Задание 23 № 314690. Постройте график функции

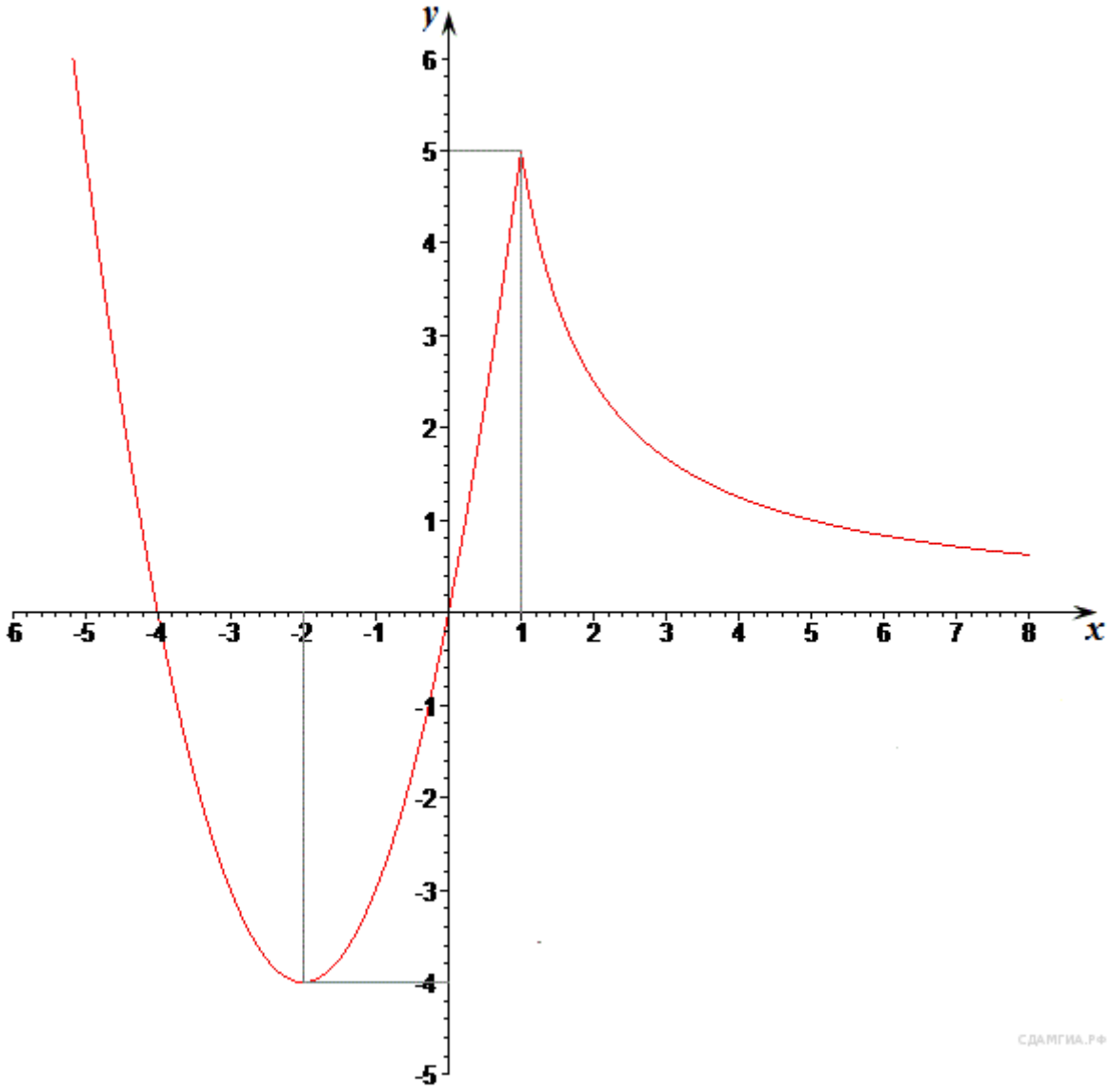
$$\begin{cases} \frac{5}{x}, & x \geq 1, \\ x^2+4x, & x<1. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

Решение.

Построим график функции (см. рисунок).

$$y=\begin{cases} \frac{5}{x}, & x \geq 1, \\ x^2+4x, & x<1. \end{cases}$$



Из графика видно, что прямая $y=c$ будет иметь с графиком функции ровно три точки пересечения при c принадлежащем множеству: $(0;\ 5)$.

Ответ: (0; 5).

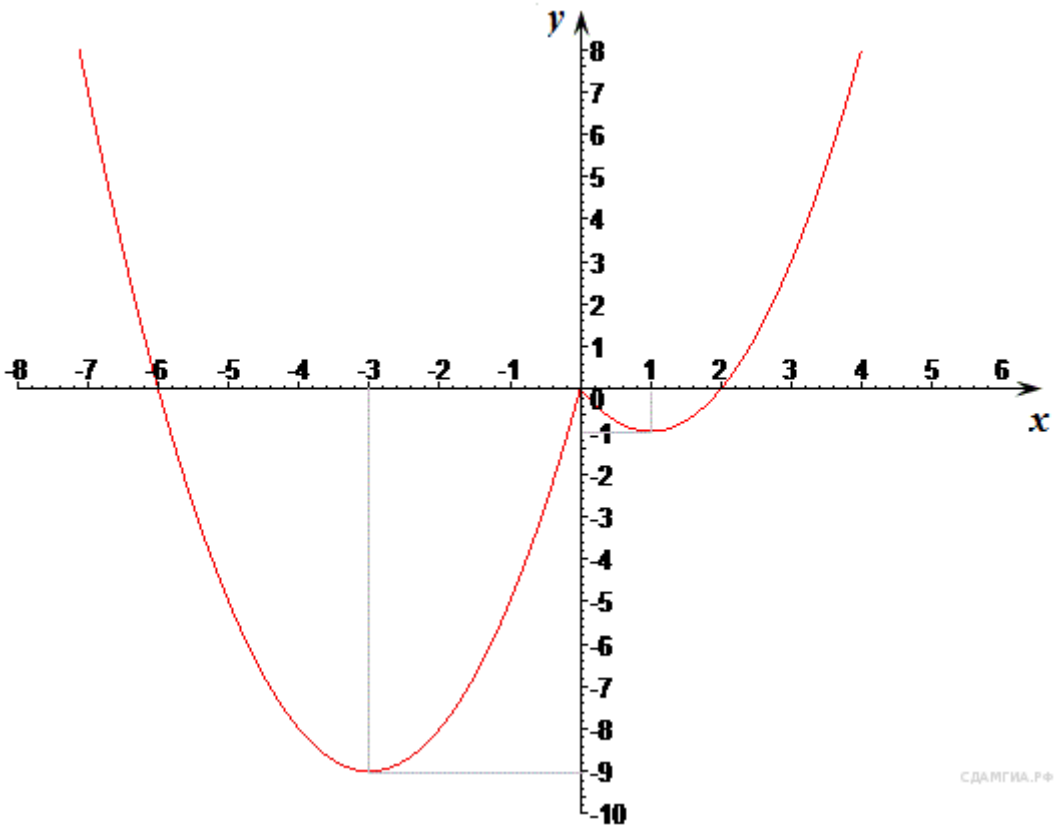
Задание 23 № 314673. Постройте график функции $y=x^2-4|x|+2x$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что график функции можно представить следующим образом:

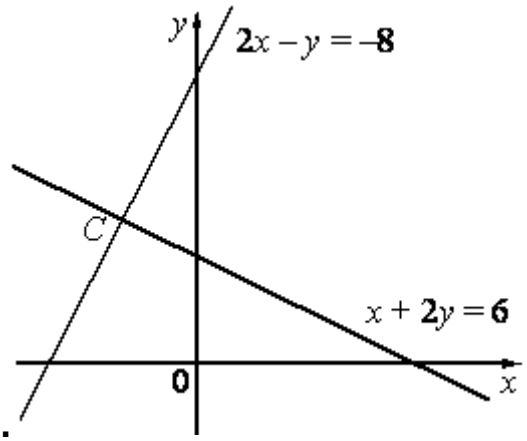
$$y=\begin{cases} x^2+6x, \text{ при } x<0, \\ x^2-2x, \text{ при } x\geq 0. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y=c$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $c=-1$ и при $c=0$.

Ответ: −1; 0.

Задание 4 № 320540. 

Две прямые пересекаются в точке *C* (см. рис.). Найдите абсциссу точки *C*.

Решение.
Уравнения прямых:

$$2x-y=-8 \Leftrightarrow y=2x+8,\quad x+2y=6 \Leftrightarrow y=\frac{6-x}{2}.$$

Найдём абсциссу точки пересечения прямых, для этого, приравняем ординаты:

$$2x+8=\frac{6-x}{2} \Leftrightarrow 4x+16=6-x \Leftrightarrow 5x=-10 \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: −2.

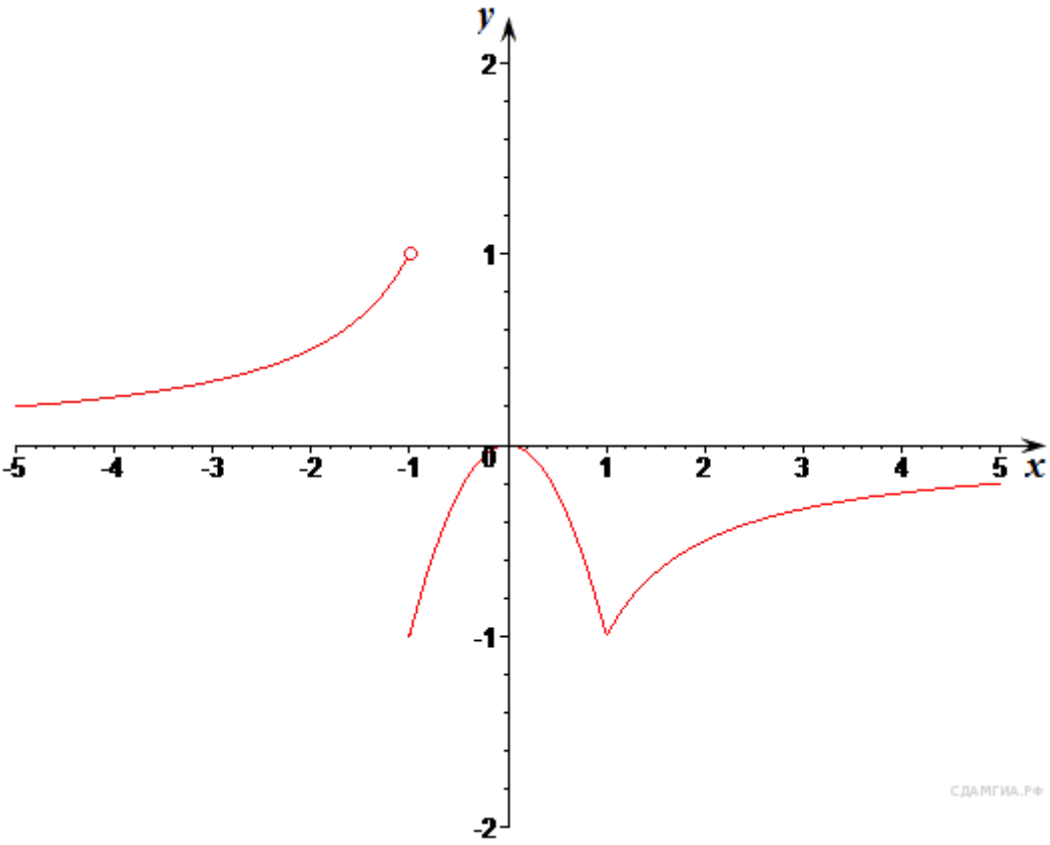
Задание 23 № 314758. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} -x^2, |x|\le 1, \\ -\dfrac{1}{x}, |x|>1. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ будет иметь с графиком единственную общую точку.

Решение.
Построим график функции (см. рисунок).

$$y=\begin{cases} -x^2, |x|\le 1, \\ -\dfrac{1}{x}, |x|>1. \end{cases}$$



Из графика видно, что прямая $y=c$ будет иметь с графиком функции единственную точку пересечения при c принадлежащем множеству [0; 1).

Ответ: [0; 1).

Задание 23 № 314727. Известно, что графики функций $y=x^2+p$ и $y=2x-2$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

Решение.

Найдём абсциссы точек пересечения:

$$x^2+p=2x-2 \Leftrightarrow x^2-2x+p+2=0.$$

Графики функций, будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. То есть, если дискриминант этого квадратного уравнения будет равен нулю.

$$4-4(p+2)=0 \Leftrightarrow p=-1.$$

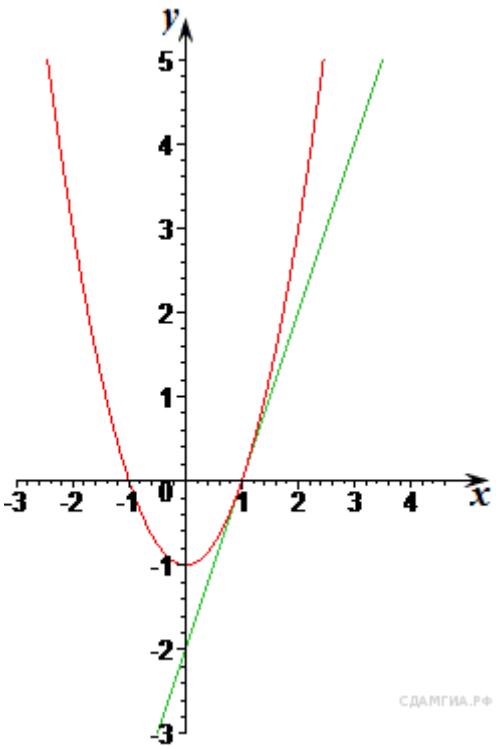
Подставив параметр p в уравнение, найдём x координату точки пересечения этих функций:

$$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Координата y находится путём подстановки координаты x в любое из уравнений, например, во второе:

$$y=2\cdot 1-2=0.$$

Теперь, зная p, можем построить графики обеих функций (см. рисунок).



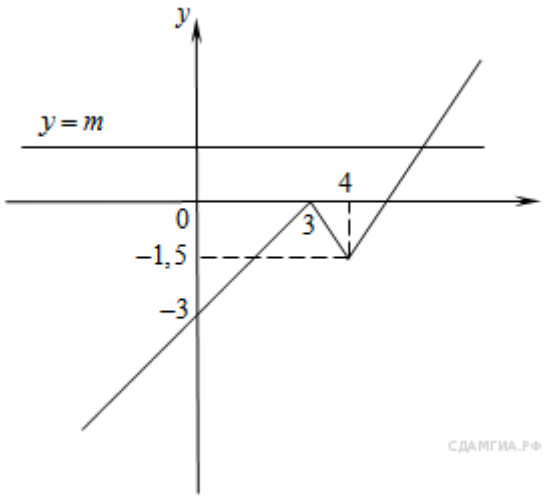
Ответ: (1; 0).

Задание 23 № 339148. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x-3, \text{ если } x<3, \\ -1{,}5x+4{,}5, \text{ если } 3\le x\le 4, \\ 1{,}5x-7{,}5, \text{ если } x>4. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях mпрямая$y=m$имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.
Построим график функции:



Из графика видно, что прямая $y=m$имеет с графиком функции ровно две общие точки при m равном −1,5 и 0.

Ответ: −1,5 и 0.

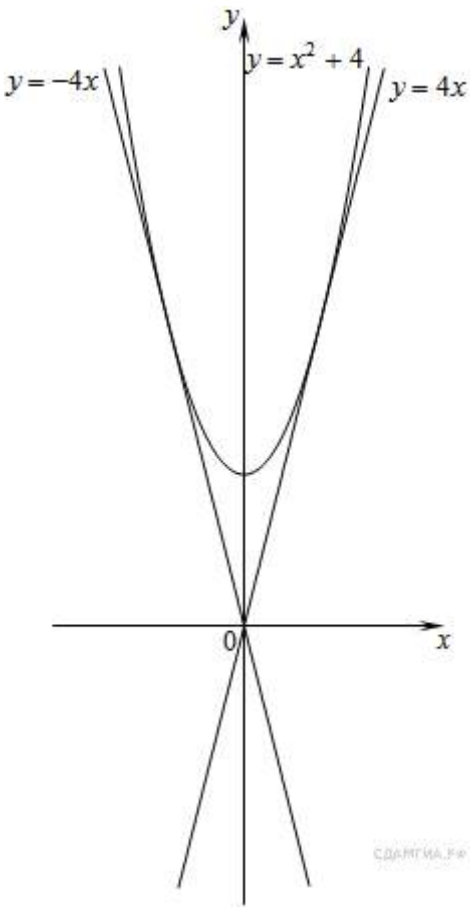
Задание 23 № 338714. Найдите все значения k,при каждом из которых прямая $y=kx$имеет с графиком функции $y=x^2+4$ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Графики функций $y=kx$и $y=x^2+4$будут иметь ровно одну общую точку, если уравнение $kx=x^2+4\Leftrightarrow x^2-kx+4=0$будет иметь один корень. Данное квадратное уравнение имеет один корень, если дискриминант этого уравнения равен нулю:

$$k^2-16=0\Leftrightarrow k^2=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-4, \\ k=4. \end{array}\right.$$

Следовательно, при $k=-4$и $k=4$прямая $y=kx$имеет ровно одну точку пересечения с параболой$y=x^2+4$.Построим графики этих функций:



Ответ: −4; 4.

Задание 23 № 338207. Постройте график функции $y=-2-\dfrac{x^4-x^3}{x^2-x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

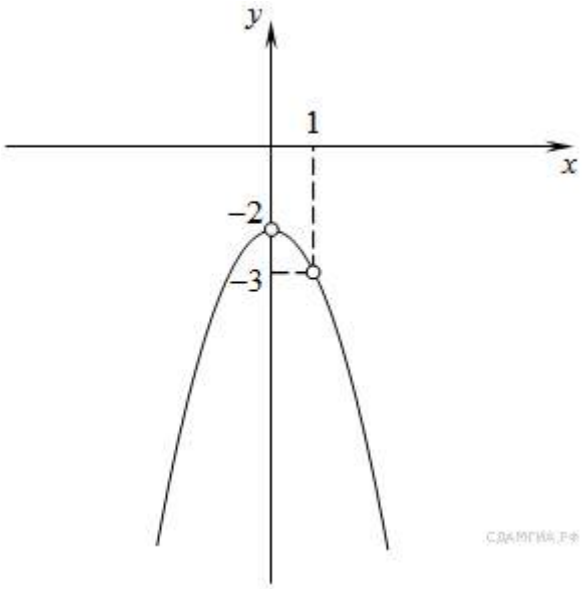
Решение.

Упростим выражение:

$$y=-2-\frac{x^4-x^3}{x^2-x}=-2-\frac{x^3(x-1)}{x(x-1)}=-2-x^2.$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y=-x^2-2$ с выколотыми точками $(0;\ -2)$ и $(1;\ -3)$. Построим график функции (см. рисунок).

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при m принадлежащем промежутку $(-\infty;-3)\cup(-3;-2).$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;-2).$

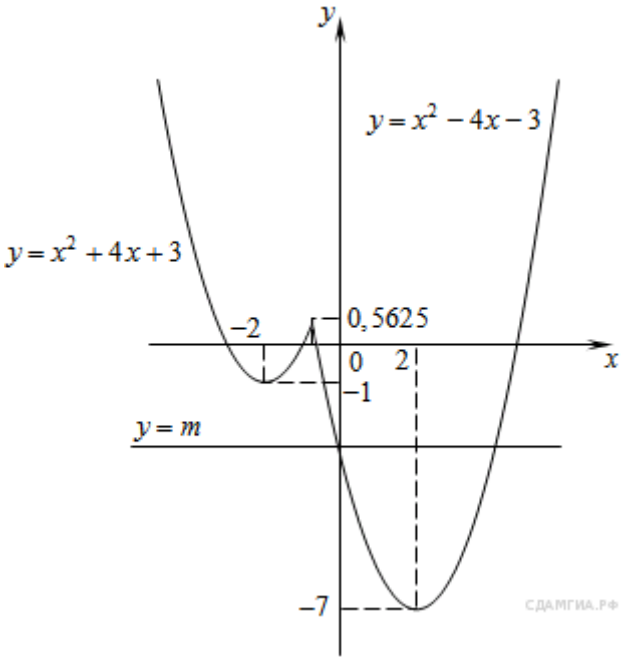
Задание 23 № 338253. Постройте график функции $y=x^2-|4x+3|$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases} x^2+4x+3, \text{ при } x<-\dfrac{3}{4} \\ x^2-4x-3, \text{ при } x\geq -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $m=-1$ и $m=0{,}5625$.

Ответ: −1; 0,5625.

Задание 23 № 338288. Постройте график функции $y=\dfrac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Упростим выражение:

$$y=\frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}=\frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+1}=x^2+6x+8.$$

График функции сводится к графику параболы $y=x^2+6x+8$ с выколотой точкой $(-1;\ 3)$.

Этот график изображён на рисунке:

Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m=-1$ и $m=3$.

Ответ: −1; 3.

Задание 23 № 338295. Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

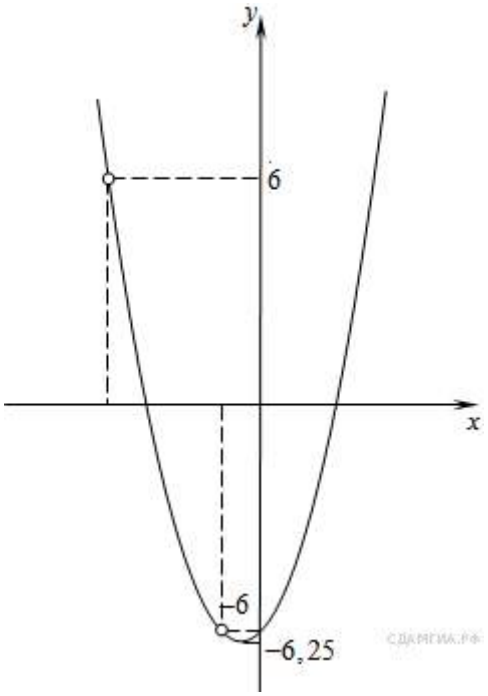
Решение.

Преобразуем выражение:

$$y=\frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}=\frac{(x+3)(x+4)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+4)}=x^2+x-6.$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y=x^2+x-6$ с выколотыми точками $(-1;\ -6),\ (-4;\ 6)$.

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при m равном $-6{,}25;\ -6;\ 6.$

Ответ: −6,25; −6; 6.

Задание 23 № 338300. Постройте график функции $y = \dfrac{3x+5}{3x^2+5x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

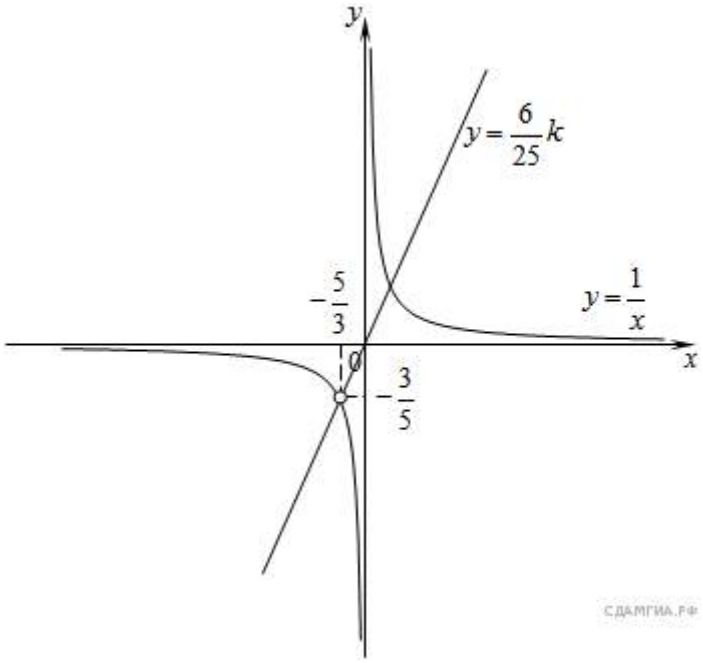
Решение.

Упростим выражение:

$$y = \frac{3x+5}{3x^2+5x} = \frac{3x+5}{x(3x+5)} = \frac{1}{x}.$$

График исходной функции сводится к графику функции $y = \dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $\left(-\dfrac{5}{3};\ -\dfrac{3}{5}\right)$.

Этот график изображён на рисунке:



Прямая $y=kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдёт через выколотую точку. Тогда $k=-\frac{3}{5}:\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{9}{25}$, и уравнение прямой примет вид: $y=\frac{9}{25}x.$

Ответ: $\frac{9}{25}$.

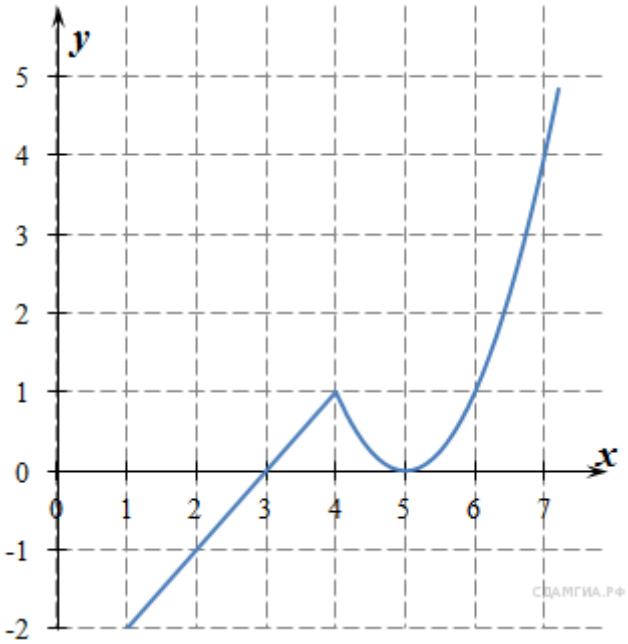
Задание 23 № 341229. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-10x+25, \text{ если } x\geq 4, \\ x, \text{ если } x-3<4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях *m* прямая *y* = *m* имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = x - 3$ при $x < 4$ и график функции $y = x^2 - 10x + 25$ при $x \geq 4$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = 0$ и $m = 1$.

Ответ: 0; 1.

Задание 23 № 338314. Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3,5}-\frac{3,5}{x}\right|+\frac{x}{3,5}+\frac{3,5}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases}\dfrac{3,5}{x}, \text{ при } x\le -3,5 \text{ и } 0<x<3,5,\\ \dfrac{x}{3,5}, \text{ при } -3,5<x<0 \text{ и } x\ge 3,5.\end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:

Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m=-1$ и $m=1$.

Ответ: −1; 1.

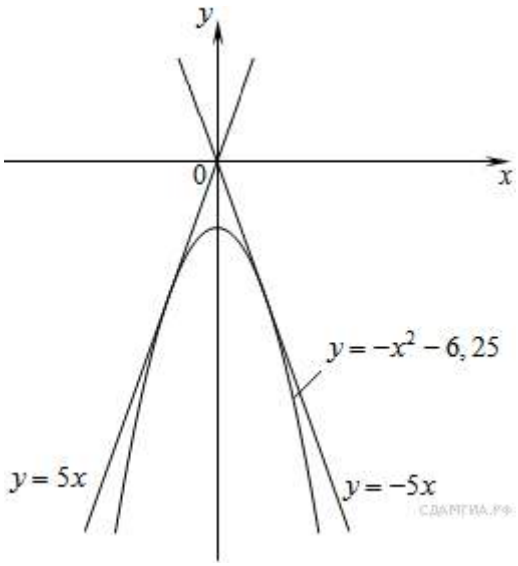
Задание 23 № 338909. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y=kx$ имеет с графиком функции $y=-x^2-6,25$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Графики функций $y=kx$ и $y=-x^2-6,25$ будут иметь ровно одну общую точку, если уравнение $kx=-x^2-6,25\Leftrightarrow x^2+kx+6,25=0$ будет иметь один корень. Данное квадратное уравнение имеет один корень, если дискриминант этого уравнения равен нулю:

$$k^2-25=0\Leftrightarrow k^2=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=-5,\\ k=5.\end{array}\right.$$

Следовательно, при $k=-5$ и $k=5$ прямая $y=kx$ имеет ровно одну точку пересечения с параболой $y=-x^2-6,25$. Построим графики этих функций:



Ответ: −5; 5.

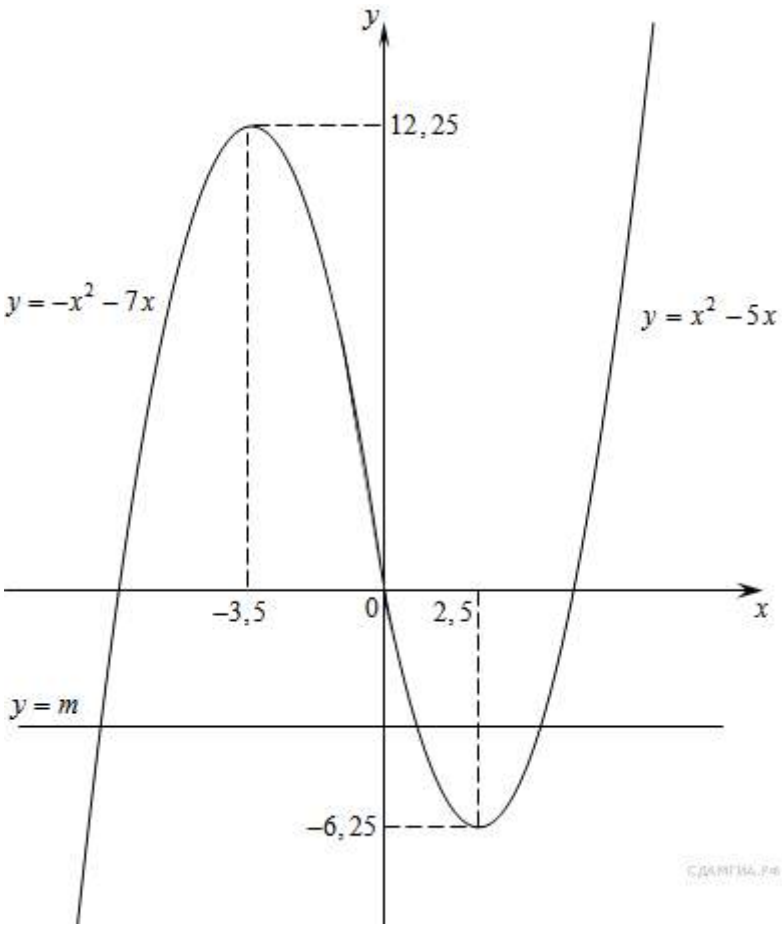
Задание 23 № 338395. Постройте график функции $y=|x|x+|x|-6x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases} -x^2-7x, \text{ при } x<0, \\ x^2-5x, \text{ при } x\geq 0. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции
- ровно две общие точки при $m=-6,25$ и $m=12,25.$;
- три общие точки при $-6,25<m<12,25$
- ровно одну общую точку при $m<-6,25$ и $m>12,25$.

Ответ: m<–6,25; m>12,25.

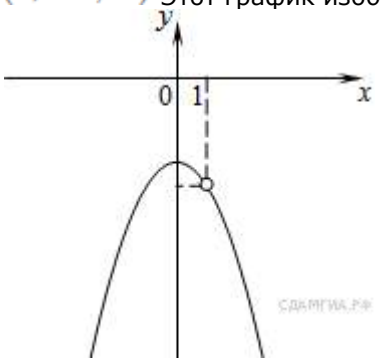
Задание 23 № 338408. Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Упростим выражение:

$$y=\frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x}=-x^2-2,25$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y=-x^2-2,25$ с выколотой точкой $(1;\ -3,25)$. Этот график изображён на рисунке:



Чтобы прямая $y=kx$ имела с построенным графиком одну общую точку, нужно чтобы
или прямая $y=kx$ была касательной к графику $y=-x^2-2,25$ (и точка касания не равна 1),
или прямая $y=kx$ пересекает график $y=-x^2-2,25$ в точке $x=1$ и в какой-то второй точке.

Случай касания реализуется когда дискриминант квадратного уравнения $-x^2-2,25=kx$ равен нулю.

$k^2-9=0$

$k=\pm 3$

При этом если $k=-3$, точка касания $x=1,5$, а если $k=3$, точка касания $x=-1,5$.

Для рассмотрения второго случая подставим $x=1$ в уравнение $-x^2-2,25=kx$.
получим $k=-3,25$. При этом дискриминант этого уравнения будет больше нуля, значит еще одно решение точно есть.

Ответ: -3,25; -3; 3.

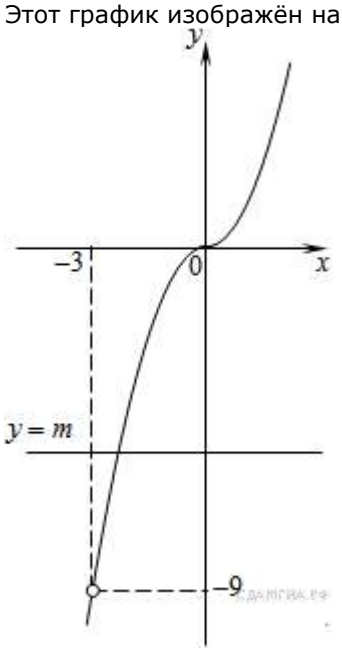
Задание 23 № 338420. Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+3x)|x|}{x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

Раскрывая модуль и упрощая, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases}-x^2,\ \text{при } x<0\\ x^2,\text{при } x\geq 0\end{cases}$$

При этом на графике функции нужно выколоть точку $(-3;-9)$, поскольку при упрощении мы сокращали выражение $x+3$, стоящее в знаменателе.
Этот график изображён на рисунке:

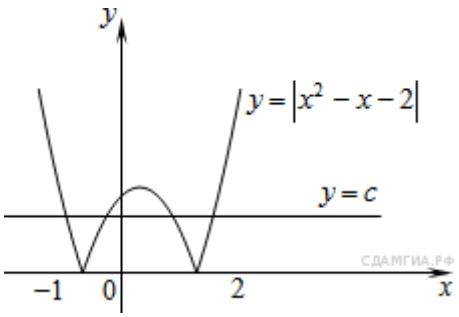


Из графика видно, что прямая $y=m$ не имеет с графиком функции ни одной общей точки при $m=-9$.

Ответ: −9.

Задание 23 № 338455. Постройте график функции $y=|x^2-x-2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
Решение.

График данной функции — это график параболы $y=x^2-x-2$, отрицательная часть которого отражена относительно оси Ox. Этот график изображён на рисунке:

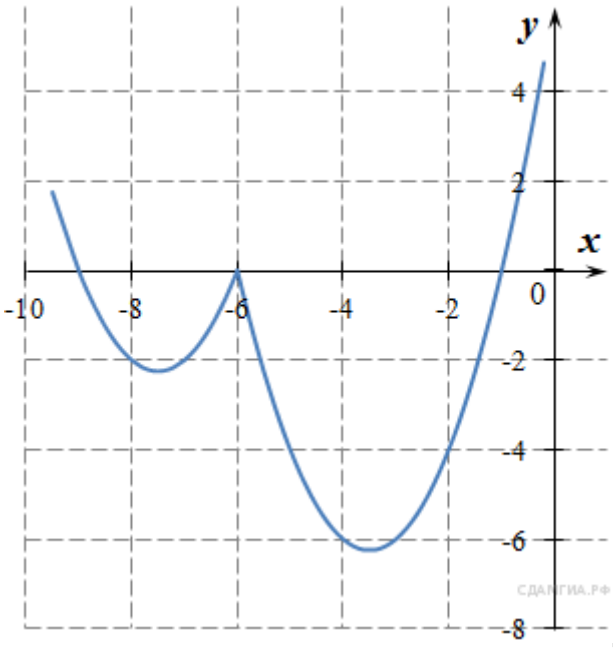


Прямая, параллельная оси абсцисс задаётся формулой $y=c$, где c — постоянная. Из графика видно, что прямая $y=c$ может иметь с графиком функции не более четырёх общих точек.

Ответ: 4.

Задание 23 № 341230. Постройте график функции $y=x^2+11x-4|x+6|+30$ и определите, при каких значениях *m* прямая *y = m* имеет с графиком три общие точки.
Решение.
Имеем:

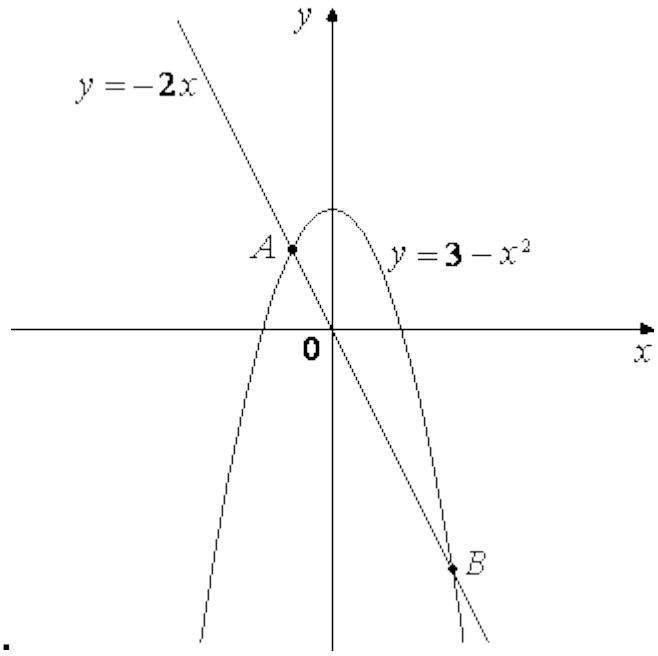
$$y = x^2 + 11x - 4|x+6| + 30; \quad y = \begin{cases} x^2 + 7x + 6, \ x \geq -6, \\ x^2 + 15x + 54, \ x < -6. \end{cases}$$



Для построения искомого графика построим график функции $y = x^2 + 7x + 6$ на промежутке $[-6; +\infty)$ и график функции $y = x^2 + 15x + 54$ на промежутке $(-\infty; -6)$.

Графиком функции $y = x^2 + 7x + 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-3{,}5; -6{,}25)$. Графиком функции $x^2 + 15x + 54$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-7{,}5; -2{,}25)$. График данной функции изображен на рисунке. Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $m = 0$ и при $m = -2{,}25$.

Ответ: −2,25; 0.



Задание 4 № 320541. На рисунке изображены графики функций $y = 3 - x^2$ и $y = -2x$. Вычислите координаты точки *B*.

Запишите координаты в ответе через точку с запятой.

Решение.

Точки *A* и *B* — точки пересечения графиков функций $y = 3 - x^2$ и $y = -2x$. Найдём их абсциссы:

$$3 - x^2 = -2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Абсцисса точки *B* больше нуля, следовательно, это $x = 3$. Найдём ординату точки *B*: $y = -2 \cdot 3 = -6$.

Ответ: 3; –6.

Задание 23 № 314799. Постройте график функции $y = \dfrac{x-2}{2x-x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

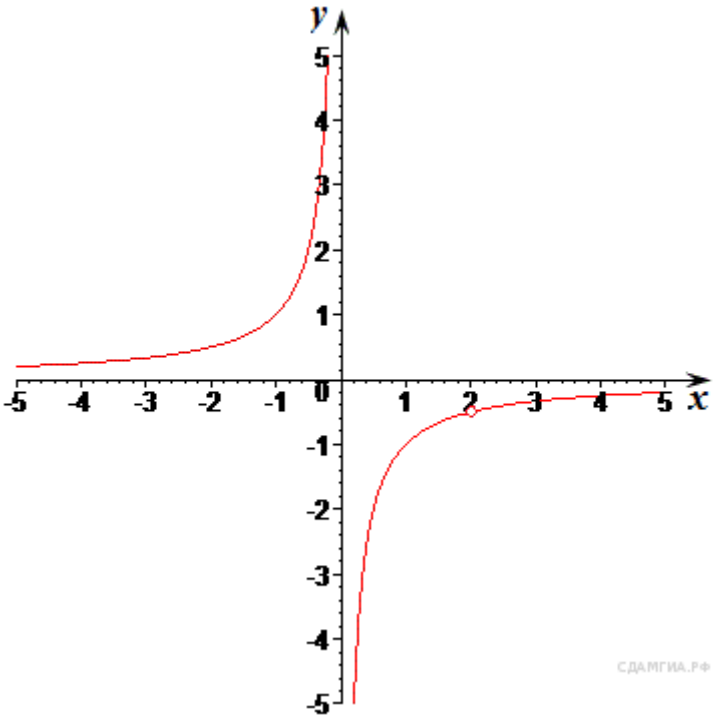
Решение.

Упростим выражение для функции:

$$y = \frac{x-2}{2x-x^2} = -\frac{x-2}{x(x-2)} = -\frac{1}{x} \text{ (при } x \neq 2\text{)}.$$

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y = -\dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $(2;\ -0{,}5)$.

Построим график функции (см. рисунок).



Заметим, что прямая $y=kx$ проходит через начало координат и будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку только тогда, когда будет проходить через выколотую точку $(2;\ -0,5)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k.

$$-0,5=2k \Leftrightarrow k=-0,25.$$

Ответ: −0,25.

Задание 23 № 314398. Парабола проходит через точки *K*(0; −5), *L*(3; 10), *M*(−3; −2). Найдите координаты её вершины.

Решение.

Одна из возможных форм записи уравнения параболы в общем виде выглядит так: $y=ax^2+bx+c$. Координата x вершины параболы находится по формуле $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}$. Координату y вершины параболы найдётся подстановкой $x_{\text{в}}$ в уравнение параболы. Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов a, b и c. Подставив координаты точек, через которые проходит парабола, в уравнение параболы и получим систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} c=-5, \\ 9a+3b+c=10, \\ 9a-3b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-5, \\ 9a+3b+c=10, \\ 18a-10=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-5, \\ b=2, \\ a=1. \end{cases}$$

Найдём координаты вершины:

$$x_{\text{в}}=-\frac{2}{2}=-1,$$
$$y_{\text{в}}=1-2-5=-6.$$

Ответ: (−1; −6).

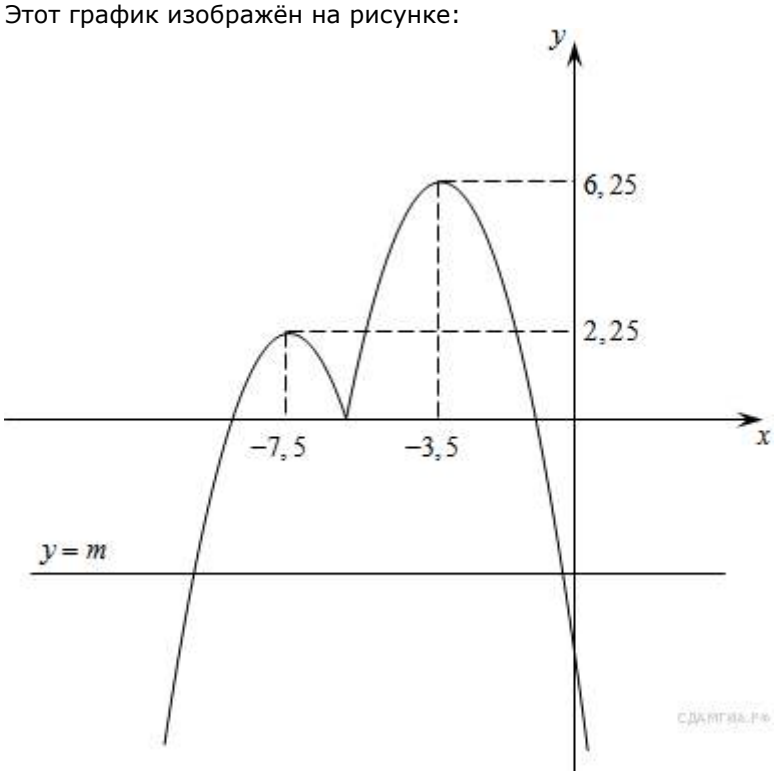
Задание 23 № 338105. Постройте график функции $y=4|x+6|-x^2-11x-30$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases} -x^2-15x-54, \text{ при } x<-6, \\ -x^2-7x-6, \text{ при } x\geq -6. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $m=0,$ и $m=2,25.$

Ответ: 0; 2,25.

Задание 23 № 314407. При каких значениях p вершины парабол $y=-x^2+2px+3$ и $y=x^2-6px+p$ расположены по разные стороны от оси x?

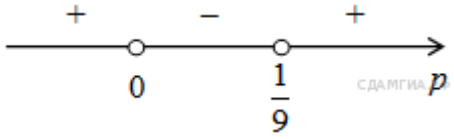
Решение.

Координата x вершины параболы определяется по формуле $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}.$ Координата $y_{\text{в}}$ вершины находится подстановкой $x_{\text{в}}$ в уравнение параболы. Вершины парабол будут находится по разные стороны от оси x, если координаты их вершин имеют разные знаки. Вспомнив, что два сомножителя имеют разный знак тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно, составим и решим неравенство:

$$(-p^2+4p^2+3)(9p^2-18p^2+p)<0 \Leftrightarrow (3p^2+3)(-9p^2+p).$$

Заметим, что первый множитель всегда больше нуля, поэтому на него можно разделить.

$$-9p\left(p-\frac{1}{9}\right)<0 \Leftrightarrow p\left(p-\frac{1}{9}\right)>0.$$



Произведение двух сомножителей будет больше нуля, если сомножители имеют одинаквый знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:

$$\left[\begin{array}{l} p<0, \\ p>\dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup\left(\dfrac{1}{9};\ \infty\right)$.

Примечание.

Координату $y_{в}$ параболы также можно найти по формуле $y_{в}=-\dfrac{D}{4a}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

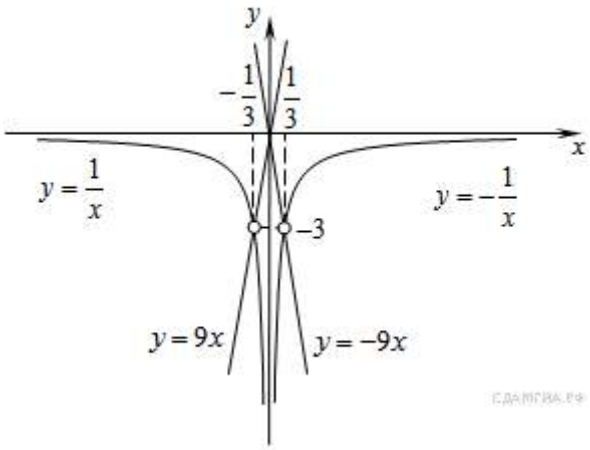
Задание 23 № 338162. Постройте график функции $y=\dfrac{3|x|-1}{|x|-3x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что график функции можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases} \dfrac{-3x-1}{-x-3x^2}, & \text{при } x<0, \\ -\dfrac{3x-1}{x-3x^2}, & \text{при } x\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{при } x<0, \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{при } x\geq 0. \end{cases}$$

При этом, в точках $x=-\dfrac{1}{3}$ и $x=\dfrac{1}{3}$ значение функции не определено.



Прямая $y=kx$ не будет иметь с графиком ни одной общей точки, если пройдёт через выколотые точки. Тогда $k=-3:\left(-\dfrac{1}{3}\right)=9,\ k=-3:\left(\dfrac{1}{3}\right)=-9.$ Также прямая $y=kx$ не будет иметь с графиком ни одной общей точки, если будет параллельна оси абсцисс, то есть, если $k=0.$

Ответ: −9; 0; 9.

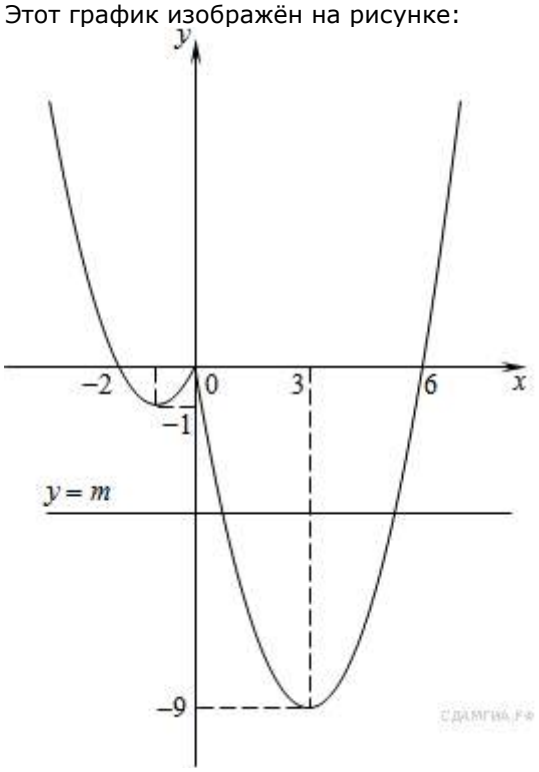
Задание 23 № 338249. Постройте график функции $y=x^2-4|x|-2x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что функцию можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases} x^2+2x, & \text{при } x<0, \\ x^2-6x, & \text{при} x\geq 0. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции не менее одной, но не более трёх общих точек при m принадлежащем промежутку $[-9;\ -1] \cup [0;\ +\infty)$.

Ответ: $[-9;\ -1] \cup [0;\ +\infty)$.

Задание 23 № 314458. При каких значениях m вершины парабол $y = -x^2 - 6mx + m$ и $y = x^2 - 4mx - 2$ расположены по одну сторону от оси x?

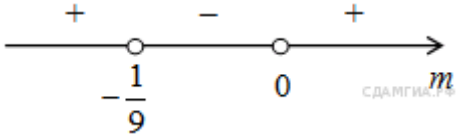
Решение.

Координата x вершины параболы определяется по формуле $x_в = -\dfrac{b}{2a}$. Координата $y_в$ вершины находится подстановкой $x_в$ в уравнение параболы. Вершины парабол будут находится по одну сторону от оси x, если координаты их вершин имеют одинаковые знаки. Вспомнив, что два сомножителя имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда их произведение положительно, составим и решим неравенство:

$$(-9m^2 + 18m^2 + m)(4m^2 - 8m^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow (9m^2 + m)(-4m^2 - 2) > 0.$$

Заметим, что второй множитель всегда меньше нуля, поэтому на него можно разделить.

$$9m\left(m + \frac{1}{9}\right) < 0 \Leftrightarrow m\left(m + \frac{1}{9}\right) < 0.$$



Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:

$$-\frac{1}{9} < m < 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{9};\ 0\right)$.

Примечание.

Координату $y_{в}$ параболы также можно найти по формуле $y_{в} = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

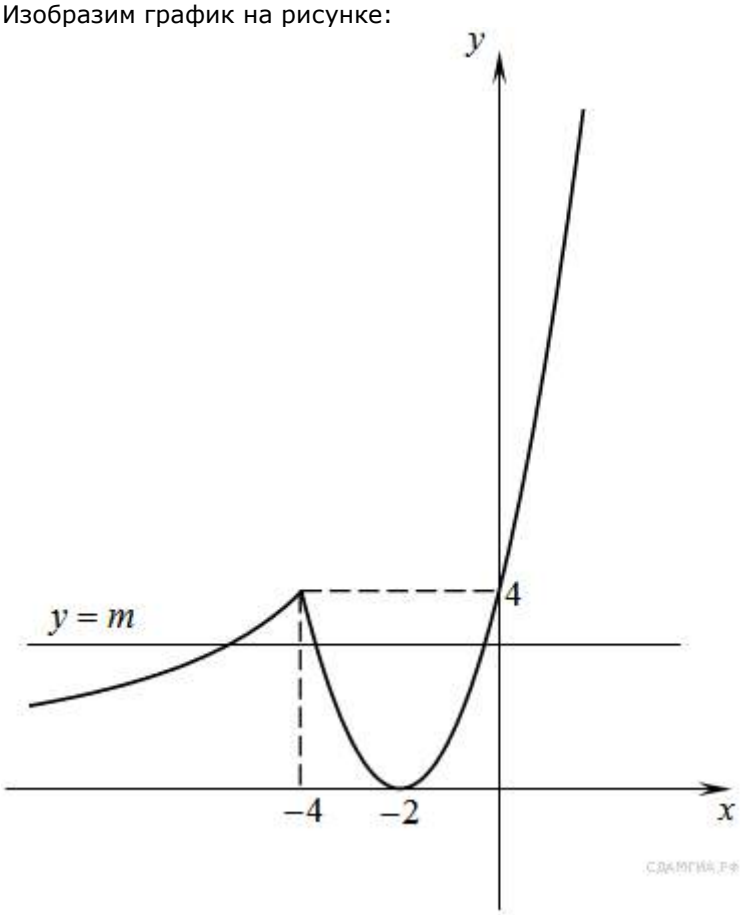
Задание 23 № 338465. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, \text{ если } x \geq -4, \\ -\frac{16}{x}, \text{ если } x < -4. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Изобразим график на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции одну или две общие точки при любом m принадлежащем множеству $\{0\} \cup [4;\ +\infty)$.

Ответ: $\{0\} \cup [4;\ +\infty)$.