С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ И ДРУГИЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

ГРАФИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Важной частью математической культуры, необходимой для овладения методами решения нестандартных уравнений и неравенств (в том числе и задач с параметром), является умение строить графики элементарных функций и использовать графические интерпретации уравнений и неравенств. Задачи, в решении которых графические интерпретации играют ключевую роль, можно с определенной степенью условности разделить на три основные группы. К первой отнесем задачи, в которых графические интерпретации позволяют наглядно представить решение и записать ответ, а поиск ответа с помощью только аналитических средств приводит к ощутимым логическим трудностям. В таких задачах степень параметра обычно равна 1, а по типу эти задачи представляют собой системы неравенств либо сводятся к таким системам. Последнее позволяет изобразить множество всех точек плоскости Oxa (здесь a — параметр), удовлетворяющих условию задачи, в виде некоторой фигуры (иногда говорят «области», а сам метод решения называют «методом областей»). После этого, рассматривая различные положения горизонтальной прямой $a = c$ (такую прямую часто называют «считывающей»; здесь c — число) относительно изображенной области, можно довольно просто найти ответ на вопрос задачи. Ко второй группе отнесем задачи, допускающие прямую графическую интерпретацию, то есть предполагающие построение (в том числе с помощью известных элементарных преобразований) и, возможно, исследование графика функции. К третьей группе отнесем задачи, решение которых основывается на исследовании взаимного расположения известных фигур — прямых, отрезков, углов, окружностей — после соответствующей (графической или геометрической) интерпретации данных уравнений или неравенств (то есть здесь, в отличие от задач предыдущих групп, рассматриваются не только графики функций, но и геометрические фигуры, заданные уравнениями или неравенствами).

4.1. Метод областей

Начнем с задач первой группы, то есть с задач, решаемых с помощью «метода областей», но сначала вспомним, какими отношениями связаны точки графика данной функции и все другие точки координатной плоскости.

Если дана функция $y = f(x)$, то все точки $(x; f(x))$ координатной плоскости Oxy, и только они, принадлежат графику этой функции. Очевидно, что все точки, ординаты которых больше, чем $f(x)$, то есть точки $(x; y)$, ординаты которых удовлетворяют неравенству $y > f(x)$, находятся над графиком функции; точки $(x; y)$, ординаты которых удовлетворяют неравенству $y < f(x)$, находятся под графиком функции (рис. 1).

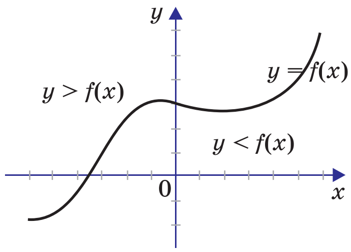

Рис. 1

Рассуждая аналогично, можно легко изобразить на координатной плоскости все точки, удовлетворяющие, например, неравенству $a \le y \le b$ при условии $a < b$: это горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = a$ и $y = b$ (рис. 2).

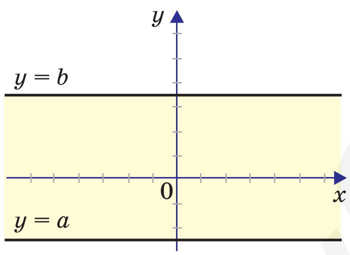

Рис. 2

Множеством всех точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $c \le x \le d$ при условии $c < d$, является вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = c$ и $x = d$ (рис. 3).

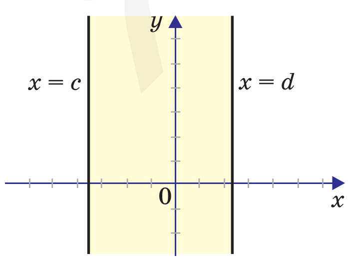

Рис. 3

Найдем теперь множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy, координаты каждой из которых удовлетворяют неравенству $(2y - x - 4)(y + x - 4) \le 0$. Произведение двух чисел неположительно, если эти числа имеют разные знаки или хотя бы одно из них равно нулю. Поэтому данное неравенство выполняется только в случае, если

$$\begin{cases} 2y - x - 4 \le 0, \\ y + x - 4 \ge 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2y - x - 4 \ge 0, \\ y + x - 4 \le 0. \end{cases}$$

Первая система легко приводится к виду

$$\begin{cases} y \le 0,5x + 2, \\ y \ge 4 - x, \end{cases}$$

вторая — к виду

$$\begin{cases} y \ge 0,5x + 2, \\ y \le 4 - x. \end{cases}$$

Это означает, что данному неравенству удовлетворяют все точки координатной плоскости, которые расположены не выше одной из прямых $y = 0{,}5x + 2$ или $y = 4 - x$ и не ниже другой из этих прямых. Таким образом, искомое множество ограничено парой вертикальных углов, образованных этими прямыми (на рис. 4 эти углы заштрихованы). Координаты любой точки, принадлежащей части плоскости, ограниченной другой парой вертикальных углов, образованных этими прямыми (на рис. 4 эти углы не заштрихованы), удовлетворяют, как легко понять, неравенству $(2y - x - 4)(y + x - 4) \ge 0$.

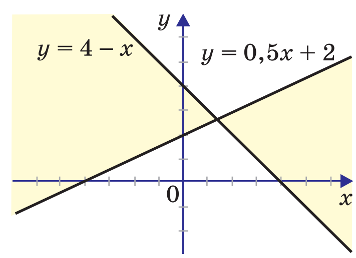

Рис. 4

Вообще, множеством всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy, удовлетворяющих неравенству $(y - f(x)) \times$ $\times (y - g(x)) < 0$, являются все те точки $(x; y)$ этой плоскости, для которых числа $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные знаки, то есть все те точки, которые лежат выше одного из графиков функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$, но ниже другого; множеством всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy, удовлетворяющих неравенству $(y - f(x))(y - g(x)) > 0$, являются все те точки этой плоскости, для которых числа $f(x)$ и $g(x)$ одного знака, то есть все те точки, которые лежат выше каждого из графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ или ниже каждого из них (рис. 5).

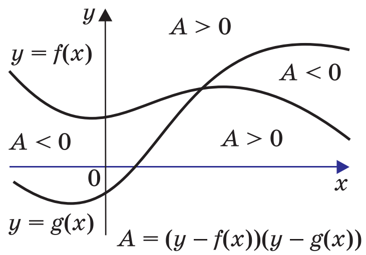

Рис. 5

Далее, если даны графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, можно без труда изобразить множество всех точек $(x;\ y)$ плоскости Oxy таких, что, например, $\begin{cases} y \le f(x), \\ y \ge g(x), \\ y \ge h(x) \end{cases}$ (рис. 6).

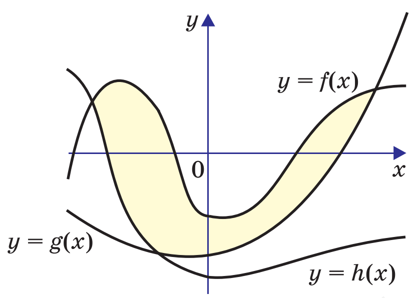

Рис. 6

Сформулируем для функций, графики которых изображены на рисунке 6, новую задачу: найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a \le f(x), \\ a \ge g(x), \\ a \ge h(x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого из найденных значений параметра a. Такая формулировка моделирует в достаточно общем виде почти любую задачу на «метод областей». Для ответа на поставленные вопросы удобно использовать плоскость Oxa, изобразив на ней множество всех точек, координаты которых удовлетворяют данной системе, и так называемую «считывающую прямую» (кавычки в дальнейшем будем опускать), то есть прямую $a = c$ (здесь c — число), параллельную оси абсцисс. С помощью параллельного переноса этой прямой довольно просто определить, какие значения может принимать параметр a, и выписать решения системы для каждого из этих значений. На рисунке 7 изображено одно из возможных положений считывающей прямой.

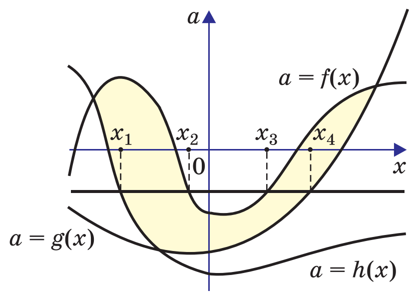

Рис. 7

Для соответствующего значения параметра решением системы является множество $[x_1;\ x_2] \cup [x_3;\ x_4]$, где число x_1 находится как корень уравнения $h(x) = a$, числа x_2 и x_3 — как корни уравнения $f(x) = a$, число x_4 — как корень уравнения $g(x) = a$.

Перейдем к конкретным примерам.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\arccos(3ax + 1) \le \arccos(2x + 3a - 1)$$

имеет хотя бы одно решение, и указать решения неравенства для каждого значения a.

Решение. Неравенство $\arccos l \le \arccos q$ выполняется в том и только том случае, если

$$\begin{cases} l \ge q, \\ q \ge -1, \\ l \le 1, \end{cases}$$

(первое из неравенств системы следует из того, что функция $y = \arccos t$ монотонно убывает на области определения, два последних — из того, что эта функция определена при $t \in [-1;\ 1]$, и первого неравенства системы). Таким образом,

$$\begin{cases} 3ax + 1 \ge 2x + 3a - 1, \\ 2x + 3a - 1 \ge -1, \\ 3ax + 1 \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} (3a - 2)x \ge 3a - 2, \\ x \ge -\dfrac{3}{2}a, \\ ax \le 0. \end{cases}$$

Изобразим множество всех точек $(x;\ a)$ плоскости Oxa, удовлетворяющих последней системе. Для этого заметим, что при $a > \dfrac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $x \ge 1$; при $a = \dfrac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $0 \cdot x \ge 0$ (и его решением является любое действительное число); при $a < \dfrac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $x \le 1$.

Искомое множество показано штриховкой на рисунке 8.

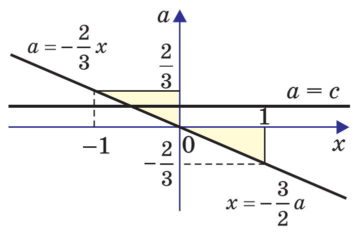

Рис. 8

Для записи ответа удобно рассматривать различные положения считывающей прямой $a = c$ (c — действительное число), параллельной оси абсцисс. При $a<-\frac{2}{3}$ или $a>\frac{2}{3}$ эта прямая не имеет с заштрихованной областью ни одной общей точки. При $a=-\frac{2}{3}$ эта прямая имеет с заштрихованной областью единственную общую точку, лежащую на прямой $a=-\frac{2}{3}x$ (при этом $x = 1$). При $a\in\left(-\frac{2}{3};\,0\right]$ эта прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a=-\frac{2}{3}x$ (и, значит, $x=-\frac{3}{2}a$), а правый — на прямой $x = 1$. При $a\in\left(0;\,\frac{2}{3}\right]$ эта прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a=-\frac{2}{3}x$ (и, значит, $x=-\frac{3}{2}a$), а правый — на оси ординат (и, значит, $x = 0$).

Ответ: решений нет при

$a\in\left(-\infty;\,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\,+\infty\right)$; $\{1\}$ при $a=-\frac{2}{3}$; $\left[-\frac{3}{2}a;\,1\right]$ при $a\in\left(-\frac{2}{3};\,0\right]$; $\left[-\frac{3}{2}a;\,0\right]$ при $a\in\left(0;\,\frac{2}{3}\right]$.

Замечание. В подобных задачах для упрощения записи решений удобно выражать переменную через параметр и указывать найденное выражение на соответствующем графике, как это сделано в нижней части рисунка 8.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+3x\le 12,\\ a+4x\ge x^2,\\ a\le x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого значения a.

Решение. Приведем данную систему к виду

$$\begin{cases} a\le 12-3x,\\ a\ge x^2-4x,\\ a\le x, \end{cases}$$

и построим в системе координат Oxa графики функций $a = 12 - 3x$ (прямая, проходящая через точки (4; 0) и (3; 3)), $a = x^2 - 4x$ (парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке (2; –4), пересекающая ось абсцисс в точках (0; 0) и (4; 0), $a = x$ (прямая, проходящая через точки (0; 0) и (3; 3)). Множество всех точек $(x; a)$ плоскости Oxa, удовлетворяющих данной системе, покажем штриховкой (рис. 9).

Для записи ответа будем рассматривать различные положения считывающей прямой (два таких положения — $a = a_1$ и $a = a_2$ — показаны на рис. 9). При $a < -4$ или $a > 3$ считывающая прямая не имеет с заштрихованной областью ни одной общей точки. При $a = -4$ считывающая прямая имеет с заштрихованной областью единственную общую точку — вершину параболы (то есть решением данной системы является $x = 2$), при $a = 3$ эта прямая имеет с заштрихованной областью также единственную общую точку — точку пересечения прямых $a = 12 - 3x$ и $a = x$ (то есть решением данной системы является $x = 3$). При $a \in (-4; 0]$ считывающая прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, концы которого лежат на параболе $a = x^2 - 4x$. В этом случае левый конец отрезка является меньшим корнем уравнения $x^2 - 4x - a = 0$ (этот корень $x_1 = 2-\sqrt{a+4}$), а правый — большим корнем этого уравнения ($x_2 = 2+\sqrt{a+4}$). При $a \in (0; 3]$ считывающая прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a = x$ (и, значит, $x = a$), а правый — на прямой $a = 12 - 3x$ (и, значит, $x=\frac{12-a}{3}$).

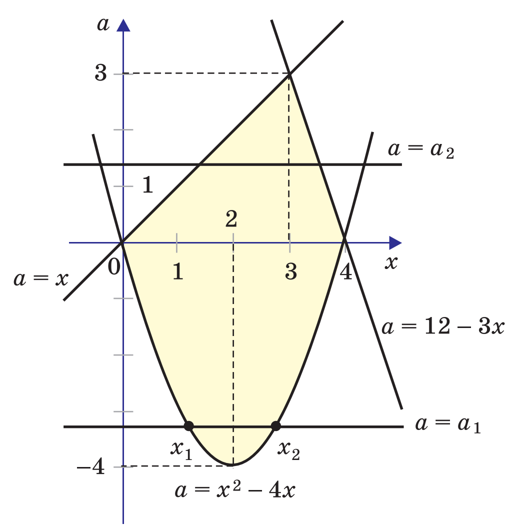

Рис. 9

Ответ: решений нет при $a \in (-\infty;\ -4) \cup (3;\ +\infty)$; $x = 2$ при $a = -4$; $x = 3$ при $a = 3$; $x \in \left[2-\sqrt{a+4};\ 2+\sqrt{a+4}\right]$ при $a \in (-4;\ 0]$; $x \in \left[a;\ \dfrac{12-a}{3}\right]$ при $a \in (0;\ 3]$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства

$$x^2 + a + |x - a - 1| + 1 \le 3x$$

принадлежит отрезку $[0;\ 1]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$|x - a - 1| \le 3x - x^2 - a - 1$$

и воспользуемся тем, что $|p| \le q$ в том и только том случае, если $-q \le p \le q$, то есть если $\begin{cases} p \le q, \\ p \ge -q. \end{cases}$ Получим систему неравенств

$$\begin{cases} x - a - 1 \le 3x - x^2 - a - 1, \\ x - a - 1 \ge -3x + x^2 + a + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2) \le 0. \\ a \le -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1. \end{cases}$$

Множеством всех точек $(x;\ a)$ плоскости Oxa, координаты которых удовлетворяют неравенству $x(x - 2) \le 0$, является полоса, заключенная между прямыми $x = 0$ и $x = 2$ (включая эти прямые). Множеством всех точек $(x;\ a)$ плоскости Oxa, координаты которых удовлетворяют неравенству $a \le -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1$, является парабола $a = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1$ и часть плоскости, расположенная ниже этой параболы (рис. 10).

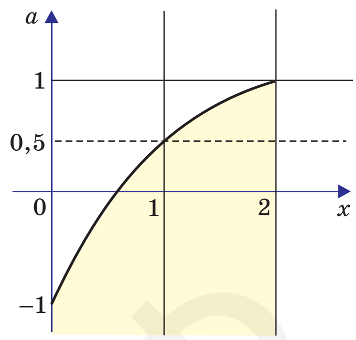

Рис. 10

Система неравенств

$$\begin{cases} x(x-2) \le 0, \\ a \le -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $\{0;\ 1]$ только в том случае, если $a \le 0{,}5$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0{,}5]$.