2; 0)$ принадлежит плоскости PQR, то при подстановке координат точки $Q(0; 2; 0)$ в уравнение плоскости получим верное равенство.

$-2 + D = 0$

$D = 2$

Получаем уравнение плоскости $-x - y + z + 2 = 0$

5. Точка A_1 имеет координаты $A_1(0;0;4)$, тогда расстояние от точки A_1 до плоскости PQR равно

$d = \frac{|-4-2|}{\sqrt{1+1+1}} = 2\sqrt{3}.$

Ответ. $d = 2\sqrt{3}$.

Задачи

Задача 1.

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{2\pi}{3}$

b) $\vec{a} = \{3; -1; 5\}, \vec{b} = \{1; 2; -3\}$

c) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CD}, A(-2; -3; 8), B(2; 1; 7), C(1; 4; 5), D(-7; -4; 7)$.

Задача 2.

Найдите вектор $\vec{c}$ перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{1; 2; -4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 1; 0\}$.

Задача 3.

Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки:

3.1 A(1;3;1) , B(0;1;2), C(3;-1;0)

3.2 A(-1;0;0), B(0;-1;2), C(3;0;0).

Задача 4.

Запишите уравнение плоскости, если она проходит через:

a) точку M(1;3;8) перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{3; 1; 4\}$

b) точку M(3;4;5) перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MB} = \{0; 2; 11\}$

c) точку M(3;8;1) параллельно векторам $\overrightarrow{e_1} = \{3; 1; -1\}$ и $\overrightarrow{e_2} = \{1; -2; 1\}$

Задача 5.

Найдите расстояние от точки A(3;2;1) до плоскости:

a) $3x + y + z + 4 = 0$

b) $-x + y - z - 5 = 0$.

Задача 6.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1 .

Задача 7.

На ребре C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$взята точка P – середина этого ребра. Считая ребро куба равным a , найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BDP.

Задача 8.

На ребрах AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки D до плоскости C_1PQ.

Задача 9.

На ребрах DD_1 и C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:1$ взяты соответственно точки P и Q - середины этих ребер. Считая AB=a, найдите расстояние до плоскости APQ от точки C_1.

Домашнее задание

Задача 1.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскостей:

a) BB_1D_1; b) BCD_1; c) CDA_1; d) BC_1D; e) BA_1C_1.

Задача 2.

На ребре C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$взята точка P – середина этого ребра. Считая ребро куба равным a , найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDP.

Задача 3.

На ребрах AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от точки C до плоскости C_1PQ.

Задача 4.

На ребрах CC_1, AD, AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$взяты соответственно точки P,Q,R – середины этих ребер. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние от плоскости PQR до точки C.

Задача 5.

На ребрах DD_1 и C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:1$ взяты соответственно точки P и Q -

середины этих ребер. Считая AB=a, найдите расстояние до плоскости APQ от точки A_1.

Занятие 4. Угол между скрещивающимися прямыми

Теоретическая справка

Блок 7. Алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми

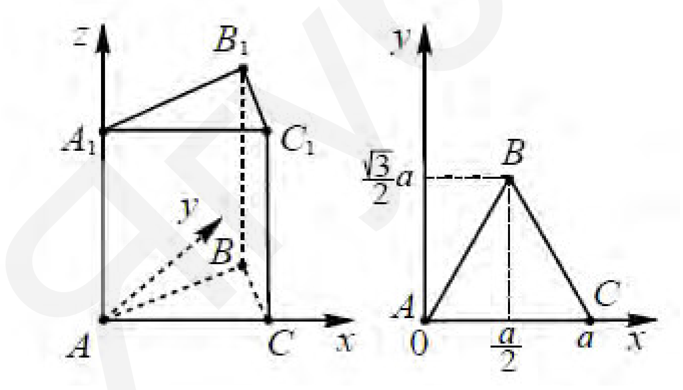
1. Выбрать систему координат

2. Выбрать две точки на каждой прямой и составить направляющие векторы $\overrightarrow{e_1} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\overrightarrow{e_2} = \{x_2; y_2; z_2\}$

3. Рассчитать угол по формуле $cos\varphi = \frac{|x_1x_2+y_1y+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

Блок 8. Правильная треугольная призма

Сторона основания a, высота b.

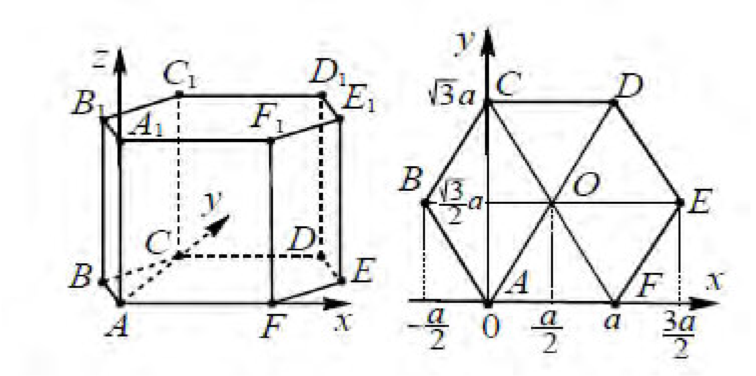


A(0;0;0), B$\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, C(a;0;0),

A_1(0;0;b), $B_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right)$, C_1(a;0;b).

Блок 9. Правильная шестиугольная призма

Сторона основания a, высота b.



A(0;0;0), B$\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, C$\left(0;a\sqrt{3};0\right)$,

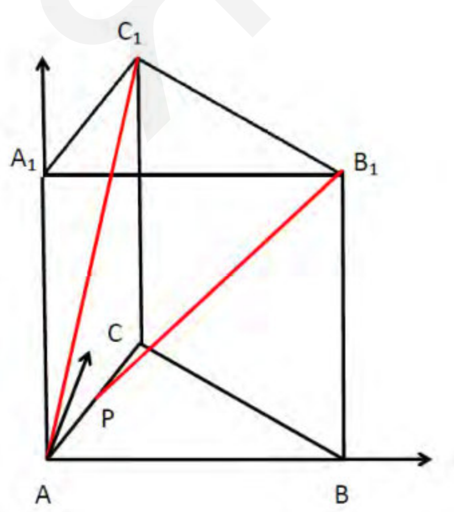
D$\left(a;a\sqrt{3};0\right)$, E$\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, F(a;0;0),

A_1(0;0;b), $B_1\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right)$, $C_1\left(0;a\sqrt{3};b\right)$,

$D_1\left(a;a\sqrt{3};b\right)$, $E_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right)$, F_1(a;0;b).

Пример. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с отношением ребер $AB:AA_1=1:\sqrt{3}$ точка P-середина ребра AC. Найдите угол, который образует прямая B_1P с прямой AC_1.

Решение.



1. Чтобы найти угол между этими прямыми, необходимо найти координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{PB_1}$.

2. Найдем координаты P. Точка P- середина отрезка AC. Поэтому найдем координаты концов этого отрезка и воспользуемся формулой координат середины отрезка.

$C\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

$A(0;0;0)$

Значит $P\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$.

3. Так как $P\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$ и $B_1\left(a;0;a\sqrt{3}\right)$, то

$\overrightarrow{PB_1}=\left\{\frac{3a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};a\sqrt{3}\right\}$.

4. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AC_1}$

$A(0;0;0)$

$C_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{AC_1}=\left\{\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right\}$.

5. Воспользуемся формулой из блока 7

$$cos\alpha=\frac{\left|\frac{3a^2}{8}-\frac{3a^2}{8}+3a^2\right|}{\sqrt{\frac{9a^2}{16}+\frac{3a^2}{16}+3a^2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}+3a^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$\alpha=arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$

Ответ. $\alpha=arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задачи

Задача 1.

На ребрах AA_1, CD и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q, R-середины этих ребер. Найдите угол, который образует прямая PQ с прямой DR.

Задача 2.

На ребре CC_1 правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P, такая что $CP:CC_1=1:4$. Отношение ребер призмы $AB:AA_1=1:2$. Найдите угол, который образует прямая B_1D с прямой A_1P.

Задача 3.

На ребрах AD и BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:2$ взяты соответственно точки P и Q-середины этих ребер. Найдите угол, который образует прямая PQ с прямой AC_1.

Задача 4.

Точка P- середина ребра CD- прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в его основании лежит ромб, угол BAD которого равен 60^0, и $AA_1=AB$. Найдите угол между прямой B_1C и PC_1.

Задача 5.

Точки P и Q-середины соответственно ребер A_1B_1 и AC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AA_1=AB$. Найдите угол между прямыми A_1Q и AP.

Задача 6.

На ребрах B_1C_1, AC и A_1B_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AC=BC=AA_1$ и $\angle ACB=90^0$, взяты соответственно точки P, Q, R- середины этих ребер. Найдите угол между прямыми PQ и BR.

Задача 7.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и CA_1.

Домашнее задание

Задача 1.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC.

Задача 2.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C.

Задача 3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

Задача 4.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

Задача 5.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1.

Задача 6.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BD_1.

Задача 7.

На ребрах AA_1, CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q,- середины этих ребер. Найдите угол, который образует прямая PQ с прямой B_1D.

Задача 8.

На ребре CC_1 правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P, такая что $CP:CC_1=1:2$. Отношение ребер призмы $AB:AA_1=1:2$. Найдите угол, который образует прямая B_1D с прямой A_1P.

Задача 9.

Точки K и M –середины соответственно ребер AA_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол, который образует прямая C_1M с прямой CK.

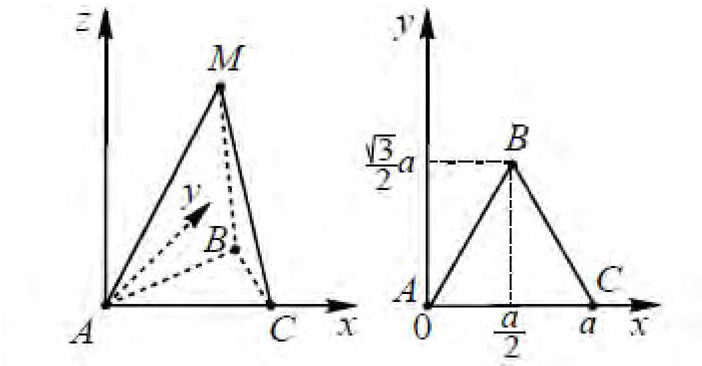
Задача 10.

Точка Q-середина ребра AC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой AA_1=AB. Найдите угол между прямыми BD и A_1Q.

***Занятие 5*.** Расстояние от точки до плоскости

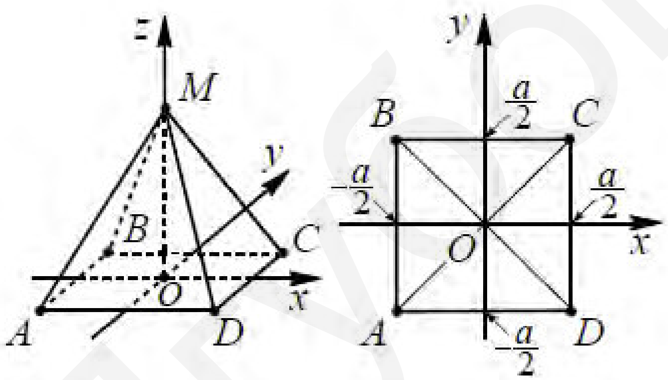
<u>Теоретическая справка</u>

Блок 10. Правильная треугольная пирамида



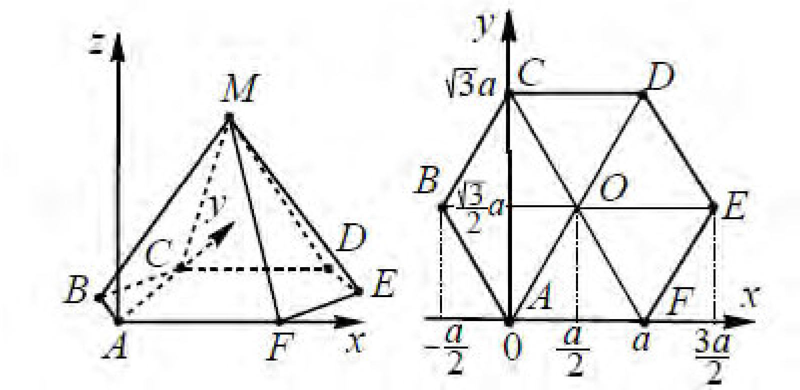
A(0;0;0), B$\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, C(a;0;0), M$\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{6},h\right)$.

Блок 11. Правильная четырехугольная пирамида



A$\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$, B$\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$, C$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$, D$\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$, M(0,0,h).

Блок 12. Правильная шестиугольная пирамида

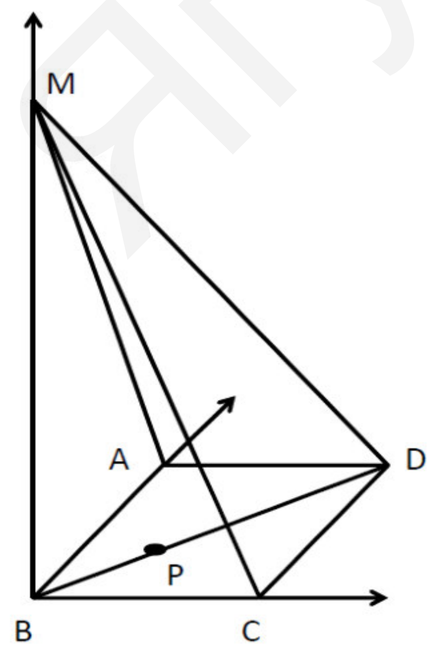


A(0;0;0), B$\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, C$\left(0;a\sqrt{3};0\right)$,

D$\left(a;a\sqrt{3};0\right)$, E$\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, F(a;0;0), M$\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$.

Пример. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник, боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания, и AB:AD:MB=1:2:1. Считая AB=a, найдите расстояние от точки P, взятой на диагонали BD, до плоскости MCD , если BP:BD=1:4.

Решение.



1. Найдем координаты точки P. Для этого воспользуемся формулой деления отрезка в данном отношении. Так как $D(2a; a; 0)$ и $B(0; 0; 0)$, то координаты точки P равны

$$x = \frac{0+\frac{1}{3}\cdot 2a}{1+\frac{1}{3}} = \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{0+\frac{1}{3}\cdot 2a}{1+\frac{1}{3}} = \frac{a}{4}$$

$$z = 0$$

$$P\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{4}; 0\right).$$

2. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$

$M(0; 0; a)$ $C(2a; 0; 0)$ $D(2a; a; 0)$

$$\overrightarrow{MC} = \{2a; 0; -a\}$$

$$\overrightarrow{MD} = \{2a; a; -a\}$$

3. Пусть $\vec{n} = \{A; B; C\}$- вектор нормали, тогда скалярное произведение вектора нормали и векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$ равно нулю.

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{MC} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MD} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2aA - aC = 0 \\ 2aA + aB - aC = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A - C = 0 \\ 2A + B - C = 0 \end{cases}$$

Найдем хотя бы одно решение данной системы. Пусть $A = 1$, тогда $\text{C} = 2$ и $B = 0$.

Координаты вектора нормали $\vec{n} = \{1; 0; 2\}$, значит, уравнение плоскости имеет вид $x + 2z + D = 0$. Так как точка $M(0; 0; a)$ принадлежит плоскости MCD,то при подстановке координат точки $M(0; 0; a)$ в уравнение плоскости, получим верное равенство.

$$2a + D = 0$$

$$D = -2a.$$

Уравнение плоскости $x + 2z - 2a = 0$.

4. Точка P имеет координаты $P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};0\right)$, а уравнение плоскости имеет вид $x+2z-2a=0$, поэтому расстояние равно

$$d=\frac{\left|\frac{a}{2}-2a\right|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}a}{10}.$$

Ответ. $d=\frac{3\sqrt{5}a}{10}.$

Задачи

Задачи 1.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскостей a) BCA_1; b) A_1B_1C.

Задача 2.

На ребрах CC_1 и AA_1правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AB:AA_1=1:2$, взяты соответственно точки P и K- середины этих ребер. Считая AB= a, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости, проходящей через точку K параллельно прямым AC_1 и BP.

Задача 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстоние от точки A до плоскостей: a) A_1B_1C; b) E_1D_1C.

Задача 4.

В правильной четырехуголной пирамиде ABCD , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от середины ребра BC до плоскости SCD.

Задача 5.

В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и MC=AC=BC. На ребре MB взята точка K-середина этого ребра. Считая MC=a, найдите расстоние от точки M до плоскости, проходящей через прямую CK параллельно прямой MA.

Домашнее задание

Задача 1.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB:AD:AA_1=1:2:1$. На ребрах AD и CC_1 взяты соответственно точки P и Q- середины этих ребер. Считая $AB=a$, найдите расстояние от точки D_1 до плоскости, проходящей через вершину A_1 параллельно прямым PQ и B_1C.

Задача 2.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB:AD:AA_1=2:4:1$. На ребрах AD, A_1B_1 и B_1C_1 взяты соответственно точки P, Q и K-середины этих ребер. Считая $AA_1=a$, найдите расстояние от точки C_1 до плоскости, проходящей через точку K параллельно прямым CP и AQ.

Задача 3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1PB_1, где P- середина ребра CC_1.

Задача 4.

В правильной шестиугольной призме $A…F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстоние от точки A до плоскостей: a) BCC_1; b) A_1B_1D; c) F_1C_1D.

Задача 5.

На ребрах CC_1 и AA_1правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AB:AA_1=1:2$, взяты соответственно точки P и K- середины этих ребер. Считая $AB= a$, найдите расстояние от точки C_1 до плоскости, проходящей через точку K параллельно прямым AC_1 и BP.

Задача 6.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. На ребрах AC, CC_1, BB_1 и A_1B_1 взяты соответственно точки P,Q,R и K- середины этих ребер. Считая $AC=AA_1=a$, найдите расстояние от точки C до плоскости, проходящей через точку K параллельно прямым PQ и BP.

Задача 7.

В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и MC=AC=BC. На ребре MB взята точка K-середина этого ребра. Считая MC=a, найдите расстоние от точки B до плоскости, проходящей через прямую CK параллельно прямой MA.

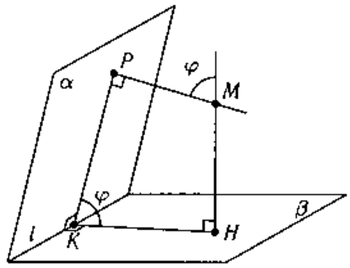
Задача 8.

Основанием пирамиды MABC является правильный треугольник, ее бковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания, и MC=AB. Считая AB=a, найдите расстояние до плоскости, проходящей через вершину A перпендикулярно ребру MB, от точки P, взятой на ребре MA, в том случае, когда отношение MP:MA=1:4.

Занятие 6. Угол между двумя плоскостями

Теоретическая справка

Блок 13. Угол между двумя плоскостями



Теорема. Угол между двумя плоскостями равен углу между двумя прямыми, одна из которых перпендикулярна первой плоскости, другая- второй.

Блок 14. Угол между двумя плоскостями

Пусть нам известны уравнения двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_1y + C_2z + D_2 = 0$, векторы $\overrightarrow{n_1} = \{A_1; B_1;\ C_1\}$ и $\overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2;\ C_2\}$ перпендикулярны соответствующим плоскостям и угол между ними будет равен углу между плоскостями. Этот угол можно вычислить по формуле

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Блок 15. Алгоритм нахождения угла между плоскостями

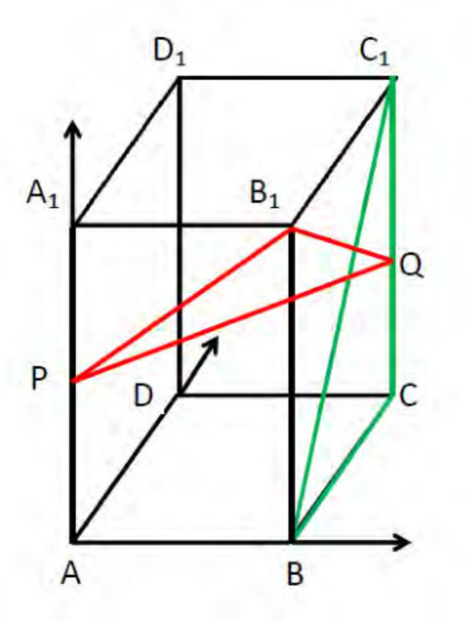
1. Ввести систему координат

2. Найти векторы нормалей к данным плоскостям

3. Найти угол, используя формулу $cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:1$ точки P и Q- середины соответственно ребер AA_1 и CC_1. Найдите угол, который образует плоскость B_1QP с плоскостью DCC_1.

Решение.



Угол между плоскостями равен углу между нормалями, проведенными к данным плоскостям. Поэтому, необходимо найти нормали к плоскостям B_1QP и DCC_1.

1. Составим уравнение нормали к плоскости B_1QP

$P(0;0;a)$

$B_1(2a;0;2a)$

$Q(2a;4a;a)$

$\overrightarrow{PB_1} = \{2a;0;a\}$

$\overrightarrow{PQ} = \{2a;4a;0\}$

Пусть $\vec{n} = \{A;B:C\}$- вектор нормали, тогда скалярное произведение вектора нормали и векторов $\overrightarrow{PB_1}$ и $\overrightarrow{PQ}$ равно нулю

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB_1} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2aA + aC = 0 \\ 2aA + 4aB = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2A + C = 0 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$

Данная система задает бесконечное множество коллинеарных векторов. Но нам надо найти хотя бы один вектор. Пусть $A = 2$, тогда $C = -2$ и $B = -1$.

Поэтому уравнение нормали имеет вид $\vec{n} = \{2; -1; -4\}$

2. Составим уравнение нормали к плоскости BCC_1

$B(2a; 0; 0)$

$C(2a; 4a; 0)$

$C_1(2a; 4a; 2a)$

$\overrightarrow{BC} = \{0; 4a; 0\}$

$\overrightarrow{BC_1} = \{0; 4a; 2a\}$

Пусть $\vec{n} = \{A; B: C\}$- вектор нормали, тогда скалярное произведение вектора нормали и векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ равно нулю

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4aB = 0 \\ 4aB + 2aC = 0 \end{cases}$$

Данная система задает бесконечное множество коллинеарных векторов. Но нам надо найти хотя бы один вектор. Одним из решений является тройка чисел $A = 1, B = 0, C = 0$.

Поэтому уравнение нормали имеет вид $\vec{n} = \{1; 0; 0\}$

3. Найдем угол между этими векторами, используя формулу блока 15

$$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+16}\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\alpha = arccos\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Ответ. $\alpha = arccos\frac{2\sqrt{21}}{21}$.

Задачи

Задача 1.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями:

a) ABC и BC_1D b) ABC_1 и BB_1D_1 c) BC_1D и BA_1D.

Задача 2.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACB_1 и A_1C_1B.

Задача 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BDF_1.

Задача 4.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1.

Задача 5.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром а через точки M на ребре BB_1 и N на ребре DD_1 такие, что $BM = \frac{3a}{4}$ и $DN = \frac{a}{4}$, параллельно AC проведена секущая плоскость. Определите угол между этой плоскостью и плоскостью основания ABC.

Домашнее задание

Задача 1.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями:

a) ABC и AB_1D_1 b) BC_1D_1 и BA_1D.

Задача 2.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$найти угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F-середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Задача 3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями:

a) ABC и A_1B_1C b) ABC и ACB_1.

Задача 4.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями:

a) ACC_1 и DEE_1 b) ABC и BCD_1 c) ABC и BDE d) CDF_1 и AFD_1 e) BCD_1 и AFE_1.

Задача 5.

На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка К-середина данного ребра. Найдите угол, который образует плоскость BDK с плоскостью AB_1D_1.

Задача 6.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах BB_1 и CC_1 взяты соответственно точки P и Q-середины данных ребер. Найти угол, который образует плоскость ACP плоскостью B_1D_1Q.

Задача 7.

На ребре куба CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K такая, что $CK:CC_1=1:4$. Найдите угол между плоскостью BDK и B_1D_1K.

Задача 8.

В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AA_1=2:3$ точка K-середина CC_1. Найти угол, который образует плоскость AB_1K и ABC.

Занятие 7. Угол между прямой и плоскостью

<u>Теоретическая справка</u>

Блок 14. Формула угла между прямой и плоскостью

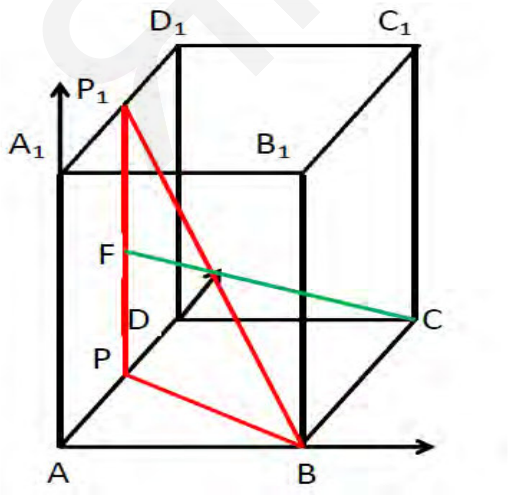
Пусть дана плоскость Ax+By+Cz+D=0 и вектор $\vec{l} = \{M; N; L\}$, параллельный данной прямой, тогда угол можно рассчитать по формуле $sin\varphi = \frac{|AM+BN+CL|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{M^2+N^2+L^2}}$.

Блок 15. Алгоритм расчета угла между прямой и плоскостью

1. Ввести систему координат
2. Находим вектор нормали к данной плоскости
3. Находим вектор параллельный данной прямой
4. Рассчитать угол по формуле $sin\varphi = \frac{|AM+BN+CL|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{M^2+N^2+L^2}}$

Пример. На ребрах AD и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и P_1 –середины этих ребер, а на отрезке PP_1 взята точка F- середина этого отрезка. Найдите угол между плоскостью BPP_1 и прямой CF.

Решение.



Пусть ребро куба равно $2a$.

1.Найдем вектор нормали к плоскости P_1PB.

$P(0; a; 0)$

$P_1(0; a; 2a)$

$B(2a; 0; 0)$

$\overrightarrow{PP_1} = \{0; 0; 2a\}$

$\overrightarrow{PB} = \{2a; -a; 0\}$

Пусть $\vec{n} = \{A; B: C\}$- вектор нормали, тогда скалярное произведение вектора нормали и векторов $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{PB}$ равно нулю

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PP_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2aC = 0 \\ 2aA - aB = 0 \end{cases}$$

Одним из решений системы является тройка чисел $A = 1, B = 2, C = 0$.

Тогда вектор нормали имеет вид $\vec{n} = \{1; 2; 0\}$

2. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{CF}$

$C(2a; 2a; 0)$

$F(0; a; a)$

$\overrightarrow{CF} = \{-2a; -a; a\}$

3. Найдем угол между плоскостью P_1PB и вектором $\overrightarrow{CF}$, используя формулу блока 15

$$sin\alpha = \frac{|-2a-2a|}{\sqrt{1+4}\sqrt{4a^2+a^2+a^2}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$$

$$\alpha = arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

Ответ. $\alpha = arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

Задачи

Задача 1.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между: a) прямой AB_1 и плоскостью BC_1D; b) прямой AC_1 и плоскостью BB_1D_1.

Задача 2.

На ребер CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P- середина этого ребра. Найдите угол между прямой C_1P и плоскостью AA_1CC_1.

Задача 3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью A_1BC_1.

Задача 4.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.

Задача 5.

В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник, а ее ребро MB перпендикулярно плоскости основания. На ребре AB точки P - середина этого ребра. Отношение ребер пирамиды AB:AD:MB=1:2:1. Найдите угол, который образует плоскость MCD и прямая MP.

Задача 6.

Высота MO правильной пирамиды MABC равна стороне ее основания. Найдите угол, который образует прямая MC с плоскостью MAB.

Домашнее задание

Задача 1.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Задача 2.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

Задача 3.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BA_1D.

Задача 4.

На ребер CC_1 правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, взята точка P такая, что $CP:CC_1=3:4$, а на ребре CD точка K- середина этого ребра. Найдите угол, который образует плоскость AA_1K и прямая DP.

Задача 5.

На ребер CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P- середина этого ребра. Найдите угол между прямой C_1D и плоскостью AA_1CC_1.

Задача 6.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA и плоскостью AB_1C_1.

Задача 7.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Задача 8.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABD_1.

Задача 9.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BDE_1.

Задача 10.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ADE_1.

Задача 11.

В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник, а ее ребро MB перпендикулярно плоскости основания. Отношение ребер пирамиды

AB:AD:MB=1:2:1. Найдите угол, который образует плоскость MCD и прямая MA.

Занятие 8. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Теоретическая справка

Блок 16. Основные определения

1. Если прямая параллельна плоскости, то все точки данной прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.

2. Если две прямые скрещивающиеся, то через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.

Блок 17. Алгоритм расчета расстояния между скрещивающимися прямыми

1. Найдите плоскость, проходящую через одну прямую параллельно первой

2. Составьте уравнение данной плоскости Ax+By+Cz+D=0

3. Выберете произвольную точку M$(x_0; y_0; z_0)$ на второй прямой

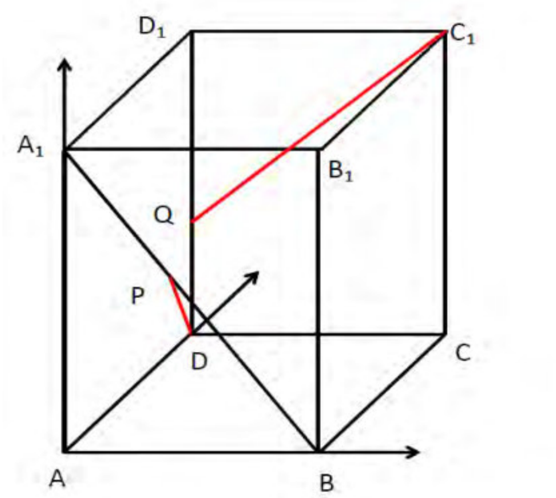
4. Рассчитайте расстояние от точки M до плоскости Ax+By+Cz+D=0 по формуле

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Пример. На ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка Q такая, что

$DQ: DD_1=2:3$, а на диагонали A_1B взята точка P- середина A_1B. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние между прямой DP и прямой C_1Q.

Решение.



1. Найдем уравнение плоскости, проходящей через прямую DP и параллельно прямой QC_1. Для этого найдем координаты векторов $\overrightarrow{DP}$ и $\overrightarrow{QC_1}$.

Так как $P\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $D(0;a;0)$, то $\overrightarrow{DP}=\left\{\frac{a}{2};-a;\frac{a}{2}\right\}$

Так как $Q\left(0;a;\frac{2a}{3}\right)$, $C_1(a;a;a)$, то $\overrightarrow{QC_1}=\left\{a;0;\frac{a}{3}\right\}$

2. Пусть α- плоскость, проходящая через вектор $\overrightarrow{DP}$ и параллельно вектору $\overrightarrow{QC_1}$ и вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$- вектор нормали к данной плоскости. Тогда скалярное произведение вектора нормали и векторов $\overrightarrow{QC_1}$, $\overrightarrow{DP}$ равно нулю.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{QC_1}=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{a}{2}A-aB+\frac{a}{2}C=0\\ aA+\frac{a}{3}C=0\end{cases}\quad \begin{cases}A-2B+C=0\\ 3A+C=0\end{cases}$$

Нам достаточно найти только одно решение данной системы. Положим $A=1$, тогда $B=-1, C=-3$. Значит, уравнение плоскости имеет вид $x-y-3z+D=0$. Определим коэффициент D. Так как точка $D(0;a;0)$ принадлежит плоскости α, то при подстановки координат в уравнение плоскости получится верное равенство.

$-a+D=0$

$D=a$

Получаем уравнение плоскости $x-y-3z+a=0$

3. Плоскость $x - y - 3z + a = 0$ параллельна прямой QC_1, а значит все точки данной прямой равноудалены от данной плоскости. Значит, можно найти расстояние от любой точки прямой QC_1. Возьмем точку $C_1(a; a; a)$ и воспользуемся формулой из блока 17

$$d = \frac{|a - a - 3a + a|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{2a\sqrt{11}}{11}$$

Ответ. $d = \frac{2a\sqrt{11}}{11}$.

Задачи

Задача 1.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми:

a) AB_1 и BC_1 b) AB_1 и A_1C_1.

Задача 2.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 1 и боковым ребром 2, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.

Задача 3.

На ребер CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка Q- середина этого ребра. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние между прямой B_1D_1 и прямой DQ.

Задача 4.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=AA_1=a$, $AD=2a$. На ребрах CC_1 и AD взяты соответственно точки P и Q такие, что $CP:CC_1=AQ:AD=1:3$. Найдите расстояние от прямой B_1C_1 до прямой PQ.

Задача 5.

На ребрах CD и B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q- середины этих ребер. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние между прямыми B_1D и PQ.

Задача 6.

Все ребра прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a. На ее ребре CC_1 взята точка Q- середина этого ребра. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BQ.

Задача 7.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Домашнее задание

Задача 1.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.

Задача 2.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.

Задача 3.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Задача 4.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и CF_1.

Задача 5.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.

Задача 6.

На ребрах CC_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки Q и R- середины этих ребер. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние между прямой B_1D_1 и прямой DR.

Задача 7.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=AA_1=a$, $AD=2a$. На ребре CC_1 взята соответственно точка P такая, что $CP:CC_1=1:3$, а на ребре AB взята точка V – середина ребра. Найдите расстояние от прямой B_1C_1 до прямой PV.

Задача 8.

Все ребра прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a. На ее ребре AA_1 взята точка P- середина этого ребра. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CP.

Задача 9.

На ребрах B_1C_1 и AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки Q и R- середины этих ребер. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние между прямыми B_1D и QR.

Задачи по всем темам

Задача 1.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.

Задача 2.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1D_1.

Задача 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки F_1 до прямой AC.

Задача 4.

Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - ромб ABCD, в котором AB=10, AC=$6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.

Задача 5.

В тетраэдре ABCD, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину ребра CD.

Задача 6.

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равна 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SF.

Задача 7.

На ребрах A_1B_1, AD и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1$=1:2:1 взяты соответственно точки P, Q и R- середины этих ребер. Считая AB=1, найдите расстояние до прямой PQ от точки R.

Задача 8.

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до плоскости BDC_1.

Задача 9.

Дан правильный тетраэдр ABCD с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC.

Задача 10.

В правильной четырехугольной пирамиде PABCD с вершиной P сторона основания равна 3, высота 2. Найдите расстояние от вершины A до плоскости PCD.

Задача 11.

На ребрах AA_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q- середины этих ребер. Считая ребро куба равным 1, найдите расстояние от точки D до плоскости B_1PQ.

Задача 12.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом C и отношением катетов BC:AC=1:2. Боковое ребро призмы равно гипотенузе треугольника ABC. На ребре AA_1 призмы взята точка P- середина этого ребра. Считая BC=1, найдите расстояние от точки B_1 до плоскости BC_1P.

Задача 13.

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найдите угол между прямыми CA_1 и AB_1.

Задача 14.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота этой призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

Задача 15.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G-середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BC_1.

Задача 16.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точки G и H- середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH.

Задача 17.

В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник ABC. Ребро MA перпендикулярно плоскости основания, и MA=AC=BC. На ребрах MA и MB взяты соответственно точки D и E –середины этих ребер. Найдите угол между прямой BD и CE.

Задача 18.

В основании пирамиды MABCD лежит квадрат ABCD. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания, и MB=AB. На ребре MC взята точка P- середина этого ребра. Найдите угол, который образует прямая DP с прямой MA.

Задача 19.

На диагонали B_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P и Q, такие, что $DP=PQ=QB_1$. Найдите угол, который образует прямая C_1P с прямой A_1Q.

Задача 20.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D.

Задача 21.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BAD_1.

Задача 22.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостью A_1BD и плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1.

Задача 23.

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями SAD и SBD.

Задача 24.

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.

Задача 25.

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SAD и BCF, где F- середина ребра AS.

Задача 26.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F- середины ребер A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

Задача 27.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра AB=8, AD=6, CC_1=5. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

Задача 28.

В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB:AA_1=3:4$. Найдите угол, который образует плоскость AB_1C с плоскостью A_1B_1C.

Задача 29.

Точка K- середина ребра AC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, боковое ребро которой равно стороне ее основания. Найдите угол, который образуют плоскости BKC_1 и AB_1C_1.

Задача 30.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого $AC=BC=AA_1$. На ребре BB_1 взята точка M- середина этого ребра. Найдите угол который образует плоскость AMC_1 и BCC_1.

Задача 31.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

Задача 32.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E- середина A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

Задача 33.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1=8$, $AB=4$, $BC=4$.

Задача 34.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1=4$, $A_1D_1=6$, $C_1D_1=6$ найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

Задача 35.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

Задача 36.

В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник, у которого AC=BC=a. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания, и MB=a. На ребрах MB, AB, AC и BC взяты соответственно точки K, D, P и Q- середины этих ребер. Найдите расстояние между прямой AK и следующими прямыми : a) PQ; b) CD; c) BC.

Ответы

Занятие 1.

Задачи. **1**. $AH=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$ **2**. $AH=\frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2a}$ **3**. - **4**. a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; c) $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

5. $\frac{\sqrt{174}}{12}$. **6**. a) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **7**. $\frac{\sqrt{95}}{10}$. **8**. a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; b) 2; c) 2; d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; e) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; f) $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Домашнее задание. **1**. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **2**. $a\sqrt{\frac{41}{33}}$. **3**. a) $\sqrt{3}$; b) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; d) $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

4. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$. **5**. 8. **6**. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Занятие 2.

Задачи. **1**. $\frac{a\sqrt{174}}{12}$. **2**. $a\sqrt{\frac{41}{33}}$. **3**. $a\sqrt{\frac{22}{13}}$ **4**. $\frac{5\sqrt{2}a}{8}$. **5**. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **6**. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$. **7**. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Домашнее задание. **1**. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. **2**. $\sqrt{\frac{33}{41}}$. **3**. $\frac{2a\sqrt{30}}{5}$. **4**. $\frac{a\sqrt{1162}}{28}$. **5**. $\frac{5a\sqrt{2}}{8}$. **6**. $\frac{a\sqrt{385}}{14}$.

7. $\frac{a\sqrt{70}}{7}$. **8**. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **9**. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Занятие 3.

Задачи. **1**. a) -6; b) -14; c) -66. **2**. $\left\{\frac{4}{7};\ \frac{12}{7};\ 1\right\}$. **3**. a) 10x+7y-31=0; b) 2y+z=0.

4. a) 3x+y+4z-38=0; b) 3x+2y-6z+13=0; c) x+y+7z-18=0. **5**. a) $\frac{16}{\sqrt{11}}$; b) $\frac{7}{\sqrt{3}}$.

6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **7**. $\frac{a}{3}$. **8**. $\frac{a}{\sqrt{17}}$. **9**. $\frac{2a\sqrt{33}}{33}$.

Домашнее задание. **1**. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2**. a. **3**. $\frac{3a\sqrt{17}}{17}$.

4. $\frac{3a\sqrt{11}}{22}$. **5**. $\frac{4a\sqrt{33}}{33}$.

Занятие 4.

Задачи. **1**. $\arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$. **2**. $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. **3**. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$. **4**. $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

5. $\arccos\frac{7}{10}$. **6**. $\arccos\frac{1}{3}$. **7**. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Домашнее задание. **1**. 90. **2**. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **3**. $\arccos\frac{1}{4}$. **4**. $\arccos\frac{3}{4}$. **5**. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6. $\arccos\frac{5}{8}$. **7**. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **8**. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **9**. $\arccos\frac{4}{9}$. **10**. $\arccos\frac{9}{10}$.

Занятие 5.

Задачи. **1**. a) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; b) $\sqrt{\frac{3}{7}}$. **2**. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **3**. a) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; b) $\sqrt{\frac{3}{7}}$. **4**. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **5**. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Домашнее задание. **1**.$\frac{2a}{3}$ **2**. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **3**. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4**. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b)\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; $c)\,\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **5**. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

6. $\frac{5a}{6}$. **7**. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **8**. $\frac{9a\sqrt{2}}{16}$.

Занятие 6.

Задачи. **1.** $a)$ $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) 60; c) $\arccos\frac{1}{3}$; **2**. $\arccos\frac{1}{7}$. **3**. $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$.

4. $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$. **5**. $\arccos\frac{4}{\sqrt{18}}$.

Домашнее задание. **1**. a) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) 90. **2**. 60. **3**. a) $arctg\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $arctg\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **4**. a) 30; b) $arctg\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$; c) 45; d) 60; e) $\arccos\frac{2}{3}$. **5**. $arccos\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. $\arccos\frac{2}{3}$. **7**. $\arccos\frac{5\sqrt{17}}{51}$. **8**. $arctg\,\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Занятие 7.

Задачи. **1.** a) 0; b) $acsin\,\frac{\sqrt{6}}{3}$. **2**. $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$. **3**. $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$. **4**. $\arcsin\sqrt{\frac{2}{13}}$.

5. $\arcsin\frac{4}{5}$. **6**. $\arcsin\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

Домашнее задание. **1**. 30. **2**. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$. **3**. 90. **4**. $\arcsin\frac{4\sqrt{65}}{65}$. **5**. 30.

6. $arctg\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7**. $\arcsin\frac{\sqrt{42}}{14}$. **8**. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **9**. $\arcsin\frac{3}{4}$. **10**. $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

11. $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Занятие 8.

Задачи. **1.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $b)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}$. **3.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **4.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **5.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **6.** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. **7.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Домашнее задание. **1.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **2.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **6.** $\frac{a}{3}$. **7.** $\frac{2a}{5}$. **8.** $\frac{a\sqrt{30}}{20}$. **9.** $\frac{a\sqrt{14}}{28}$.

Задачи по всем темам

1. 2. **2.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** 8. **5.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** 1,5. **8.** 1. **9.** 2. **10.** 2,4. **11.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **12.** $\frac{16\sqrt{55}}{101}$. **13.** $arccos\frac{1}{25}$. **14.** $\arccos\frac{9}{25}$. **15.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **16.** 0,9.

17. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$. **18.** $\arccos\frac{\sqrt{105}}{35}$. **19.** $arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **20.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **21.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **22.** $2\sqrt{2}$.

23. $\sqrt{2}$. **24.** 90. **25.** $\frac{1}{\sqrt{33}}$. **26.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **27.** $arctg\ \frac{24}{25}$. **28.** $\arccos\frac{5\sqrt{41}}{41}$. **29.** $\arccos\frac{3\sqrt{105}}{35}$. **30.** $arccos\frac{2}{3}$. **31.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **32.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **33.** $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **34.** $\frac{3}{5}$. **35.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **36.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $b)\ \frac{a\sqrt{2}}{6}$; $c)\ \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Список использованной и рекомендуемой литературы

1. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011. – 192 с.

2. Смирнов В.А. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С2 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010. – 64.

3. Геометрия. Расстояния и углы впространстве / И.М. Смирнов, В.А. Смирнов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.:Издательство «Экзамен», 2011. – 158 с.(Серия «ЕГЭ. 100 баллов»).

4. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения. ЕГЭ 2011.

5. Сборник задач по стереометрии с методами решений. В.Н. Литвиненко. Москва « Просвещение», 1998.-260.

Содержание

Введение 2

Занятие 1. Расстояние от точки до прямой 4

Занятие 2. Расстояние от точки до прямой 8

Занятие 3. Расстояние от точки до плоскости 14

Занятие 4. Угол между скрещивающимися прямыми 22

Занятие 5. Расстояние от точки до плоскости 28

Занятие 6. Угол между двумя плоскостями 34

Занятие 7. Угол между прямой и плоскостью 40

Занятие 8. Расстояние между скрещивающимися прямыми 46

Задачи по всем темам 52

Ответы 58

Список использованной и рекомендуемой литературы 62