

ГОТОВИМСЯ К ГИА



АЛГЕБРА

8

КЛАСС

ПРАКТИКУМ

x

y

z

$2\pi R$



Σ

Г.Д. Карташёва

Алгебра 8 класс

ПРАКТИКУМ

ГОТОВИМСЯ К ГИА

Москва
«Интеллект-Центр»
2013

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

К27

Карташёва, Г. Д.

К27 Алгебра. 8 класс. Практикум. Готовимся к ГИА : [учебное пособие] / Г.Д. Карташёва. – Москва: Интеллект-Центр, 2013. – 96 с.

ISBN 978-5-00026-006-7

Данное пособие представляет собой практикум по решению задач, предназначенных для закрепления и систематизации знаний учащимися по алгебре за курс 8 класса. Пособие ориентировано на повышение уровня общей математической подготовки школьников. В книге дан краткий теоретический материал, который ученик должен знать после изучения темы, необходимый для выполнения упражнений, приведены опорные задачи с решениями, а также задания базового и повышенного уровня сложности для самостоятельного решения учащимися.

В конце темы даны тесты для самоконтроля и диагностики проблем в знаниях учащихся и их последующей коррекции.

Пособие написано в соответствии с программой курса алгебры 8 класса, но больше ориентировано на учебник «Алгебра, 8» (авторы – Ю. Н. Макарычева и др.). Оно также может быть использовано и при работе по другим учебникам.

Пособие адресовано ученикам 8 класса, их родителям, учителям и методистам.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

Генеральный директор издательства «Интеллект-Центр»

М. Б. Миндюк

Редактор Д. П. Локтионов

Художественный редактор Е. Ю. Воробьева

Подписано в печать 18.06.2013. Формат 60х84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,0.

Тираж 5000 экз.

Издательство «Интеллект-Центр»

125445, Москва, ул. Смольная, д. 24А

ISBN 978-5-00026-006-7

© «Интеллект-Центр», 2013

© Г.Д. Карташёва, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Повторение изученного в 7 классе	6
Проверочная работа	8
I. Рациональные дроби	10
1. Рациональные дроби и их свойства	10
2. Сумма и разность дробей	12
3. Произведение и частное дробей	14
4. Деление дробей	15
5. Преобразование рациональных выражений	16
6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график	16
Тест 1. Рациональные дроби	18
II. Квадратные корни	22
1. Рациональные числа	22
2. Иррациональные числа	22
3. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень	23
4. Уравнение $x^2 = a$	25
5. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график	26
Тест 2. Арифметический квадратный корень	28
6. Свойства арифметического квадратного корня	32
7. Вынесение множителя за знак корня. Внесение множителя под знак корня	33
8. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни	34
Тест 3. Квадратные корни	35
III. Квадратные уравнения	37
1. Неполные квадратные уравнения	37
2. Решение квадратного уравнения по формулам	38
3. Решение задач с помощью квадратных уравнений	41
4. Теорема Виета	41
Тест 4. Квадратные уравнения	43
5. Дробные рациональные уравнения	45
6. Решение задач с помощью рациональных уравнений	46
Тест 5. Дробные рациональные уравнения	47

IV. Неравенства	49
1. Числовые неравенства	49
2. Свойства числовых неравенств.....	50
3. Сложение и умножение числовых неравенств.....	52
4. Числовые промежутки.....	56
5. Решение неравенств с одной переменной	57
6. Решение систем неравенств с одной переменной.....	59
Тест 6. Неравенства	60
 V. Степень с целым показателем. Элементы статистики	64
1. Определение степени с целым отрицательным показателем	64
2. Свойства степени с целым показателем.....	65
3. Стандартный вид числа.....	66
Тест 7. Степень с целым показателем. Стандартный вид числа	67
4. Элементы статистики.....	69
5. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства.....	70
6. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение	70
 Тест 8. Итоговый тест	72
 Ответы	76

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие содержит задачи по основным темам курса алгебры 8 класса и предназначено для закрепления и систематизации знаний учащимися, выработки прочных навыков по всем темам.

По каждой теме дается:

- опорный теоретический материал;
- образцы решения типовых задач по теме;
- задания для самоконтроля.

В конце каждой темы приводится тест, который по форме соответствует заданиям, используемым в настоящее время как при государственной итоговой аттестации за основную школу, так и в едином государственном экзамене.

Тесты могут использоваться как учениками для самопроверки, так и учителями для контроля знаний учащихся всего класса.

Тренировочные упражнения даны на базовом и повышенном уровне для учащихся, которые хотят знать больше.

В конце даны ответы и комментарии к ним.

Пособие ориентировано на учебник «Алгебра 8» авторов Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой, а также может быть использовано при работе по другим учебникам алгебры для 8 класса.

ПОВТОРЕНИЕ ИЗУЧЕННОГО В 7 КЛАССЕ

Для изучения первой темы 8 класса повторите тему «Выражения и их преобразования» за курс 7 класса (смотри учебник 8 класса раздел «Сведения из курса алгебры 7 класса»). Выполните после этого задания.

1. Какие из выражений:

1) $5a^2x$;

3) -5 ;

5) $\frac{1}{2}a^3x^2-4$;

2) $-3a^2b^3-8a^2b^5$;

4) $x+y^5$;

6) $x^2-2a^3x+4x^3$

являются:

а) одночленами;

б) многочленами?

2. Укажите степень одночлена:

1) $-6a^3x^2$;

2) $\frac{1}{2}a^3b^4$;

3) 7 ;

4) y^5 .

3. Какие из многочленов, являются многочленами стандартного вида:

1) $2x^5y+8x^3y-5x^5y$;

2) $-2x^2y^3+7xy^2+3xy$;

3) $\frac{1}{2}a^2b-3ab^2$?

Перед выполнением следующего задания вспомните правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» или «-».

4. Найдите сумму или разность следующих многочленов:

1) $(3ab+7c^2)+(2ab-3c^2)$;

3) $(3y^2-4y+1)-(5y-2)$;

2) $(6x^2-y)-(4x^2-9y)$;

4) $(-7x^2+5x-3)+(-5x^2+4)$.

5. Составьте:

а) сумму многочленов

$6x^3-5x^2-8$ и $-2x^3-8x^2+3x+5$ и преобразуйте ее в многочлен стандартного вида;

б) разность многочленов

$5y^2-10$ и $7y^2-3y+5$ и преобразуйте ее в многочлен стандартного вида.

6. Решите уравнение:

а) $(25+4x)+(-15x-41)=17$;

б) $(4,3y-1,8)-(7,3y+3,4)=-6,7$.

7. Преобразуйте произведение в многочлен:

а) $-2a^3(4ab^2 - b^3 + 1)$;

б) $(5x^2 - 2)(3x + 4)$.

8. Для выполнения этого задания повторите формулы сокращенного умножения.
Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

1) $(3x + 2)^2$;

6) $(-2x + 3y)^3$;

11) $(y - 5)(y + 5)$;

2) $(6y^2 - 7)^2$;

7) $(a + b)^2 - 2ab$;

12) $(x^2 + 6)(x^2 - 6)$;

3) $\left(\frac{1}{4}a - 2b\right)^2$;

8) $(a + b)^2 - (a - b)^2$;

13) $(0,7x^2 + y^3)(0,7x^2 - y^3)$;

4) $(-x + 5)^2$;

9) $10ab - 4(2a - b)^2 + 6b^2$;

14) $(5x^2 + 2y^3)(-2y^2 + 5x^2)$.

5) $(a + 3)^3$;

10) $(x - 3)^3 - (x + 3)^3$;

9. Разложите многочлен на множители.

1) Вынесением общего множителя за скобки:

а) $3x^2y - 6xy^3$;

б) $-24x^3y^5 + 36x^2y^2$;

в) $b^3(b + 2) - 3(b + 2)$;

г) $a(a - b) + 4(a - b)$;

д) $c^2(b - 5) - 6(5 - b)$.

2) Способом группировки:

а) $5x - 5y - ax + ay$;

б) $ab - 4b + ay - 4y$;

в) $3xy + 15y - 3x - 15$;

г) $60a + 8ab - 30a - 4ab$.

3) С помощью формул сокращенного умножения:

а) $a^2 - 36x^2$;

в) $x^8 - 81$;

д) $(a - b)^2 - 4x^2$;

ж) $x^3 + 27$.

б) $a^4 - 25$;

г) $y^8 - 1$;

е) $8 - b^3$;

4) С применением нескольких способов:

а) $a(2b - c) + 4b^2 - c^2$;

в) $x^2 - a^2 - x - a$;

д) $16 - c^2 + a^2 - 8a$.

б) $x^2 - 2xa + a^2 - b^2$;

г) $p^2 - a^2 + 2ab - b^2$;

10. Решите уравнение:

1) $x^2 - 2x = 0$;

3) $16x - x^3 = 0$;

5) $(x + 1)x^2 - 4(x + 1) = 0$;

2) $y^3 - y = 0$;

4) $6x^4 - 24x^2 = 0$;

6) $y^3 - y^2 = 25y - 25$.

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Укажите степень одночлена

а) $6xy$;

б) $-0,8x^2y$;

в) $-\frac{2}{3}m^2n^3$;

г) -5 .

а	б	в	г

2. Какой из одночленов дан в стандартном виде

1) $3a^26a^2b$;

2) $7x^6y^4$;

3) $(3ab^2)^2 \cdot (-2a^3b)^3$;

4) $-\frac{1}{2}bc^2\left(\frac{2}{3}b^3c^5\right)^3$?

3. Приведите подобные члены многочлена:

1) $-a^4 + 4a^3 - 5a^4 + 3a^2 - 2a^3 - 5a^2$;

2) $3 + 3x^5 - 4x^3 - 8x^5 + 4x^3 - 2y^5 - 9$;

3) $9x^2y - 6xy^2 - 4x^2y + 3x^2y - 3xy^2$;

4) $4ab^3 + 9a^2b^2 - ab^3 - 5a^2b^2 - 3a^2b^2 - 5$.

4. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(2+5a)+(a^2-4a)$;

в) $(3x^2+5,5x)+(-2x^2+6)$;

б) $(b^2-b+7)-(b^2-b-9)$;

г) $(9m^3-4n^2)-(9n^2-3m^3)$.

5. Выполните умножение:

а) $3a(2a^2-8a-4)$;

в) $(y^2-2,5y+6) \cdot 1,5y$;

б) $-4x^2(3x^2-3x-2)$;

г) $(a^2b^2-a^2-b^2) \cdot (-3ab)$.

6. Выполните умножение:

а) $(a^2+b)(a-b^2)$;

б) $(9-x^2)(x^2+9)$;

в) $a^2(a-2)^2$;

г) $3a(2+a)^2$.

7. Разложите многочлен на множители:

1) $ax+ay+7x+7y$;

3) $4a^2-9$;

5) $a^2+2ab+b^2-x^2$.

2) y^3-y^2+y-1 ;

4) $(a+2b)^2-(a-2b)^2$;

8. Решите уравнение:

1) $1,7-2-(3,7x+5)=2x+1$;

3) $7x^2+4x=0$;

2) $\frac{1-6x}{2}-\frac{2x+19}{12}=\frac{23-2x}{3}$;

4) $y(5-y)-3y(y-5)^2=0$.

Вариант 2

1. Укажите степень одночлена

а) $-5x^2y$;

б) $0,8x^3y^2$;

в) $-\frac{3}{5}a^2b^2$;

г) -6 .

а	б	в	г

2. Какой из одночленов дан в стандартном виде

1) $(3x^2y^3)^2 \cdot (-5x^4y^2)^3$; 2) $-\frac{2}{3}a^2b \cdot \left(\frac{3}{2}b^2a\right)^2$; 3) $-6x^3y^5$; 4) $3a^47a^2b^3$?

3. Приведите подобные члены многочлена:

1) $2a^4 - 4a^3 - 7a^4 + 5a^2 - a^3 + 6a^2$;

2) $7 + 4y^5 - 4x^3 + 7y^5 - 2x^3 - 10$;

3) $-9xy^2 + 5x^2y - 6xy^2 - 2x^2y + 8xy^2$;

4) $-4a^2b - 9a^3b^3 - a^2b + 8a^3b^3 - 2a^2b^2 - 4$.

4. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(3x - 5) + (x^2 - 4x)$;

в) $(x^2 - 3,5x + 4) + (-3x^2 + x)$;

б) $(-4a^2 - 5a + 2) - (a^2 + a - 5)$;

г) $(a^2b^2 + a^2 - b^2) - (-8a^2b^2 - 3b^2)$.

5. Выполните умножение:

а) $-5a(-2a^2 - 7a + 4)$;

в) $(-y^2 + 1,5y - 4) \cdot 2,5y$;

б) $4x^2(-3x + 5x^2 - 2)$;

г) $(-2x^2y^2 - x^2 + y^2) \cdot (-5xy)$.

6. Выполните умножение:

а) $(x^2 + 3y)(3y - x^2)$;

в) $x^2(x - 3)^2$;

б) $(5 - y^2)(y^2 + 5)$;

г) $5x \cdot (4 + x)^2$.

7. Разложите на множители многочлен:

1) $8ab + 8b + 7a + 7$;

3) $25a^2 - 16$;

5) $4x^2 - a^2 - 2ab - b^2$.

2) $x^3 + x^2 - x - 1$;

4) $(3a + b)^2 - (b - 3a)^2$;

8. Решите уравнение:

1) $(1,9 + 0,2x) - (0,5x - 1,1) = 24$;

3) $4x^2 - 8x = 0$;

2) $\frac{5y+4}{14} - \frac{6-3y}{21} = \frac{4y-1}{7}$;

4) $5y(y-6) - 10(6-y)^2 = 0$.

I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

1. Рациональные дроби и их свойства

11. Какие из выражений:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{y+5}{2-y}; & 3) (a+4)(a-5); & 5) \frac{x^2}{x+6} \\ 2) \frac{9b^2-3b}{6}; & 4) (x-4):(x-9); & \end{array}$$

являются целыми, какие – дробными?

Укажите допустимые значения переменной в этих выражениях.

12. Из рациональных выражений:

$$\begin{array}{lll} 1) 3x^2-7xy; & 3) a(a-3)-\frac{7}{4a}; & 5) \frac{b}{a+4}-10 \\ 2) \frac{a}{10}; & 4) \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{6}y^2; & \end{array}$$

выпишите те, которые являются:

- а) целыми выражениями;
- б) дробными выражениями.

13. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

$$\begin{array}{lll} а) \frac{4x}{8+x}; & в) \frac{10}{x}; & д) \frac{a}{|a|+6} \\ б) \frac{9}{16-b^2}; & г) \frac{x+6}{|x|-4} & \end{array}$$

14. Найдите значения выражений при заданных значениях входящих в них букв. Заполните таблицу

а)	x	-9	-6	-3	-2	-1	4	12	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$-\frac{36}{x}$										

б)	x	0	1	2	3	5	-1	8	9	10	7
	$\frac{x}{(6-x)^3}$										

15. а) Сократите дробь: $\frac{8}{36}, \frac{25}{45}, \frac{27}{81}, \frac{63}{81}, \frac{72}{64}$.

б) Приведите дроби к знаменателю 48: $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{8}, \frac{3}{4}$.

16. Будут ли равны дроби:

1) $\frac{3}{7}$ и $\frac{3c}{7c}$;

2) $\frac{3}{5}$ и $\frac{3(a-2)}{a-2}$;

3) $\frac{a-4}{a-3}$ и $\frac{(a-4)(a+5)}{(a-3)(a+5)}$?

17. Можно ли поставить знак равенства между выражениями:

а) $\frac{a^2-16}{a-4}$; $\frac{(a-4)(a+4)}{a-4}$; $(a+4)$;

б) $\frac{a+5}{a^2-25}$; $\frac{a+5}{(a+5)(a-5)}$; $\frac{1}{a-5}$?

1) При каких значениях а эти равенства будут верными, а при каких нет?

2) Как называется замена выражения $\frac{a^2-16}{a-4}$ на $a+4$?

3) Что такое тождественное преобразование выражения?

4) Какие тождественные преобразования выражений вы знаете?

5) Является сокращение дробей одним из примеров тождественных преобразований?

18. Сократите дробь:

а) $\frac{8a^2c}{12ac}$;

в) $\frac{a(6-3)}{5(6-3)}$;

д) $\frac{a^2-25}{a^2-10a+25}$;

ж) $\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$;

б) $\frac{7x^3y^2}{21x^2y^3}$;

г) $\frac{9x^2+45xy}{x+5y}$;

е) $\frac{a-b}{a^3-b^3}$;

з) $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.

19. Найдите значение дроби:

а) $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$ при $a = -2$, $b = -0,1$;

б) $\frac{x^2-6xy+9y^2}{4x^2-12xy}$ при $x = -0,2$, $y = -0,6$.

20. Какой из графиков, изображенных на рисунке 1, является графиком функции $y = \frac{(2-x)^2}{x-2}$.

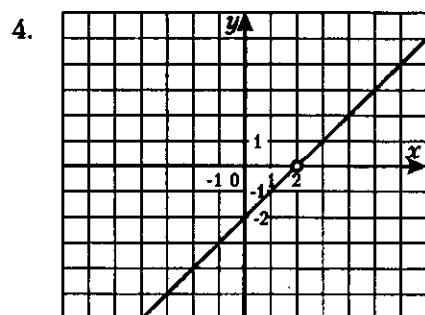
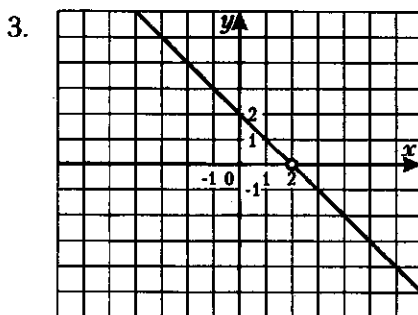
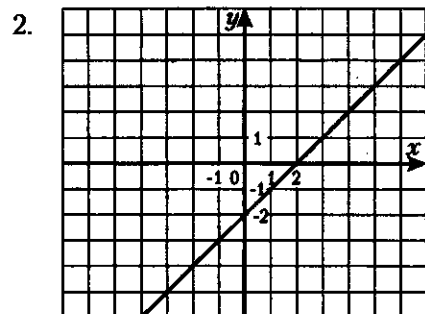
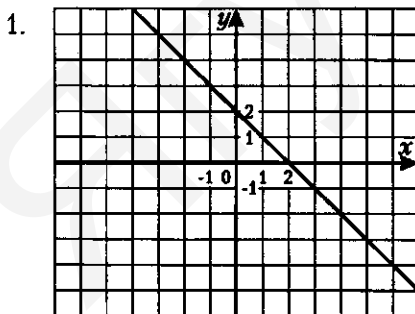


Рис. 1

21. Упростите выражение:

а) $\frac{a-2}{2-a}$;

в) $\frac{(-a-2)^2}{a+2}$;

д) $\frac{a-2}{(2-a)^2}$;

б) $\frac{(a-2)^2}{2-a}$;

г) $\frac{(a-2)^2}{(2-a)^2}$;

е) $\frac{(a+2)^2}{(-a-2)^2}$.

22. Сократите дробь:

а) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

б) $\frac{(2c-6d)^2}{c-3d}$;

в) $\frac{(3x-6y)^2}{5x-10y}$;

г) $\frac{9x^2-y^2}{(15x-5y)^2}$.

23. Докажите, что значение дроби не зависит от n , где n – натуральное число:

а) $\frac{5^{n+2}+5^{n+1}-5^n}{5^{n+2}-5^n}$;

б) $\frac{27^{n+1}-3^{n+3}}{9 \cdot 3^n(3^{2n}-1)}$.

2. Сумма и разность дробей

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Пример 1. Выполним сложение дробей

$$\frac{6a-7b}{15ab} + \frac{9a-3b}{15ab} = \frac{6a-7b+9a-3b}{15ab} = \frac{15a-10b}{15ab} = \frac{5(3a-2b)}{15ab} = \frac{3a-2b}{3ab}.$$

Пример 2. Выполним вычитание дробей

$$\frac{3a^2+27}{15a-45} - \frac{18a}{15a-45} = \frac{3a^2+27-18a}{15a-45} = \frac{3(a^2-6a+9)}{15(a-3)} = \frac{3(a-3)^2}{15(a-3)} = \frac{a-3}{5}.$$

24. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{a}{5} + \frac{b}{5}$;

б) $\frac{6a^2}{x} - \frac{14a^2}{x}$;

в) $\frac{a+b}{8} - \frac{b}{8}$;

г) $\frac{3a-x}{b} + \frac{2x}{b}$.

25. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{b}{3a} - \frac{b-2a}{3a}$;

в) $\frac{3a-b}{4a} - \frac{2a+6b}{4a} + \frac{a-5b}{4a}$;

б) $\frac{14c-35}{6c} + \frac{5-2c}{6c}$;

г) $\frac{2x-3y}{4xy} + \frac{11y-4x}{4xy} - \frac{2x+8y}{4xy}$.

26. Упростите выражение, используя тождества: $\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}$; $(a-b)^2 = (b-a)^2$:

а) $\frac{25}{x-5} - \frac{x^2}{x-5}$; в) $\frac{3m}{m-n} + \frac{3n}{n-m}$; д) $\frac{2a+b}{(a-b)^2} + \frac{2b-5a}{(b-a)^2}$;

б) $\frac{4a-1}{a^2-b^2} - \frac{4b-1}{a^2-b^2}$; г) $\frac{a}{a-3} - \frac{6}{3-a}$; е) $\frac{13a-6b}{(a-b)^2} - \frac{11a+4b}{(b-a)^2}$.

27. Преобразуйте выражение:

а) $\frac{a^2}{(a-6)^2} - \frac{36}{(6-a)^2}$; в) $\frac{x^2}{x^2-25} - \frac{5(2x-5)}{x^2-25}$;

б) $\frac{x^2+36}{(x-6)^2} + \frac{12x}{(6-x)^2}$; г) $\frac{81-2ab}{(a-9)^2} + \frac{2ab-a^2}{(9-a)^2}$.

28. Используя тождество $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, представьте дробь в виде суммы дробей:

а) $\frac{2a+b}{x}$; б) $\frac{3a^2+a^3}{6a^4}$; в) $\frac{x^2+12y^2}{3xy}$; г) $\frac{12a+3y^2}{6ay}$.

29. Представьте дробь $\frac{4n^2+3n+6}{n}$ в виде суммы двучлена и дроби. Выясните, при каких натуральных n данная дробь принимает натуральные значения.

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Выполняется по правилу $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

Пример 1. $\frac{5}{2x^3y^4} + \frac{3}{6x^4y^2} = \frac{5 \cdot 3x}{6x^4y^4} + \frac{3y^2}{6x^4y^4} = \frac{15x+3y^2}{6x^4y^4}$.

Пример 2. $\frac{4}{x+3} - \frac{5}{x-3} = \frac{4(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{5(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{4x-12-5x-15}{(x+3)(x-3)} = \frac{-x-27}{(x+3)(x-3)}$.

30. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a}{3} + \frac{b}{2}$; в) $\frac{2xy-1}{6x^2} - \frac{3y-x}{4x^3}$; д) $a-3-\frac{a+b}{3}$;

б) $\frac{b^2}{a} - \frac{a}{b}$; г) $x + \frac{1}{y}$; е) $\frac{2a^2-1}{a} - a + 5$.

31. Преобразуйте в дробь выражение:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{a-b}{a} + \frac{a}{a+b}; & \text{в) } \frac{n}{m+n} - \frac{m}{m-n}; & \text{д) } \frac{x}{x-a} - \frac{a^2}{ax-x^2}; \\ \text{б) } \frac{x+3}{x-2} - \frac{x-1}{x}; & \text{г) } \frac{a}{a+2} - \frac{a}{a-2}; & \text{е) } \frac{a}{b-a} + \frac{b^2-3ab}{b^2-a^2}. \end{array}$$

32. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x+4}{x^2-2x} - \frac{x}{x^2-4}; & \text{в) } \frac{4a^2+9}{2a+3} - 2a-3; \\ \text{б) } \frac{1}{x^2-4x+4} + \frac{1}{2x-x^2}; & \text{г) } \frac{a^2}{a^2-4} - \frac{a}{a-2} - \frac{2}{a+2}. \end{array}$$

33. Выполните действия:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x^2-4x}{x^2-16} - \frac{2x}{x-4}; & \text{в) } \frac{3}{x+3} + \frac{3}{x^2-3x} + \frac{2x}{9-x^2}; \\ \text{б) } \frac{a-2}{a^2+2a+4} + \frac{6a}{a^3-8}; & \text{г) } \frac{2a+1}{a^3-1} + \frac{a}{a^2+a+1} + \frac{1}{1-a}. \end{array}$$

3. Произведение и частное дробей

Умножение дробей. Возведение дроби в степень

Правило: 1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, c \neq 0;$

$$2) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$\text{Пример: 1) } \frac{36x^6}{y^8} \cdot \frac{y^2}{9x^6} = \frac{36x^6 \cdot y^2}{y^8 \cdot 9x^6} = \frac{4}{y^6};$$

$$2) \frac{y^2-y}{2xy} \cdot \frac{2x}{y^2-1} = \frac{(y^2-y) \cdot 2x}{2xy \cdot (y^2-1)} = \frac{y(y-1) \cdot 2x}{2xy(y-1)(y+1)} = \frac{1}{y+1};$$

$$3) \left(\frac{3a^3}{b^5}\right)^4 = \frac{(3a^3)^4}{(b^5)^4} = \frac{81a^{12}}{b^{20}}.$$

34. Выполните действие:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{16x^4}{25} \cdot \frac{5}{4x^6}; & \text{в) } \frac{y^3-y^2}{4xy} \cdot \frac{8x}{y^2-1}; & \text{д) } -a^2b^2 \cdot \left(-\frac{13x^2}{a^3b^2}\right); \\ \text{б) } (3x-9) \cdot \frac{x^2}{x-3}; & \text{г) } \frac{72x^5}{25y^6} \cdot \left(-\frac{2,5y^5}{16x^4}\right); & \text{е) } \frac{m-n}{mn} \cdot \frac{3mn}{mn-m^2}. \end{array}$$

35. Выполните умножение:

а) $(6a-30b) \cdot \frac{4}{a^2-25b^2}$;

в) $\frac{a}{3a^2-12} \cdot (a^2+4a+4)$;

б) $(x^2-4) \cdot \frac{2x}{(x-2)^2}$;

г) $\frac{2xy}{x^2-6xy+9y^2} \cdot (x^2-9y^2)$.

36. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a^2b^2}{a+a^3} \cdot \frac{a^3+a^5}{a^2b^3}$;

в) $\frac{a^2-16}{10ax} \cdot \frac{5x}{3a+12}$;

б) $\frac{12a}{x^3-x^2} \cdot \frac{4x-4}{3ax}$;

г) $\frac{b-a}{a} \cdot \frac{4a^2b}{a^2-b^2}$.

4. Деление дробей

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$$

Пример 1. $\frac{8a^4}{b^5} : \frac{16a^3}{b^4} = \frac{8a^4}{b^5} \cdot \frac{b^4}{16a^3} = \frac{a}{2b}$.

Пример 2. $\frac{x^2-4}{x} : \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2) \cdot (x-2)}{x(x+2)} = \frac{(x-2)^2}{x}$.

37. Выполните деление:

а) $\frac{10m}{6n} : \frac{15m^2}{8}$;

в) $\frac{11x}{8y^2} : (44x^2y)$;

д) $\frac{2x-1}{x^2-6x+9} : \frac{2-4x}{x^2-3x}$;

б) $\frac{28}{9x^3} : \frac{14x}{3y}$;

г) $-\frac{4a^2}{5c^3} : \left(-\frac{a^3}{10c^4}\right)$;

е) $\frac{2a-4}{a^2+4} : \frac{a^2-4a+4}{a^4-16}$.

38. Представьте выражение в виде дроби и сократите ее:

а) $(x+4y) : (x^2-16y^2)$;

в) $(x^2-25y^2) : (x^2+10xy+25y^2)$;

б) $(a^2-8ab+16b^2) : (a^2-16b^2)$;

г) $(a-4b)^2 : (32b^2-2a^2)$.

39. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2+ab+b^2}{x-2} : \frac{a^3-b^3}{x^2-4}$;

г) $\frac{2m+6n}{nm} : (m^2+6mn+9n^2)$;

б) $\frac{ax^2-9a}{x^3+8} : \frac{x-3}{2x+4}$;

д) $\frac{a^2-4}{4+4a+a^2} : \frac{16-8a}{2x+ax}$;

в) $-\frac{a^3+7b}{3b} : \frac{49-a^2}{9b^2}$;

е) $\frac{a+1}{a^3-1} : \frac{a^2-1}{a^2+a+1}$.

5. Преобразование рациональных выражений

Перед выполнением упражнений надо внимательно прочитать соответствующий пункт учебника.

40. Выполните действия:

$$\text{а) } \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{в) } \frac{a}{b} - \frac{a^2 - b^2}{b^2} : \frac{a+b}{b};$$

$$\text{б) } \left(\frac{x}{x-1} - 1 \right) \cdot \frac{xy-y}{x};$$

$$\text{г) } \left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \right) : \frac{12x}{x^2+6x+9}.$$

41. Упростите выражение:

$$\text{а) } \left(\frac{b-a}{3a} \right)^2 \cdot \left(\frac{9a}{a-b} + \frac{9a}{b} \right);$$

$$\text{в) } \frac{4x^2-9}{1-6x+9x^2} : \frac{2x-3}{3x-1} + \frac{4-x}{1-3x};$$

$$\text{б) } \left(a+b - \frac{2ab}{a+b} \right) \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

$$\text{г) } \left(b + \frac{5+b^2}{2-b} \right) \cdot \frac{4-4b+b^2}{2b+5}.$$

42. а) Являются ли тождественно равными выражения $\frac{4a^2}{a^2-4} \cdot \frac{a+2}{2a}$ и $2 + \frac{4}{a-2}$?

б) Упростите выражение $\left(x - \frac{2x}{x+2} \right) \cdot \frac{x^2-4}{x^2}$ и найдите его значение при $x = -1,3$.

6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

График называется гиперболой, которая состоит из двух ветвей.

При $k > 0$ гипербола расположена в I и III четвертях.

При $k < 0$ гипербола расположена во II и IV четвертях координатной плоскости.

43. Функция задана формулой $y = \frac{16}{x}$.

Заполните таблицу и постройте график функции:

x	1	2	4	8	12	16	-1	-2	-4	-8	-12	-16
y												

44. Обратная пропорциональность задана формулой $y = -\frac{10}{x}$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 0,1; - 0,02; - 100. Найдите значение аргумента, соответствующее значению функции, равному 0,05; 10; - 20.

45. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку:

- а) $A(8; 1,25)$; б) $B\left(1\frac{2}{3}; 1\frac{4}{5}\right)$; в) $C(-500; 0,002)$.

46. Известно, что график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-4; -0,25)$. Проходит ли это график через точку:

- а) $B(-8; -0,125)$; б) $C(50; -0,02)$; в) $D(-40; -0,05)$?

47. На рисунке построены графики функций. Задайте эти функции формулами.

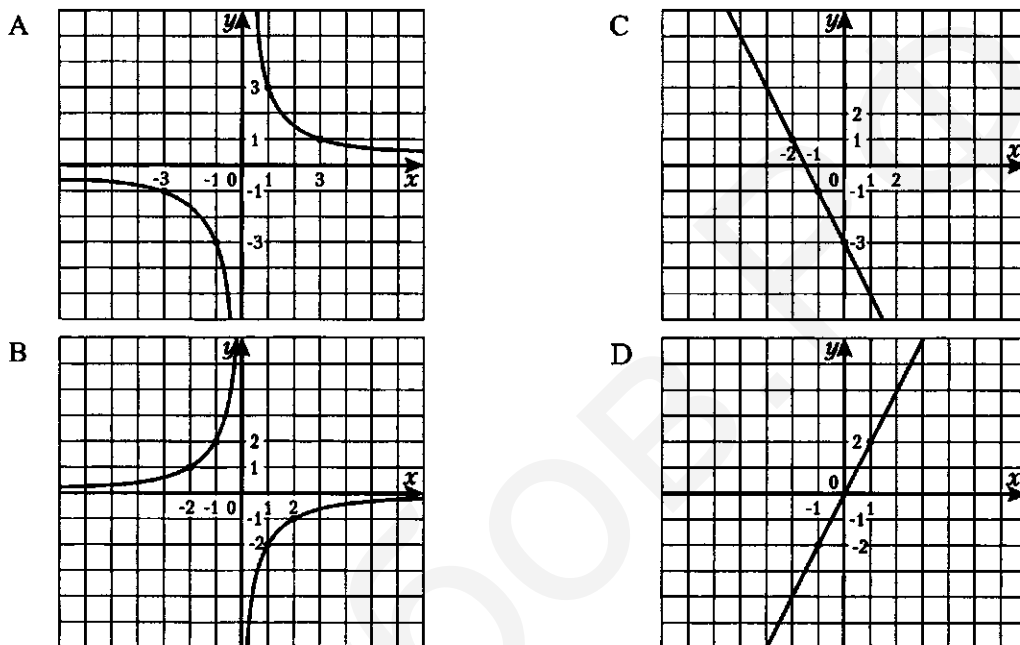


Рис. 2

A	B	C	D

48. Постройте график функции:

а) $y = \frac{32}{(x+1)^2 - (x-1)^2}$;

б) $y = \frac{16}{(2-x)^2 - (2+x)^2}$;

в) $y = \frac{x+4}{x^2 + 8x + 16}$.

Тест 1. Рациональные дроби

Вариант 1

Часть 1

1. Произведение дробей $\frac{54x^7}{y^8} \cdot \frac{y^2}{9x^7}$ можно заменить дробью

1) $\frac{6}{y^4}$;

2) $\frac{6}{y^6}$;

3) $\frac{6}{y^6x}$;

4) $\frac{8}{y^{10}}$.

2. Частное $(36a^4b^6) : \frac{48a^6}{b^2}$ равно дроби

1) $\frac{9b^2}{a^2}$;

2) $\frac{3b^8}{4a^2}$;

3) $\frac{3b^6}{4a^2}$;

4) $\frac{4a^2}{3b^3}$.

3. Выполните действие $\frac{7x^2y^4}{4} : (14x^4y^4)$.

1) $\frac{1}{8x^2}$;

2) $\frac{49x^2}{2}$;

3) $\frac{y^8}{4x^6}$;

4) $\frac{1}{49x^2}$.

4. Произведение $\frac{a+4b}{a-b} \cdot \frac{a^2-b^2}{5a+20b}$ тождественно равно

1) $\frac{a+b}{5}$;

2) $\frac{a-b}{5a+5b}$;

3) $\frac{a+b}{5(a-b)}$;

4) $\frac{a-b}{5}$.

5. Функция задана формулой $y = \frac{8}{x}$.

Какие из данных точек $A(-4; 2)$, $B(4; 2)$, $C(-8; -1)$, $D(-2; 4)$ принадлежат графику функции?

1) A, B ;

2) B, C ;

3) A, D ;

4) C, D .

6. Выполните действие $\frac{a^2-4a+4}{a^2-16} : \frac{2-a}{a^2-4a}$.

Ответ: _____

7. Упростите выражение $\left(\frac{y-x}{4x}\right)^2 \cdot \left(\frac{16x}{x-y} + \frac{16x}{y}\right)$.

Ответ: _____

Часть 2

К заданиям 8–10 запишите решение.

8. Упростите выражение $\left(4x - \frac{12x}{x-2}\right) : \left(x - \frac{8x-25}{x-2}\right)$ и найдите его значение при $x = -\frac{1}{3}$

9. Постройте график функции $y = \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$.

10. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку A . Найдите k , если $A(k^2; -0,25)$

Вариант 2

Часть 1

1. Частное дробей $\frac{63a^9}{c^8} : \frac{7a^3}{c^6}$ можно заменить дробью

1) $\frac{9a^3}{c^2}$;

2) $\frac{9a^6}{c^2}$;

3) $\frac{9a^{12}}{c^{14}}$;

4) $\frac{a^6}{9c^2}$.

2. Произведение $\frac{x^3}{42y^4} \cdot 14x^2y^3$ равно

1) $\frac{x^5}{3y}$;

2) $\frac{x^6}{3y}$;

3) $\frac{3x}{y}$;

4) $\frac{x^5}{y}$.

3. Выполните действие $(64x^5y^3) : \frac{80x^{10}}{y^6}$

1) $\frac{4x^2}{5y^3}$;

2) $\frac{4y^3}{5x^5}$;

3) $\frac{4y^9}{5x^5}$;

4) $\frac{4y^{18}}{5x^2}$.

4. Произведение $\frac{a-4b}{a+2} \cdot \frac{a^2-4}{3a-12b}$ тождественно равно дроби

1) $\frac{a-2}{3}$;

2) $\frac{a-2}{3a-3b}$;

3) $\frac{a+2}{3(a-b)}$;

4) $\frac{a+2}{3}$.

5. Функция задана формулой $y = \frac{-15}{x}$.

Какие из данных точек $A(3; -5)$, $B(-3; -5)$, $C(-5; -3)$, $D(-1; 15)$ принадлежат графику функции?

1) A, B ;

2) A, D ;

3) B, C ;

4) C, D .

6. Выполните действие $\frac{x^2-16}{x^2-4x+4} : \frac{x^2-4x}{x-2}$.

Ответ: _____

7. Упростите выражение $\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}-1\right) \cdot \frac{4ab}{a-b}$.

Ответ: _____

Часть 2

К заданиям 8–10 запишите решение.

8. Упростите выражение $\left(x - \frac{5x-16}{x-3}\right) : \left(5x - \frac{5x}{x-3}\right)$ и найдите его значение при $x = -0,2$.

9. Постройте график функции $y = \frac{6x-6}{x^2-2x+1}$.

10. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку B . Найдите k , если $B\left(-k^2; \frac{1}{9}\right)$.

II. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Действительные числа

1. Рациональные числа

49. Верно ли, что:

- а) $-6 \in N; -6 \in Z; -6 \in Q$;
- б) $6,7 \notin N; 6,7 \in Z; 6,7 \in Q$;
- в) $30 \in N; 30 \in Z; 30 \in Q$?

50. Представьте в виде отношения целого числа к натуральному несколькими способами числа:

$$2\frac{4}{5}; \quad 0,7; \quad -5\frac{3}{4}; \quad -19; \quad 0.$$

51. Представьте в виде дроби с наименьшим натуральным знаменателем числа:

$$35; \quad -43; \quad 5,3; \quad -0,9; \quad 14\frac{1}{6}; \quad -\frac{4}{9}.$$

52. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число:

$$\begin{array}{lllll} \text{а) } \frac{2}{3}; & \text{в) } \frac{3}{7}; & \text{д) } -\frac{4}{15}; & \text{ж) } -18; & \text{и) } -1\frac{7}{40}; \\ \text{б) } \frac{5}{12}; & \text{г) } -\frac{19}{9}; & \text{е) } 12,27; & \text{з) } \frac{5}{16}; & \text{к) } 2\frac{5}{11}. \end{array}$$

53. Сравните рациональные числа:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 2,014 \text{ и } 2,104; & \text{в) } -3,27 \text{ и } -3,47; & \text{д) } -1,176 \text{ и } -1\frac{7}{40}; \\ \text{б) } -0,003 \text{ и } 0,001; & \text{г) } \frac{3}{8} \text{ и } 0,375; & \text{е) } \frac{12}{13} \text{ и } \frac{13}{14}. \end{array}$$

54. Укажите какое-либо число, которое:

- а) больше $\frac{1}{9}$, но меньше $\frac{1}{8}$;
- б) больше $\frac{1}{10}$, но меньше $\frac{1}{9}$.

2. Иррациональные числа

55. Приведите пример:

- а) рационального числа;
- б) иррационального числа.

56. Верно ли, что:

- а) каждое иррациональное число является действительным;
- б) каждое действительное число является рациональным;
- в) каждое натуральное число является рациональным;
- г) любая бесконечная десятичная дробь является действительным числом?

57. Среди чисел:

0; $\frac{1}{9}$; 0,57; $-2,(34)$; 0,71711711171111...; $5,3(41)$; 516; π

укажите рациональные и иррациональные.

58. Какое из чисел больше:

- а) $2,(57)$ или 2,57;
- в) $1\frac{3}{7}$ или 1,4286;
- д) $2,(375)$ и $2\frac{3}{8}$;
- б) $-5,4(8)$ или $-5,48$;
- г) $3\frac{1}{7}$ и 3,142;
- е) $-4,(16)$ и $-4\frac{4}{25}$?

59. Найдите расстояние между точками A и B координатной прямой, если:

- а) $A(8,65)$ и $B(3,15)$;
- б) $A\left(-6\frac{1}{3}\right)$ и $B\left(3;\frac{2}{3}\right)$.

60. Расположите в порядке возрастания числа:

5,62; $3,(6)$; $-4,75\dots$; $-4,64\dots$.

61. Найдите приближенное значение выражения $a + b$, где $a = 2,0549\dots$ и $b = 3,0620\dots$, округлив предварительно a и b :

- а) до десятых;
- б) до сотых;
- в) до тысячных.

62. Найдите приближенное значение выражения $a - b$, где $a = 58,789\dots$ и $b = 45,234\dots$, округлив предварительно a и b :

- а) до десятых;
- б) до сотых.

3. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Определение 1. Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a .

Определение 2. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Обозначение арифметического квадратного корня из числа a : $\sqrt{a}$

Примеры: $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1,44} = 1,2$; $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

$$\sqrt{a} = b, b^2 = a, b \geq 0, a \geq 0.$$

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0.$$

63. Докажите, что:

- а) число 7 есть арифметический квадратный корень из 49;
- б) число 0,5 есть арифметический квадратный корень из 0,25;
- в) число -6 не является арифметическим квадратным корнем из числа 36;
- г) число 0,7 не является арифметическим квадратным корнем из 4,9.

64. Имеет ли смысл выражение:

- а) $\sqrt{-81}$;
- б) $-\sqrt{144}$;
- в) $\sqrt{-36 \cdot (-4)}$;
- г) $\sqrt{121}$;
- д) $\sqrt{(-20)^2}$;
- е) $\sqrt{25 \cdot (-4)}$?

65. Найдите значение корня:

- а) $\sqrt{400}$;
- б) $\sqrt{\frac{4}{49}}$;
- в) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$;
- г) $\sqrt{0,81}$;
- д) $\sqrt{3600}$.

66. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{a+b}$ при $a=49; b=-13$;
- б) $\sqrt{5x-6}$ при $x=14; x=25,4$;
- в) $x-\sqrt{x}$ при $x=0,04; 0,49; 1; 36; 121$.

67. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{169} + \sqrt{0,81}$;
- б) $(5\sqrt{3})^2$;
- в) $\sqrt{0,25 \cdot 16} - 7\sqrt{\frac{1}{49}}$.

68. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{x}=6$;
- б) $3\sqrt{x}=0$;
- в) $\sqrt{x}-12=0$;
- г) $\sqrt{x}=0,3$;
- д) $5\sqrt{x}=1$;
- е) $4\sqrt{x}-3=0$;
- ж) $\sqrt{x}+3=0$;
- з) $\sqrt{10x-12}=13$.

69. Запишите без знака модуля:

- а) $|15| =$ _____
- б) $|-16| =$ _____
- в) $|0| =$ _____
- г) $|a^2| =$ _____
- д) $|a^3|$, где $a > 0$ _____
- е) $|a^3|$, где $a < 0$ _____

4. Уравнение $x^2 = a$

Это уравнение имеет решения при $a \geq 0$.

Если $a = 0$, $x^2 = 0$ имеет корень $x = 0$.

Если $a > 0$, то $x^2 = a$ имеет два корня $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$.

Примеры: 1) $x^2 = 25$;

$$x_1 = \sqrt{25} = 5,$$

$$x_2 = -\sqrt{25} = -5.$$

2) $x^2 = 7$

$$x_1 = \sqrt{7},$$

$$x_2 = -\sqrt{7}.$$

70. Имеет ли корни уравнение:

а) $x^2 = 64$;

б) $x^2 = 19$;

в) $x^2 = 0$;

г) $x^2 = -36$?

71. Решите уравнение:

а) $x^2 = 121$;

д) $60 + y^2 = 64$;

и) $0,3x^2 = 30$;

н) $(x-6)^2 = 25$;

б) $x^2 = 0,81$;

е) $20 + x^2 = 16$;

к) $x^3 - 4x = 0$;

о) $(x+4)^2 = 36$;

в) $x^2 = 27$;

ж) $\frac{1}{5}x^2 = 20$;

л) $x^3 - 15x = 0$;

п) $(x-7)^2 = 5$;

г) $x^2 = 3,6$;

з) $-4x^2 = \frac{1}{25}$;

м) $x^3 + 36x = 0$;

р) $(x+3)^2 = 8$.

72. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $5\sqrt{a}$;

б) $-6\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{7a}$;

г) $\sqrt{-11b}$?

73. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{9})^2$;

в) $-3\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$;

д) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$;

ж) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)^2$.

б) $(\sqrt{7})^2$;

г) $0,3(-\sqrt{7})^2$;

е) $(-\sqrt{27})^2$;

74. Вычислите:

а) $0,64 + 2(\sqrt{0,5})^2$;

в) $(2\sqrt{7})^2 + (-4\sqrt{3})^2$;

б) $(3\sqrt{12})^2 - \sqrt{900}$;

г) $\sqrt{1,69} - 2(\sqrt{0,9})^2$.

75. Найдите значение выражения $\frac{|x|}{x}$:

а) при $x = -9; -4; 2; 10; 125$;

б) при $x > 0$;

в) при $x < 0$.

5. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Знать форму графика (смотри рис. 3)

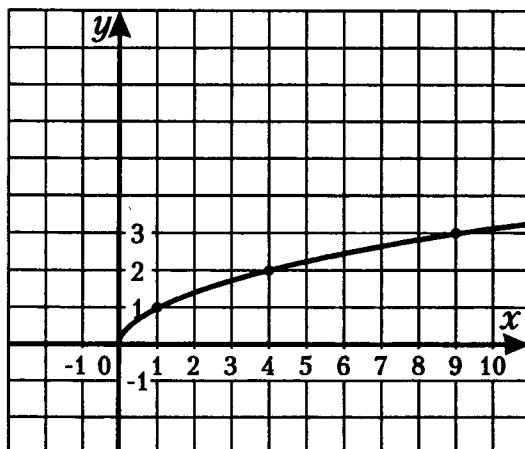


Рис. 3

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

1. Если $x = 0$, то $y = 0$. Начало координат принадлежит графику функции.
2. Если $x > 0$, то $y > 0$. График расположен в первой координатной четверти.
3. Большему значению аргумента соответствует большее значение функции; график функции с увеличением x идет вверх. $5 > 4$, следовательно, $\sqrt{5} > \sqrt{4}$.
4. График функции $y = \sqrt{x}$ симметричен графику функции $y = x^2$ при $x \geq 0$ относительно прямой $y = x$.

76. По графику функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 3) найдите:

а) значение $\sqrt{x}$ при $x = 3,5; 6; 8,5$;

б) значение x при $y = 1,5; 2,5; 2,7$.

77. Принадлежат ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точки:

а) $A(36; 6)$;

б) $B(100; -10)$;

в) $C(-81; 9)$;

г) $D(0,25; 0,5)$?

78. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямая:

а) $y = \frac{1}{2}$;

б) $y = 9$;

в) $y = 100$;

г) $y = -100$?

79. Укажите область определения функции и постройте схематически график:

а) $y = \sqrt{-x}$;

в) $y = -\sqrt{x}$;

д) $y = \sqrt{x+2}$;

б) $y = \sqrt{|x|}$;

г) $y = \sqrt{x-2}$;

е) $y = (\sqrt{x})^2$.

80. Сравните:

а) $\sqrt{1,4}$ и $\sqrt{1,6}$; в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{6}}$; д) $\sqrt{3,7}$ и $\sqrt{3\frac{1}{3}}$.

б) $\sqrt{29}$ и $\sqrt{30}$; г) $\sqrt{0,17}$ и $0,4$;

81. Расположите в порядке:

а) возрастания числа: $\sqrt{2,7}$; $\sqrt{9,4}$; $\sqrt{0,8}$; $\sqrt{0,4}$; $\sqrt{19,5}$;

б) убывания числа: $\sqrt{18}$; $\sqrt{13}$; 5 ; $\sqrt{0,3}$; $\sqrt{17,6}$.

82. Найдите значение выражения:

а) $(-2\sqrt{6})^2 - 2(\sqrt{5})^2$;

в) $0,5\sqrt{1,44} + 3\sqrt{0,64}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{27}\right)^2 - 0,2(\sqrt{30})^2$;

г) $\left(-6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 10\sqrt{0,81}$.

83. Решите уравнение:

а) $x^2 = 5$;

б) $\sqrt{x} = 5$;

в) $2x^2 = \frac{1}{8}$;

г) $3\sqrt{x} = \frac{1}{3}$.

Тест 2. Арифметический квадратный корень

Вариант 1

1. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется

- 1) число квадрат которого равен a ;
- 2) неотрицательное число, квадрат которого равен a ;
- 3) корни уравнения $x^2 = a$;
- 4) отрицательный корень уравнения $x^2 = a$.

2. Значение выражения $(-5\sqrt{3})^2$ равно

- 1) -75 ; 2) -10 ; 3) 30 ; 4) 75 .

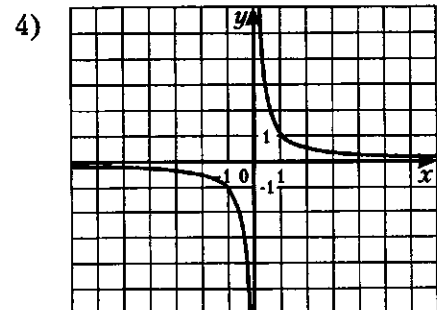
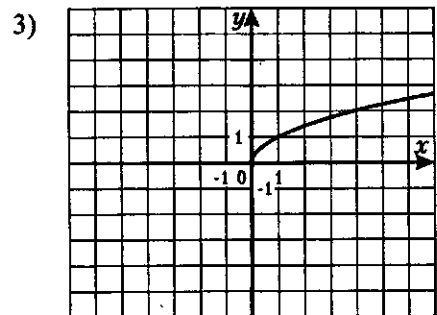
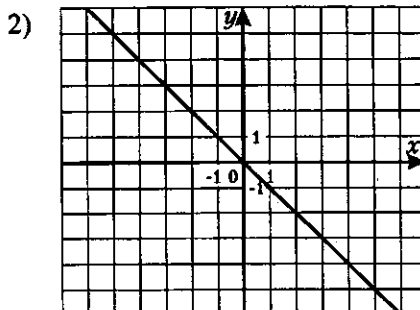
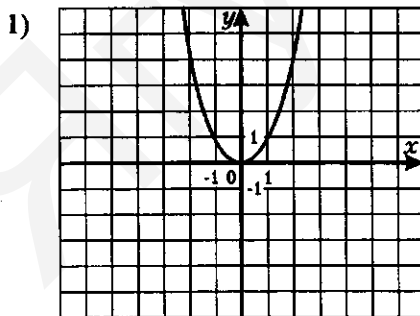
3. Решите уравнение $6x^2 = \frac{1}{6}$.

- 1) $-1,1$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}$.

4. Расположите в порядке убывания числа: $0,4; \sqrt{0,4}; \sqrt{\frac{1}{4}}$.

- 1) $\sqrt{0,4}; \sqrt{\frac{1}{4}}; 0,4$; 3) $0,4; \sqrt{0,4}; \sqrt{\frac{1}{4}}$;
- 2) $0,4; \sqrt{\frac{1}{4}}; \sqrt{0,4}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{4}}; 0,4; \sqrt{0,4}$.

5. График функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке



6. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{25^2 - 24^2}{25}}$.

Ответ: _____

7. Укажите все целые числа, расположенные между числами 4 и $\sqrt{37}$.

Ответ: _____

ЯГубов.РФ

Вариант 2

1. Квадратным корнем из числа a называется

- 1) неотрицательное число, квадрат которого равен a ;
- 2) число, квадрат которого равен a ;
- 3) положительный корень уравнения $x^2 = a$;
- 4) отрицательное число, квадрат которого равен a .

2. Значение выражения $(-4\sqrt{5})^2$ равно

- 1) 20;
- 2) -80;
- 3) 80;
- 4) 40.

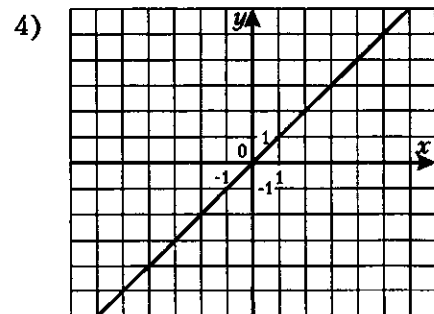
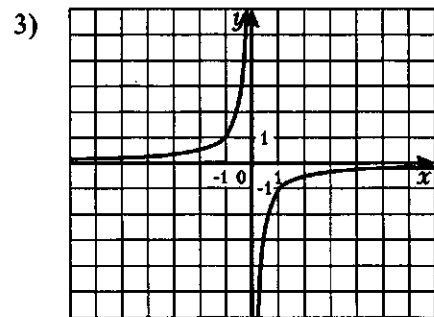
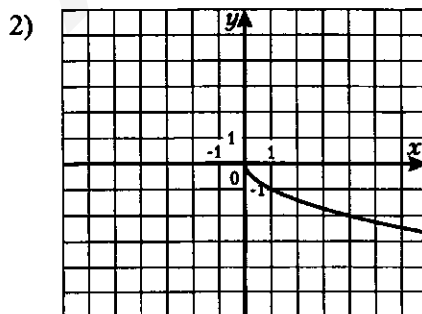
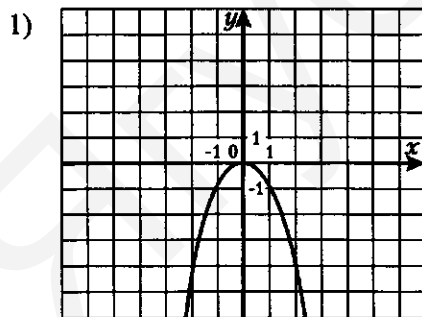
3. Решите уравнение $11x^2 = \frac{1}{11}$.

- 1) 1;
- 2) -1;
- 3) $\frac{1}{11}$;
- 4) $-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}$.

4. Расположите в порядке возрастания числа: $0,7; \sqrt{0,7}; \sqrt{\frac{1}{7}}$.

- 1) $0,7; \sqrt{\frac{1}{7}}; \sqrt{0,7}$;
- 2) $0,7; \sqrt{0,7}; \sqrt{\frac{1}{7}}$;
- 3) $\sqrt{\frac{1}{7}}; 0,7; \sqrt{0,7}$;
- 4) $\sqrt{\frac{1}{7}}; \sqrt{0,7}; 0,7$.

5. График функции $y = -\sqrt{x}$ изображен на рисунке



6. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{26^2 - 10^2}{169}}$.

Ответ: _____

7. Укажите все целые числа, расположенные между числами $\sqrt{15}$

Ответ: _____

ЯГубов.РФ

6. Свойства арифметического квадратного корня

Квадратный корень из произведения и дроби

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$;

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$;

3. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$;

4. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Примеры: 1) $\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{81} = 6 \cdot 9 = 54$;

2) $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$;

3) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$;

4) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{90}{10}} = \sqrt{9} = 3$.

84. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2,25 \cdot 144}$;

в) $\sqrt{1,21 \cdot 0,04 \cdot 0,01}$;

д) $\sqrt{640 \cdot 810}$;

ж) $\sqrt{2,5 \cdot 16,9}$;

б) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$;

г) $\sqrt{3\frac{6}{25} \cdot 2\frac{46}{49}}$;

е) $\sqrt{108 \cdot 48}$;

з) $\sqrt{19,6 \cdot 0,4}$.

85. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{20^2 - 16^2}$;

в) $\sqrt{2,5^2 - 2,4^2}$;

д) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$;

ж) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2400}}$;

б) $\sqrt{12^2 + 5^2}$;

г) $\sqrt{17^2 - 2 \cdot 17 \cdot 13 + 13^2}$;

е) $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}}$;

з) $\frac{\sqrt{0,44}}{\sqrt{11}}$.

Квадратный корень из степени

$$\sqrt{x^2} = |x|;$$

$$\sqrt{523^2} = |523| = 523;$$

$$\sqrt{(-452)^2} = |-452| = 452;$$

$$\sqrt{a^{20}} = \sqrt{(a^{10})^2} = |a^{10}| = a^{10}, \text{ т.к. } a^{10} \geq 0 \text{ при любом значении } a;$$

$$\sqrt{a^{14}} = \sqrt{(a^7)^2} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{при } a \geq 0 \\ -a^7, & \text{при } a < 0 \end{cases};$$

$$\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2} = |a^k|.$$

86. Вычислите:

а) $2\sqrt{(-2,3)^2} =$ _____

б) $\sqrt{4,8^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} =$ _____

в) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + 2 - \sqrt{3} =$ _____

г) $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} - \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} =$ _____

д) $\sqrt{(-6)^4} =$ _____

е) $\sqrt{(-3)^6} =$ _____

87. Упростите выражение:

а) $3\sqrt{x^2} - 5\sqrt{x^2} =$ _____
при $x \geq 0$;

б) $-5\sqrt{y^2} + 6\sqrt{y^2} =$ _____
при $y < 0$;

в) $0,4\sqrt{16a^2} =$ _____
при $a < 0$;

г) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - x + 3 =$ _____
при $x \geq 1$.

7. Вынесение множителя за знак корня. Внесение множителя под знак корня

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Замена $\sqrt{72}$ на $6\sqrt{2}$ называют вынесением множителя за знак корня.

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50}.$$

Замена $5\sqrt{2}$ на $\sqrt{50}$ называют внесением множителя под знак корня.

$$a\sqrt{3} = \begin{cases} \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3a^2}, & \text{если } a \geq 0 \\ -|a|\sqrt{3} = -\sqrt{|a|^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3a^2}, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

88. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{24}$;

в) $-\frac{3}{4}\sqrt{48}$;

д) $\sqrt{32b^6x}$;

б) $\sqrt{300}$;

г) $\sqrt{27b^5a^8}$;

е) $\sqrt{-44a^{12}b^3}$.

89. Внесите множитель под знак корня:

а) $7\sqrt{3}$; в) $6\sqrt{x}$; д) $\frac{1}{y^3}\sqrt{y}$; ж) $2a\sqrt{-\frac{4}{a}}$; и) $-5x^2\sqrt{-\frac{3}{x^3}}$;
б) $-10\sqrt{2}$; г) $-4\sqrt{2a}$; е) $-\frac{1}{3}x\sqrt{27x}$; з) $-4x\sqrt{-\frac{x}{4}}$; к) $6x^2\sqrt{-\frac{x^3}{12}}$.

90. Сравните:

а) $4\sqrt{3}$ и $\sqrt{75}$; б) $\sqrt{147}$ и $7\sqrt{2}$; в) $\sqrt{29}$ и $4\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ и $10\sqrt{\frac{1}{2}}$.

8. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

91. Упростите выражение:

а) $4\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$; в) $(\sqrt{5} - 2)^2$; д) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})$.
б) $\sqrt{3}(2\sqrt{3} + \sqrt{12})$; г) $(\sqrt{3} + 6)^2$;

92. Сократите дробь:

а) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{5}}$; в) $\frac{4b - 2}{2\sqrt{b} - \sqrt{2}}$; г) $\frac{9b - 3}{3\sqrt{b} + \sqrt{3}}$.

93. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{20}{2\sqrt{5} - 5}$; д) $\frac{34}{1 + \sqrt{32} - \sqrt{2}}$; ж) $\frac{a + 2\sqrt{a} + 4}{a\sqrt{a} - 8}$.
б) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; г) $\frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; е) $\frac{2 + \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 3}$;

94. Решите уравнение, предварительно упростив его правую часть:

а) $x^2 = \sqrt{\sqrt{20} - 4} \cdot \sqrt{\sqrt{20} + 4}$;
б) $x^2 = (\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}})^2$;
в) $x^2 = (\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}})^2$.

Тест 3. Квадратные корни

Вариант 1

1. Значение какого из следующих выражений является иррациональным числом

- 1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; 2) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{45})$; 4) $(2 - \sqrt{8})^2$?

2. Сократите дробь $\frac{a-25}{\sqrt{a}+5}$.

- 1) $a-5$; 2) $\frac{1}{a-5}$; 3) $\sqrt{a}-5$; 4) $\frac{1}{\sqrt{a}-5}$.

3. Найдите наименьшее среди чисел.

- 1) $5\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{76}$; 4) $6\sqrt{3}$.

4. Выполните действие $(4\sqrt{3} - 2\sqrt{5})\sqrt{3} + \sqrt{60}$.

- 1) 12; 2) $5\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $-\sqrt{15}$.

5. При $a < 0$ выражение $\sqrt{a^{10}b^8}$ можно заменить выражением.

- 1) $-a^5b^4$; 2) a^5b^4 ; 3) $-a^8b^6$; 4) a^8b^6 .

6. Внесите множитель под знак корня в выражении $x\sqrt{-\frac{3}{x}}$.

- 1) $\sqrt{-3x}$; 2) $-\sqrt{3x}$; 3) $\sqrt{3x}$; 4) $-\sqrt{-3x}$.

7. Решите уравнение $x^2 = 6$.

- 1) $-3; 3$; 2) $-\sqrt{3}; \sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{6}; \sqrt{6}$; 4) $-4; 4$.

К заданиям 8–10 запишите решение.

8. Выполните действия $\left(\frac{6\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{3\sqrt{ab}}{36a^2 - b}$ _____

9. Упростите выражение $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ при $x > 3$ _____

10. Найдите значение дроби $\frac{x^2 + 3xy + y^2}{x + y + 1}$ при $x = 2 + \sqrt{5}$ и $y = 2 - \sqrt{5}$ _____

Вариант 2

1. Значение какого из следующих выражений является рациональным числом

- 1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; 2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{5}}$; 3) $\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{3})$; 4) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$?

2. Сократите дробь $\frac{a-49}{7-\sqrt{a}}$.

- 1) $a+7$; 2) $-a-7$; 3) $\sqrt{a}+7$; 4) $-\sqrt{a}-7$.

3. Найдите наибольшее среди чисел.

- 1) $5\sqrt{6}$; 2) $6\sqrt{5}$; 3) $3\sqrt{7}$; 4) $7\sqrt{5}$.

4. Выполните действия $(\sqrt{32}-\sqrt{2})^2 - \sqrt{2,5} \cdot \sqrt{10}$.

- 1) 25; 2) 13; 3) 5; 4) -1.

5. При $a < 0$ выражение $\sqrt{a^{12}b^4}$ можно заменить выражением:

- 1) $-a^6b^2$; 2) a^6b^2 ; 3) $-a^{10}b^2$; 4) $a^{10}b^2$.

6. Внесите множитель под знак корня в выражении $x^2\sqrt{-\frac{5}{x}}$.

- 1) $\sqrt{-5x^3}$; 2) $-\sqrt{-5x^3}$; 3) $\sqrt{5x^3}$; 4) $-\sqrt{5x^3}$.

7. Решите уравнение $2x^2=16$.

- 1) -4; 4; 2) -8; 8; 3) $-\sqrt{8}; \sqrt{8}$; 4) $-\sqrt{14}; \sqrt{14}$.

К заданиям 8–10 запишите решение.

8. Выполните действия $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{3}{\sqrt{b}}\right) : \frac{9a-b}{3\sqrt{ab}}$ _____

9. Упростите выражение $\sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-2x+1}$ при $x > 3$ _____

10. Найдите значение дроби $\frac{x^2-3xy+y^2}{x-y-10}$ при $x=3+\sqrt{5}$ и $y=\sqrt{5}-3$ _____

III. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Неполные квадратные уравнения

Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a , b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Числа a , b , c – коэффициенты квадратного уравнения.

Число a называют первым коэффициентом (старшим), число b – вторым коэффициентом (средним), число c – свободным членом.

Примеры: 1) $2x^2 - 3x + 5 = 0$, $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$;

2) $-3x^2 + \frac{1}{2}x - 4 = 0$, $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -4$;

3) $x^2 - 0,7x + 0,4 = 0$, $a = 1$, $b = -0,7$, $c = 0,4$;

4) $3x^2 + 5x = 0$, $a = 3$, $b = 5$, $c = 0$;

5) $-4x^2 + 6 = 0$, $a = -4$, $b = 0$, $c = 6$;

6) $-6x^2 = 0$, $a = -6$, $b = 0$, $c = 0$;

7) $x^2 + 4x = 0$, $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$.

Если коэффициент $a = 1$, то уравнение имеет вид $x^2 + bx + c = 0$, такое уравнение называют приведенным квадратным уравнением.

Уравнения 3, 7 – приведенные квадратные уравнения.

Если в квадратном уравнении хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.

Так уравнения 4–7 – неполные квадратные уравнения.

Неполные квадратные уравнения имеют вид:

1) $ax^2 + bx = 0$, $c = 0$

2) $ax^2 + c = 0$, $b = 0$

3) $ax^2 = 0$, $b = c = 0$.

Перед решением неполных квадратных уравнений внимательно прочитайте пункт «Неполные квадратные уравнения».

95. Какие из уравнений:

а) $5,2x^2 - 3x + 2 = 0$;

в) $3x - x^2 - 1 = 0$;

д) $5x^2 = 0$;

б) $48x^3 - x^2 + 9 = 0$;

г) $-4x^2 - 13 = 0$;

е) $3x + 4 = 0$.

являются квадратными?

96. Выпишите коэффициенты квадратного уравнения:

1) $6x^2 - 10x + 7 = 0$; $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$;

2) $x^2 - 4x - 3 = 0$; $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$;

3) $-x^2 - 7x + 1 = 0$; $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$;

4) $x^2 + 9x = 0$; $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$;

5) $5x^2 - 40 = 0$; $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$;

6) $8x^2 = 0$; $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$.

Какие из данных уравнений являются приведенными квадратными уравнениями и какие неполными квадратными уравнениями?

97. Найдите корни уравнения:

а) $25x^2 - 16 = 0$; в) $0,1x^2 - 10 = 0$; д) $y^2 - \frac{1}{16} = 0$;
б) $-x^2 + 8 = 0$; г) $5x^2 + 125 = 0$; е) $3z^2 + 1 = 0$.

98. Решите уравнение:

а) $5x^2 - 8x = 0$; в) $10x^2 + 4x = 0$; д) $7y^2 - y = 0$;
б) $-5x^2 + 7x = 0$; г) $4a^2 - 5a = 0$; е) $3y + 4y^2 = 0$.

99. Решите уравнение:

а) $5x^2 - 4x + 9 = 3x^2 + 2x + 9$; г) $(x-2)(x+2) = 2x^2 - 4$; ж) $(5x+2)^2 = -9$;
б) $(x+3)(x-3) = 9$; д) $(5y+3)(y-2) = -3,5(4+2y)$; з) $(-x+5)^2 = 0$;
в) $(x+4)(4-x) = 52$; е) $(2x-3)^2 = 4$; и) $x^2 + 6x + 9 = 0$.

2. Решение квадратного уравнения по формулам

Решение уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

1) $4x^2 - 4x + 1 = 0$,

$$(2x-1)^2 = 0,$$

$$2x-1=0$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

2) $x^2 - 4x - 21 = 0$,

$$x^2 - 4x + 4 - 4 - 21 = 0,$$

$$(x-2)^2 = 25,$$

$$x-2=5 \text{ или } x-2=-5,$$

$$x=7 \text{ или } x=-3$$

Ответ: $-3; 7$.

Решение уравнения (1) $ax^2 + bx + c = 0$ в общем виде.

Умножим обе части уравнения на $4a \neq 0$, т.к. $a \neq 0$.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

$$(2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0.$$

$$(2) \quad (2ax+b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Далее все зависит от числа $b^2 - 4ac$.

1) $b^2 - 4ac = 0$, тогда $(2ax+b)^2 = 0$, $2ax+b=0$, $x = -\frac{b}{2a}$.

Уравнение имеет один корень.

2) $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение (2), а значит и (1) имеет два корня.

3) $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение (2) не имеет корней, а значит и уравнение (1).

Обозначим число $b^2 - 4ac = D$.

Уравнение (2) принимает вид:

$$(2ax + b)^2 = D, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

При $D > 0$

$$2ax + b = \sqrt{D}, \quad \text{или} \quad 2ax + b = -\sqrt{D},$$

$$2ax = -b + \sqrt{D}, \quad 2ax = -b - \sqrt{D},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Объединим записи этих корней

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \text{ называют дискриминантом.}$$

Пример. $3x^2 - 7x + 4 = 0$

$$a = 3, b = -7, c = 4,$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 7^2 - 48 = 49 - 48 = 1.$$

$$D > 0$$

Уравнение имеет два корня

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6};$$

$$x_1 = \frac{7-1}{6}; \quad x_2 = \frac{7+1}{6};$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ответ: } 1; \frac{4}{3}.$$

100. Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите число его корней:

а) $5x^2 + 8x - 4 = 0$;

в) $x^2 + x - 12 = 0$;

д) $5x + x^2 - 6 = 0$;

б) $3x^2 + 2x + 2 = 0$;

г) $-x^2 - 5x + 6 = 0$;

е) $x^2 - 12x + 36 = 0$.

101. Решите уравнение:

а) $x^2 + 5x - 24 = 0$;

е) $\frac{y^2 + 10y}{10} - \frac{2y + 5}{2} = 20$;

л) $x^2 - 5x - 6 \cdot \frac{|x|}{x} = 0$;

б) $3y^2 + y = 7$;

ж) $|x^2 + 4x - 8| = 4$;

м) $|x^2 + 5| = 6x$;

в) $(x+1)^2 = 7x - 3x^2$;

з) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$;

н) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$;

г) $x^2 - (2x-3)(1-x) = 3$;

и) $x^2 + \sqrt{x^2} - 2 = 0$;

о) $x^2 - 2(1 + \sqrt{8})x + 8\sqrt{2} = 0$;

д) $y^2 - \frac{9y-2}{7} = 0$;

к) $x^2 + \frac{5x^2}{|x|} - 6 = 0$;

п) $\sqrt{2}x^2 - 10x = -8\sqrt{2}$.

Вторая формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, b – четное число

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac,$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Пример. $5x^2 + 14x - 3 = 0$

$$b = 14 \text{ – четное число, } \frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7,$$

$$D_1 = 7^2 - 5 \cdot (-3) = 49 + 15 = 64,$$

$$x = \frac{-7 \pm 8}{5};$$

$$x_1 = \frac{-7-8}{5}; \quad x_2 = \frac{-7+8}{5};$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } -3; \frac{1}{5}.$$

102. Решите уравнение:

а) $x^2 - 2x - 63 = 0$;

б) $2x^2 - 4x - 12 = 0$;

в) $x^2 + 18x + 65 = 0$;

г) $(x^2 - 2x - 15)(3x^2 - 14x + 16) = 0$;

д) $|x^2 - x - 14| = |x^2 - 5x + 6|$;

е) $\sqrt{2}x^2 - 10x = -8\sqrt{2}$;

ж) $\sqrt{3}y^2 - 8\sqrt{2}y + 4\sqrt{3} = 0$;

з) $16a^2 - 8\sqrt{2}a + 1 = 0$;

и) $\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{2}x + 8\sqrt{3} = 0$;

к) $(x+2)^2 - 2(x+2) - 15 = 0$;

л) $(x-3)^2 - 12(x-3) + 27 = 0$;

м) $(2x^2 - 5x - 3)\sqrt{x+5} = 0$;

н) $(-2x^2 - 5x - 3)\sqrt{x+2} = 0$;

о) $(x+5)^2 - 2\sqrt{x^2 + 10x + 25} - 24 = 0$;

п) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} = \frac{1-x}{2}.$

103. При каких значения a уравнение:

а) $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0$ имеет один корень,

б) $(a+6)x^2 + 2ax + 1$ имеет единственное решение?

3. Решение задач с помощью квадратных уравнений

Перед решением задач внимательно прочитайте пункт учебника с таким названием.

104. Одно из натуральных чисел на 4 меньше другого. Найдите эти числа, если их произведение равно 525.
105. Длина прямоугольника на 7 см больше ширины, а его площадь равна 60 см^2 . Найдите стороны прямоугольника.
106. Найдите длины сторон прямоугольника, периметр которого равен 32 см, а площадь равна 55 см^2 .
107. От квадратного листа фанеры отрезали прямоугольную полосу шириной 2 дм, в результате площадь оставшейся части листа составила 24 дм^2 . Найдите первоначальную площадь листа.

4. Теорема Виета

$$x^2 + px + q = 0$$

$$D = p^2 - 4q$$

При $D > 0$ уравнение имеет два корня, которые обладают свойством $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Это теорема Виета.

Для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ теорема Виета имеет вид $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ при $D > 0$
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Пример. Найдите сумму и произведение корней уравнения $5x^2 - 12x + 7 = 0$.

Решение. $D = 144 - 140 = 4$, $4 > 0$, уравнение имеет два корня x_1 и x_2 .

$$\text{По теореме Виета } x_1 + x_2 = \frac{12}{5} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{5}.$$

108. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $2x^2 - x - 3 = 0$;

б) $-x + 2 + x^2 = 0$;

в) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

109. Найдите подбором корни уравнения:

а) $x^2 + 9x + 20 = 0$;

г) $x^2 - x - 12 = 0$;

б) $x^2 - 11x - 12 = 0$;

д) $x^2 + x - 12 = 0$;

в) $x^2 + 4x - 12 = 0$;

е) $x^2 + 13x + 12 = 0$.

110. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$, найдите:

а) $x_1^2 + x_2^2$;

б) $x_1 \cdot x_2^3 + x_2 \cdot x_1^3$;

в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

г) $x_1^4 + x_2^4$.

111. При каких значениях a уравнение

$$(a^2 - 6a + 8)x^2 + (a^2 - 4)x + 10 - 3a - a^2 = 0$$

имеет более двух корней?

112. Один корень квадратного уравнения $x^2 - 6x + c = 0$ равен: а) $3 + \sqrt{3}$; б) $2 + \sqrt{3}$.

Найдите и другой корень и значение c .

113. Составьте квадратное уравнение, если его корни равны:

а) $-3; 7$

б) $-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}$

в) $-5; -6$

г) $5; 6$.

114. Решите уравнение:

а) $(x-3)^2 = |x-3| + 6$;

б) $|x^2 - 4| + |x^2 - 3x + 2| = 0$;

в) $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(x-1)^2}{3} = \frac{2x-1}{4}$.

Тест 4. Квадратные уравнения

Вариант 1

1. Из чисел $-\frac{3}{7}; 0; 3; 1$ корнями уравнения $7x^2 - 18x - 9 = 0$ являются числа

- 1) $-\frac{3}{7}; 0$; 2) $3; 1$; 3) $3; 0$; 4) $-\frac{3}{7}; 3$.

2. Сколько корней имеет уравнение $7x^2 - 25x - 12 = 0$?

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

3. Решите уравнение $6x^2 + 31x + 5 = 0$.

- 1) $5; 6$; 2) $-5; -\frac{1}{6}$; 3) $-5; \frac{1}{5}$; 4) $-\frac{1}{6}; 5$.

4. Если $x_1 = -6$, $x_2 = 3$ – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

- 1) $p = 3; q = 18$; 2) $p = -3; q = -18$; 3) $p = 3; q = -18$; 4) $p = -3; q = 18$.

5. Составьте квадратное уравнение, зная, что числа $-\frac{1}{3}$ и 3 его корни.

- 1) $x^2 - 8x - 1 = 0$; 2) $3x^2 - 8x - 3 = 0$; 3) $3x^2 + 8x - 3 = 0$; 4) $x^2 - 8x + 1 = 0$.

6. Определите значения y , при которых верно равенство $y^2 = \frac{9y - 2}{7}$.

- 1) $-1; -\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2}{7}; 1$; 3) $-1; \frac{2}{7}$; 4) $-\frac{2}{7}; 1$.

Для заданий 7–10 запишите решение

7. Решите уравнение: $|x^2 + 6| = 5x$.

8. Решите уравнение: $x^2 - (\sqrt{2x + 2})^2 - 6 = 0$.

9. Решите уравнение: $x^2 + \sqrt{x^2} - 12 = 0$

10. Разность корней уравнения $x^2 + 12x + q = 0$ равна 4. Найдите корни уравнения и q .

Вариант 2

1. Из чисел $-4; 0; \frac{2}{3}$; 2 корнями уравнения $3x^2 + 10x - 8 = 0$ являются

- 1) $0; \frac{2}{3}$; 2) $-4; 0$; 3) $-4; \frac{2}{3}$; 4) $4; -\frac{2}{3}$.

2. Сколько корней имеет уравнение $3x^2 - 25x + 12 = 0$?

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

3. Решите уравнение $3x^2 + 14x - 5 = 0$.

- 1) 5; 3; 2) $-5; \frac{1}{3}$; 3) $-5; -\frac{1}{3}$; 4) 5; -3.

4. Если $x_1 = -8; x_2 = 2$ – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

- 1) $p = 6; q = 10$; 2) $p = -6; q = 12$; 3) $p = 6; q = -16$; 4) $p = 6; q = 16$.

5. Составьте квадратное уравнение, зная, что числа 4 и $-\frac{2}{3}$ его корни.

- 1) $x^2 - 10x - 8 = 0$; 2) $3x^2 - 10x - 8 = 0$; 3) $x^2 + 10x - 8 = 0$; 4) $3x^2 + 10x + 8 = 0$.

6. Определите значения y , при которых верно равенство $\frac{y^2 + 10y}{10} - \frac{2y + 5}{2} = 20$.

- 1) -15; 15 2) 0; 15 3) -15; 0 4) 1; 15

Для заданий 7–10 запишите решение

7. Решите уравнение: $|x^2 + 8| = 6x$.

8. Решите уравнение: $x^2 - (\sqrt{2x+3})^2 - 12 = 0$.

9. Решите уравнение: $x^2 - \sqrt{x^2} - 6 = 0$.

10. Разность корней уравнения $x^2 + 18x + q = 0$ равна 6. Найдите корни и q .

5. Дробные рациональные уравнения

Решение дробных рациональных уравнений

При решении дробных рациональных уравнений поступают следующим образом:

- 1) находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- 2) умножают обе части уравнения на общий знаменатель;
- 3) решают получившееся целое уравнение;
- 4) исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Пример. $\frac{2x}{x+6} - \frac{144}{x^2-36} = 1$

Общий знаменатель $(x+6)(x-6)$.

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель, получим целое уравнение.

$$2x(x-6) - 144 = x^2 - 36, \text{ отсюда}$$

$$2x^2 - 12x - 144 - x^2 + 36 = 0$$

$$x^2 - 12x - 108 = 0$$

$$x_1 = -6; \quad x_2 = 18$$

$$\text{Если } x = -6, \text{ то } (x-6)(x+6) = (6-6)(6+6) = 0$$

$$\text{Если } x = 18, \text{ то } (x-6)(x+6) = (18-6)(18+6) = 12 \cdot 24 \neq 0$$

Корнем исходного уравнения является число 18.

Ответ: 18

115. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x-3} = \frac{2x+3}{x-3};$

в) $\frac{x}{x-5} + \frac{7x+35}{x^2-25} = 2;$

д) $\frac{2x-3}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{4x-6}{x^2+2x};$

б) $\frac{x^2}{x+2} = \frac{10+3x}{x+2};$

г) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = \frac{7}{x+2};$

е) $\frac{x}{x-4} - \frac{2}{x+4} = \frac{32}{x^2-16}.$

116. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-9}{x-3} = 0;$

в) $\frac{x^2-9}{x^2+9} = 0;$

д) $\frac{x^2-4}{|x|+2} = 0;$

ж) $\frac{x^2-4}{x^2+4} = 0;$

б) $\frac{x-2}{x^2-4} = 0;$

г) $\frac{x^2-9}{|x|-3} = 0;$

е) $\frac{x^2-4}{x^2+2} = 0;$

з) $\frac{x^2}{x-3} = \frac{3x}{x-3}.$

117. При каких значениях переменной равны дроби $\frac{6}{x}$ и $\frac{x}{2x-6}$?

118. Решите уравнение:

а) $\frac{x-3}{x^2+4x+9} + \frac{x^2+4x+9}{x-3} = -2$, введя новую переменную $\frac{x-3}{x^2+4x+9} = y;$

б) $\frac{x^2-x+3}{x^2-x+1} + \frac{x^2-x+4}{x^2-x+2} = 5$, обозначив x^2-x+1 за t , т.е. $x^2-x+1 = t;$

в) $\frac{5}{x(x+4)} + \frac{8}{(x+1)(x+3)} = 2$, обозначив $x(x+4) = x^2+4x = t.$

6. Решение задач с помощью рациональных уравнений

Пример. Скорость течения реки равно 2 км. Теплоход затратил на 50 км пути по течению реки и 8 км против течения 3 часа. Какова собственная скорость теплохода?

Решение.

Пусть собственная скорость теплохода x км/ч. Далее оформим решение задачи в виде таблицы

Движение	Скорость в км/ч	Путь в км	Время в часах
По течению	$x+2$	50	$\frac{50}{x+2}$
Против течения	$x-2$	8	$\frac{8}{x-2}$

Из условия задачи следует, что на весь путь теплоход затратил 3 часа, следовательно, составим уравнение $\frac{50}{x+2} + \frac{8}{x-2} = 3 \mid (x+2)(x-2);$

$$50(x-2) + 8(x+2) = 3(x^2 - 4);$$

$$50x - 100 + 8x + 16 = 3x^2 - 12;$$

$$3x^2 - 58x + 72 = 0$$

$$D_1 = 29^2 - 3 \cdot 72 = 625$$

$$x = \frac{29 \pm 25}{3}$$

$$x_1 = \frac{29+25}{3};$$

$$x_2 = \frac{29-25}{3};$$

$$x_1 = 18;$$

$$x_2 = \frac{4}{3}.$$

Если $x = 18$, то $(x+2)(x-2) = 20 \cdot 16 \neq 0$,

$x = \frac{4}{3}$, то $(x+2)(x-2) = \left(\frac{4}{3}+2\right)\left(\frac{4}{3}-2\right) \neq 0$.

По смыслу задачи $x > 2$, поэтому $x = \frac{4}{3}$ не подходит

Ответ: 18 км/ч.

119. Решите задачу.

- Две машинистки, работая совместно, могут перепечатать рукопись за 8 часов. Сколько времени потребовалось бы каждой машинистке на выполнение этой работы, если одной для этого потребуется на 12 часов меньше, чем другой?
- Расстояние из А в В длиной 60 км мотоциклист проехал по проселочной дороге, а обратно возвращался по шоссе, сократив путь на 5 км и увеличив скорость на 10 км/ч. С какой скоростью ехал мотоциклист из А в В, если известно, что на путь по проселочной дороге он затратил на 6 минут больше, чем на путь по шоссе.

120. Решите задачу.

Расстояние между пристанями А и В равно 36 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправился катер, который, прибыв в пункт В, тотчас повернул обратно и возвратился в А. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость катера в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Тест 5. Дробные рациональные уравнения

Вариант 1

1. Корнями уравнения $\frac{x^2}{x+3} = \frac{5x+24}{x+3}$ являются числа:

1) $-3; 8;$

2) $-8; 3;$

3) $8;$

4) $-3.$

2. Равносильными являются уравнения:

1) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$ и $x^2 = 36;$

2) $\frac{5}{x+1} = \frac{x-2}{x+1}$ и $x+1=6;$

3) $\frac{x^2+4x}{x^2-16} = 0$ и $x^2+4x=0;$

4) $\frac{x+2}{x^2+4x+4} = 0$ и $x^2+2=0.$

3. Значение функции $y = \frac{x^2-6x+5}{x^2-1}$ равно 0 при x , равном:

1) $-1; 1;$

2) $1; 5;$

3) $5;$

4) $1.$

4. Решите уравнение:

а) $\frac{y^2}{y-2} = \frac{4}{y-2};$

б) $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2 - \left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2 = 0.$

5. Решите задачу.

Велосипедист проехал 5 км по лесной дороге и 7 км по шоссе, затратив на весь путь 1 час. По шоссе он ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем по лесу. С какой скоростью велосипедист ехал по лесной дороге?

Вариант 2

1. Корнями уравнения $\frac{x^2}{x-3} = \frac{3x+18}{x-3}$ являются числа:

1) $-6; 3$

2) $6; -3$

3) $-6;$

4) 6

2. Равносильными являются уравнения:

1) $\frac{x^2-9}{x^2+3x} = 0$ и $x^2+3x=0$;

2) $\frac{x+5}{x^2-25} = 0$ и $x^2+25=0$;

3) $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ и $x^2=9$;

4) $\frac{x}{x-7} = \frac{4x+6}{x-7}$ и $x-7=0$.

3. Значение функции $y = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$ равно 0 при x , равном:

1) $-2; 2$

2) $-4; 2$

3) -4

4) 2

4. Решите уравнение:

а) $\frac{y^2}{y+6} = \frac{36}{y+6}$;

б) $\left(\frac{x^2-14}{x^2-4}\right)^2 - \left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2 = 0$.

5. Решите задачу.

Пешеход прошел по шоссе 3 км, а по проселочной дороге 6 км, затратив на весь путь 2 часа. С какой скоростью шел пешеход по проселочной дороге, если известно, что по шоссе он шел со скоростью на 2 км/ч больше, чем по проселку?

IV. НЕРАВЕНСТВА

1. Числовые неравенства

Определение. Число a больше числа b , если разность $a - b$ — положительное число; число a меньше числа b , если разность $a - b$ — отрицательное число; число a равно числу b , если разность $a - b$ равна 0.

На координатной прямой большее число изображается точкой, лежащей правее, а меньшее — точкой, лежащей левее.

Пример. Сравните a и b , если

а) $a - b = -0,6$.

$-0,6 < 0$, следовательно, $a < b$;

б) $a - b = 7,2$

$7,2 > 0$, следовательно, $a > b$;

в) $b + a = 1 + b^2$, следовательно, $a = -b + 1 + b^2$, выделим

$a - b = -2b + 1 + b^2 = b^2 - 2b + 1 = (b - 1)^2$.

$(b - 1)^2 \geq 0$, следовательно, $a - b \geq 0$, значит $a \geq b$.

121. Сравните a и b , если:

а) $a - b = 4,7$;

г) $a = b + 2,7$;

ж) $a + 1 = 2b$ и $b > 1$;

б) $a - b = -3,2$;

д) $a - 3 = b - c, c < 3$;

з) $a + 2 = b + c$ и $c \geq 2$;

в) $a = b - 0,5$;

е) $b + 3 = a + 2\sqrt{2}$;

и) $b + a = 2 + b^2$.

122. Сравните числа:

а) $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{9}$;

в) $323 \cdot 325$ и 324^2 ;

б) $\frac{13}{12}$ и $\frac{12}{11}$;

г) $74^2 - 27^2$ и $73^2 - 26^2$.

123. Сравните выражения:

а) $(a - 1)(a + 2)$ и $(a + 4)(a - 3)$;

б) $a^2 + 25$ и $10a$;

в) $b^2 + 5$ и $2b + 3$;

г) $a^4 + 1$ и $2a|a|$;

д) $(a - 2)^2$ и $4(1 - a)$.

124. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $(x - 4)^2 > x(x - 8)$;

б) $(a - 2)(a - 5) < (a - 3)(a - 4)$;

в) $\frac{b}{b^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$;

г) $a^4 + 16 \geq 8a + 2a^3$.

2. Свойства числовых неравенств

Теорема 1.

Если $a > b$, то $b < a$ и если $a < b$, то $b > a$.

Суть этой теоремы в том, что если в верном неравенстве поменять местами левую и правую части, то надо поменять и знак неравенства, тогда оно будет верным.

Примеры: 1) $2 < 5$, тогда $5 > 2$;
2) $-3 < -1$, тогда $-1 > -3$;
3) $5 > 3$, тогда $3 < 5$;
4) $-6 > -8$, тогда $-8 < -6$.

Теорема 2.

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Примеры: 1) $2 < 7$ и $7 < 10$, то $2 < 10$;
2) $-3 < 4$ и $4 < 8$, то $-3 < 8$;
3) $5 > 2$ и $2 > -3$, то $5 > -3$;
4) $10 > 4$ и $4 > 1$, то $10 > 1$.

Теорема 3.

Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$

Если $a > b$ и c – любое число, то $a + c > b + c$.

Суть теоремы: если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное числовое неравенство.

Следствие.

Если $a < b + c$, то $a - c < b$ и если $a + c > b$, то $a > b - c$. Слагаемые в неравенстве можно переносить из одной части в другую, изменив при этом знак у слагаемого.

Примеры: 1) $2 < 7$, то $2 - 3 < 7 - 3$, т.е. $-1 < 4$;
2) $8 > -3$, то $8 + 5 > -3 + 5$, т.е. $13 > 2$.

Теорема 4.

Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.

Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

Словами эту теорему можно сформулировать так: если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство; если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

Примеры: 1) $3 < 10$ и $\frac{1}{2} > 0$, то $\frac{3}{2} < 5$;
2) $6 > 4$ и $-2 < 0$, то $-12 < -8$ или $-3 < -2$.

Следствие.

Если a и b положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ или $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Примеры: 1) $2 < 3$ то $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$;
2) $7 > 4$, то $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$;
3) $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, то $\frac{3}{2} < 2$.

125. Известно, что $a < b$. Сравните:

- а) $a+1,2$ и $b+1,2$;
- б) $a-4,3$ и $b-4,3$;
- в) $-3a$ и $-3b$;
- г) $\frac{2}{5}a$ и $\frac{2}{5}b$;
- д) $-\frac{a}{3}$ и $-\frac{b}{3}$.

126. Какими числами (положительными или отрицательными) являются числа a и b , если верны неравенства:

- а) $a-5 > b-5$ и $b > 3$;
- б) $a-10 > b-10$ и $a < -13$;
- в) $9a > 9b$ и $b > \frac{1}{3}$;
- г) $-3a > -3b$ и $b < -\frac{2}{5}$.

127. Известно, что $a > b$. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

- а) к обеим частям этого неравенства прибавить число 10;
- б) из обеих частей этого неравенства вычесть число 8;
- в) обе части этого неравенства умножить на число $\frac{3}{5}$;
- г) обе части этого неравенства разделить на $\frac{2}{3}$;
- д) обе части этого неравенства умножить на -1 .

128. Каков знак числа a , если известно, что:

- а) $6a < 3a$;
- б) $9a > 4a$;
- в) $-4a < 4a$;
- г) $-14a < -2a$?

129. Известно, что $c < d$. Объясните, на основании каких свойств можно утверждать, что верно неравенство:

- а) $-8c > -8d$;
- б) $\frac{c}{3} < \frac{d}{3}$;
- в) $3c-12 < 3d-12$;
- г) $-0,01c+0,7 > -0,01d+0,7$;
- д) $2-c > 2-d$;
- е) $-4-\frac{c}{3} > -4-\frac{d}{3}$.

130. На координатной прямой отмечены числа.



Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$.

3. Сложение и умножение числовых неравенств

Теорема 5.

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Без символики теорему можно сформулировать так: неравенства одного знака можно почленно складывать, получим неравенство того же знака.

Примеры: 1) $2 < 7$ и $-3 < -1$, тогда $2 - 3 < 7 - 1$, т.е. $-1 < 6$;

$$\begin{array}{r} 2) \quad 5 > 4 \\ + \quad 10 > 8 \\ \hline 15 > 12 \end{array}$$

Теорема 6.

Если $a < b$ и $c < d$ и a, b, c, d – положительные числа, то $ac < bd$.

Если $a > b$ и $c > d$ и a, b, c, d – положительные числа, то $ac > bd$.

Теорему можно сформулировать так: неравенства одного знака с положительными членами можно почленно перемножать, получим верное неравенство с тем же знаком.

Примеры:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 5 < 10 \\ \cdot \quad 0,1 < 0,15 \\ \hline 0,5 < 1,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 2,3 > 1,5 \\ \cdot \quad 10 > 2 \\ \hline 23 > 3 \end{array}$$

Следствие. Неравенства с положительными левой и правой частями можно возводить в любую натуральную степень, получим верное неравенство того же знака, т.е. если $a > b$ или $a < b$ и a, b – положительные числа, то $a^n > b^n$ или $a^n < b^n$.

Это следствие можно сформулировать иначе.

Если $a < b$, то $a^{2n+1} < b^{2n+1}$.

Если $a > b$, то $a^{2n+1} > b^{2n+1}$, где a и b – любые.

Если $a < b$ и $a > 0, b > 0$, то $a^{2k} < b^{2k}$.

Если $a > b$ и $a > 0, b > 0$, то $a^{2k} > b^{2k}$.

Примеры: 1) $2 < 3$, то $2^3 < 3^3$, т.е. $8 < 27$

$$2) \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \text{ то } \left(\frac{1}{2}\right)^4 > \left(\frac{1}{3}\right)^4, \text{ т.е. } \frac{1}{16} > \frac{1}{81}$$

$$3) \quad -3 < 2, \text{ то } (-3)^3 < 2^3, \text{ т.е. } -27 < 8 \\ \text{но } (-3)^4 < 2^4 \text{ неверно}$$

131. Сложите почленно неравенства:

а) $14 > -6$ и $10 > 7$;

б) $-3,5 < -0,8$ и $-6,5 < -2,3$.

132. Перемножьте почленно неравенства:

а) $6 > 4$ и $10 > 3$;

б) $6 < 12$ и $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Двойные неравенства

Неравенства вида:

- 1) $b < a < c$;
- 2) $b \leq a \leq c$;
- 3) $b > a > c$;
- 4) $b \geq a \geq c$

называются двойными.

Чаще используются неравенства (1) и (2).

Неравенства (1) и (3) называются строгими, а (2) и (4) нестрогими.

Все рассмотренные свойства верны и для двойных неравенств.

133. Пусть $5 < a < 6$ и $10 < b < 15$. Оцените:

- а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab ; г) $\frac{a}{b}$.

134. Известно, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ и $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцените:

- а) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{20}$; д) $-3\sqrt{2}$.

135. Известны границы длин основания b и боковой стороны a равнобедренного треугольника, выраженные в сантиметрах: $2,6 \leq a \leq 2,8$ и $4,1 \leq b \leq 4,3$. Оцените, в каких границах периметр этого треугольника.

136. Если $3 < x < 9$ и $4 < y < 12$, то оцените значение выражения $\frac{x}{y}$ и выберите верный ответ:

- 1) $\frac{1}{12} < \frac{x}{y} < \frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4} < \frac{x}{y} < \frac{9}{4}$; 3) $\frac{1}{12} < \frac{x}{y} < \frac{3}{4}$; 4) $\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < 4$.

137. Известно, что $2 \leq x \leq 4$; $5 \leq y \leq 7$. Оцените значение выражения $x-2y$ и укажите верный ответ:

- 1) $-12 \leq x-2y \leq -6$; 3) $-9 \leq x-2y \leq -8$;
2) $-10 \leq x-2y \leq -8$; 4) $-12 \leq x-2y \leq -10$.

138. Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$, докажите:

- а) $(a^3+b)(a+b^3) \geq 4a^2b^2$, где $a \geq 0, b \geq 0$;
б) $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8ab$ при $a \geq 0, b \geq 0$.

139. Используя неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$, где $a > 0$, докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq 2.$$

Погрешность и точность приближения

Пусть $x \approx a$.

$\Delta = |x - a|$ – абсолютная погрешность.

Абсолютной погрешностью приближенного значения называют модуль разности точного и приближенного значения.

Число h называют точностью приближенного значения, если $|x - a| \leq h$.

Пишут: $x \approx a$ с точностью до h или $x = a \pm h$.

Неравенство $|x - a| \leq h$ можно заменить неравенством $-h \leq x - a \leq h$ или $a - h \leq x \leq a + h$.

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения, т.е. $\frac{\Delta}{|a|} = \frac{|x - a|}{|a|}$.

Оценка относительной погрешности $\frac{\Delta}{|a|} = \frac{|x - a|}{|a|} \leq \frac{h}{|a|}$

Пример: $17,26 \approx 17,3$

$$\Delta = |17,26 - 17,3| = |-0,04| = 0,04$$

140. Найдите абсолютную погрешность приближенного значения, полученного в результате округления:

- а) числа 7,85 до единиц;
- б) числа 234 до десятков;
- в) числа 0,653 до десятых;
- г) числа 0,298 до сотых.

141. При выполнении вычислений дробь $\frac{2}{3}$ заменили десятичной дробью 0,67. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

142. В каких границах заключено число y , если:

- а) $y = 7,3 \pm 0,1$;
- б) $y = 1,57 \pm 0,3$.

143. Округлите число 3,625 до десятых. Найдите относительную погрешность приближения, полученного при округлении.

144. На коробке конфет указано, что она должна храниться при температуре $17^\circ \pm 2^\circ \text{C}$. Удовлетворяет ли этому условию температура воздуха, равная:

- а) 17°C ;
- б) 22°C ;
- в) $16,5^\circ \text{C}$;
- г) $13,5^\circ \text{C}$.

Пересечение и объединение множеств

Определение 1.

Пересечением двух множеств называют множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.

Определение 2.

Объединением двух множеств называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

Пример. Пусть A – множество натуральных делителей числа 24, а B – множество делителей числа 20. Выпишем эти множества $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$.

$C = A \cap B$ – пересечение множеств A и B

$C = \{1; 2; 4\}$

$D = A \cup B$ – объединение множеств A и B .

$D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 20; 24\}$.

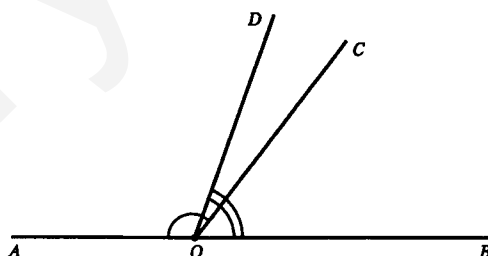
145. Пусть X – множество четных натуральных чисел, не превосходящих 16, а Y – множество двузначных натуральных чисел, не превосходящих 16. Задайте множества X и Y перечислением элементов и найдите их пересечение и объединение.

146. Задайте путем перечисления элементов множество A двузначных чисел, являющихся квадратами натуральных чисел, и множество B двузначных чисел, кратных 15. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

147. Найдите пересечение и объединение:

- а) множества цифр, используемых в записи чисел 12543 и 5361;
- б) множеств букв, используемых в записи слов «алгебра» и «биология»;
- в) множество составных чисел, не превосходящих 30, и множества двузначных чисел, кратных 10.

148. На рисунке изображены углы



Какая фигура является:

- а) пересечением углов AOC и DOB;
- б) объединением углов AOC и DOB?

149. С помощью кругов Эйлера проиллюстрируйте соотношение между множеством чисел, кратных 5, и множеством чисел, кратных 15.

Какое множество изображает общая часть этих кругов?

4. Числовые промежутки

Внимательно прочитайте пункт.

Уметь читать неравенства и записывать числовыми промежутками и знать геометрическую интерпретацию.

Неравенство	Числовой промежуток	Геометрическая интерпретация
$-5 < x < 4$	$(-5; 4)$ – интервал от -5 до 4	
$-5 \leq x \leq 4$	$[-5; 4]$ – числовой отрезок от -5 до 4	
$-5 \leq x < 4$	$[-5; 4)$ – полуинтервал от -5 до 4 , включая -5	
$-5 < x \leq 4$	$(-5; 4]$ – полуинтервал от -5 до 4 , включая 4	
$x > 8$	$(8; +\infty)$ – открытый числовой луч от 8 до $+\infty$	
$x \geq 8$	$[8; +\infty)$ – числовой луч от 8 до $+\infty$	
$x < 9$	$(-\infty; 9)$ – открытый числовой луч от $-\infty$ до 9	
$x \leq 9$	$(-\infty; 9]$ – числовой луч от $-\infty$ до 9	

Множество действительных чисел изображается всей координатной прямой.

Его называют координатной прямой и обозначают так: $(-\infty; +\infty)$.

150. Изобразите на координатной прямой промежуток и назовите его:

- | | | |
|----------------|----------------------|---------------------------|
| а) $[-4; 6]$; | г) $(-6; 0)$; | ж) $(-\infty; -4]$; |
| б) $(-5; 5)$; | д) $(10; +\infty)$; | з) $(-\infty; -2)$; |
| в) $[0; 10]$; | е) $[8; +\infty)$; | и) $(-\infty; +\infty)$. |

151. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

- | | | |
|------------------|----------------------------|-----------------------|
| а) $x \geq -3$; | г) $x < -7$; | ж) $1,5 \leq x < 4$; |
| б) $x \leq 6$; | д) $-2,5 \leq x \leq 12$; | з) $9 < x \leq 15$; |
| в) $x > 9$; | е) $-3 < x < 2,5$; | и) $0 < x < 9$. |

152. Принадлежит ли

- а) интервалу $(-6; 7,5)$ число: -7 ; -6 ; -5 ; $-3,9$; 0 ; 5 ;
б) отрезку $[-10; 0]$ число: -12 ; -10 ; -8 ; $-1,5$; 0 ; 1 ?

153. Какие целые числа принадлежат промежутку:

- | | |
|-----------------|----------------|
| а) $[-13; 2]$; | в) $(-5; 6]$; |
| б) $(-6; 4)$; | г) $[-2; 4)$? |

154. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков:

- | | |
|-------------------------------|--|
| а) $(2; 9)$ и $(5; 12)$; | г) $(5; +\infty)$ и $(8; +\infty)$; |
| б) $[-10; 10]$ и $[-7; 12]$; | д) $(-\infty; 12)$ и $(-\infty; 10)$; |
| в) $[-7; 6)$ и $(-4; 8]$; | е) $(7; +\infty)$ и $(-\infty; 11]$. |

5. Решение неравенств с одной переменной

Определение.

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной (число), которое обращает его в верное числовое неравенство.

Пример. Рассмотрим неравенство $6x - 3 > 10$.

Число 5 является решением данного неравенства, так как $6 \cdot 5 - 3 > 10$ верно, а число 2 не является решением, так как $6 \cdot 2 - 3 > 10$ неверно.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, считают также равносильными.

При решении неравенств используют свойства, которые сохраняют равносильность:

1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.

2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство; если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Например, неравенство $15 + 3x > 0$ равносильно неравенству $3x > -15$, а неравенство $3x > -15$ разделив обе его части на 3, можно заменить равносильным $x > -5$.

Решением неравенства $x > -5$ является любое число, больше -5 , а значит и неравенство $15 + 3x > 0$ имеет такое же множество решений.

Пример решения неравенства.

Рассмотрим неравенство $18x < 15x - 21$.

Перенесем $15x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства: $18x - 15x < -21$.

Приведем подобные члены: $3x < -21$.

Разделим обе части неравенства на 3: $x < -7$.

Множество решений неравенства $x < -7$ состоит из всех чисел, меньших -7 .

Это множество представляет собой открытый числовой луч $(-\infty; -7)$.

Ответ: $(-\infty; -7)$

При решении неравенств мы заменяем заданное неравенство равносильным ему неравенством вида $ax > b$ или $ax < b$, где a и b – некоторые числа.

Неравенства $ax > b$ или $ax < b$ называют линейными неравенствами с одной переменной.

Решите неравенства:

1) $2x > 3; x > 1,5$

Ответ: $(1,5; +\infty)$

2) $-3x < 6; x > -2$

Ответ: $(-2; +\infty)$

3) $0 \cdot x < 6$; при любом значении x данное неравенство равносильно $0 < 6$ верно.

Значит решением $0 \cdot x < 6$ является любое число.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

4) $0 \cdot x > 5$ можно заменить числовым $0 > 5$, которое неверно, значит у неравенства нет решений или его множество решений $\emptyset$ – пустое множество.

Ответ: решений нет.

155. Является ли решением неравенства $6y > 3(y-2)+18$ значение y , равное:

- а) 9; б) -4; в) 1,5; г) 10?

156. Укажите три каких-либо решения неравенства $4x < 3x-7$.

157. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

- а) $2x < 19$; д) $\frac{1}{6}x < -3$;
б) $6x \geq -4$; е) $-18x < -27$;
в) $-15x < -60$; ж) $6(x-1)+8 \leq 2-3(x-2)$;
г) $-x > -8,5$; з) $4(y-1,5)-1,4 > 8y-1$.

158. Решите неравенство:

- а) $(\sqrt{3}-2)x > 2$; д) $(3-\sqrt{10})(2x-9) < 0$; и) $\frac{2x-3}{x^2+4} > 0$; н) $\frac{(x+3)^2}{2x-9} > 0$;
б) $(\sqrt{6}-3)x < 9$; е) $3\sqrt{11}(5-2x) > 10(5-2x)$; к) $-\frac{5x+15}{x^2+9} \leq 0$; о) $\frac{(x+4)^2}{2x+5} < 0$;
в) $x\sqrt{2} < x\sqrt{3}+1$; ж) $\frac{2x-3}{4\sqrt{6}-10} > 5+2\sqrt{6}$; л) $\frac{x^2+25}{3x-12} > 0$; п) $\frac{(x-5)^2}{4x+16} \leq 0$;
г) $\frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+6 > 0$; з) $(1-\sqrt{2})(4-5x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$; м) $\frac{x^2+36}{2x-5} \leq 0$; р) $\frac{(x+2)^2}{2x+9} \geq 0$.

159. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

- а) $\sqrt{3x-12}$; в) $\sqrt{\frac{1+5a}{25}}$; д) $\sqrt{\frac{12x-1}{3}-4x+3}$;
б) $\sqrt{8-12y}$; г) $\sqrt{\frac{9-5a}{15}}$; е) $\sqrt{-(15-3x)}$?

160. Найдите область определения функции:

- а) $y = \sqrt{2(x-5)-\frac{1}{3}(6x+15)}$; б) $y = \frac{\sqrt{7-21x}}{x+7}$; в) $y = \frac{10}{\sqrt{5-x}-2}$.

161. Решите неравенство относительно x :

- а) $ax+3 \leq 0$; г) $-ax \geq 2x-2a-1$;
б) $3 \cdot (2a+x) < 1-ax$; д) $\frac{ax+1}{2} - \frac{ax+3}{3} < \frac{a+9x}{6}$;
в) $(a-1)x+a < 3+2x$; е) $(m-1)x-m^2+1 > 0$.

162. Найдите множество значений a , при которых уравнение:

- а) $x^2+2x+4a+3=0$ не имеет корней;
б) $(a+6)x^2+2x+1$ имеет два корня;
в) $(a-1)x^2-2ax+a+2=0$ не имеет корней.

6. Решение систем неравенств с одной переменной

Внимательно прочитайте пункт учебника с таким заголовком.

Определение.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему – значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Чтобы решить систему неравенств, надо решить каждое неравенство, входящее в систему и найти пересечение множеств решений этих неравенств.

163. Какие из чисел $-3; 0; 4; 5; 6$ являются решениями системы неравенств $\begin{cases} 4x - 26 < 0, \\ 2x - 1 < 5 \end{cases}$?

164. Является ли число 5 решением системы неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x > -8x + 9, \\ 2x - 5 > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 6 > -14, \\ 3x - 10 < 8 \end{cases} ?$$

165. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 2(x+3) - 3(x-2) > 0, \\ -2x + 3(2x-3) \leq 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3(x-4) - 4(x+4,5) \leq 0, \\ 18x - 2(4,5x+2) > 5. \end{cases}$$

166. Решите двойное неравенство:

$$\text{а) } -1 < \frac{8-x}{16} \leq 2; \quad \text{б) } -2 < \frac{4-x}{3} < \frac{1}{2}.$$

167. Решите неравенство:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } \frac{x-1}{x+4} \leq 0; & \text{в) } \frac{2x+3}{x-2} \leq 1; & \text{д) } (x-3)\sqrt{x-5} \geq 0; & \text{ж) } \frac{3x-1}{\sqrt{1-x}} \leq 0; \\ \text{б) } \frac{2x-3}{x+1} > 0; & \text{г) } \frac{3x-1}{x+5} \geq 2; & \text{е) } (1-x)\sqrt{2x-3} \leq 0; & \text{з) } (x-5)\sqrt{x-2} \geq 0. \end{array}$$

168. Найдите область определения функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \sqrt{12-3x} + \sqrt{x+2}; & \text{в) } y = \sqrt{15x-30} + \sqrt{x-4}; \\ \text{б) } y = \sqrt{15-3x} + \sqrt{4-x}; & \text{г) } y = \sqrt{-4x+8} + \sqrt{2-x}. \end{array}$$

169. При каких значениях y имеет смысл выражение:

$$\text{а) } \sqrt{3y-6} + \sqrt{7-\frac{y}{2}}; \quad \text{б) } \sqrt{12-4y} + \sqrt{\frac{y}{5}+1}; \quad \text{в) } \sqrt{4+y} + \frac{1}{\sqrt{18-6y}} ?$$

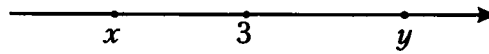
170. При каких значениях a выполняется равенство:

$$\text{а) } |10-3a| = 3a-10; \quad \text{б) } |5-4a| = 5-4a; \quad \text{в) } \frac{|18-9a|}{18-9a} = 1; \quad \text{г) } \frac{|10a-45|}{10a-45} = -1 ?$$

Тест 6. Неравенства

Вариант 1

1. На координатной прямой отмечены числа x , 3 , y .



Укажите верное неравенство

- 1) $3 - y > 0$; 2) $x - 3 > 0$; 3) $x - y < 0$; 4) $3 - x < 0$.

2. Если $a < b$, то

- 1) $a + 6 < b + 6$; 2) $a + 6 > b + 6$; 3) $a + 6 = b + 6$; 4) $a + 6 \leq b + 6$.

3. Сравните значения выражений $4b^2 + 1$ и $4b$.

- 1) $4b^2 + 1 > 4b$; 2) $4b^2 + 1 = 4b$; 3) $4b^2 + 1 < 4b$; 4) $4b^2 + 1 \geq 4b$.

4. Укажите число, удовлетворяющее неравенству $3x - 8 > 9$.

- 1) 2 2) 4 3) 5 4) 6

5. Решением неравенства $5x - 20 < 1$ является множество

- 1) $(5; +\infty)$ 2) $(-\infty; 5)$ 3) $(-\infty; 4,2)$ 4) $(4,2; +\infty)$

6. Укажите число, удовлетворяющее системе неравенств $\begin{cases} 4 - x < 6, \\ 4x - 3 < 0 \end{cases}$:

- 1) -2 2) 5 3) 4 4) -3

7. Пересечением числовых промежутков $(-8; 3]$ и $[-5; 6)$ является промежуток

- 1) $(-8; 5)$ 2) $[-5; 3]$ 3) $(-5; 3)$ 4) $[3; 6)$

8. Каждому неравенству сопоставьте соответствующий числовой промежуток.

- А) $x \geq 4$; Б) $x < 4$; В) $x > 4$.
- 1) $(-\infty; 4]$; 2) $[4; +\infty)$; 3) $(-\infty; 4)$; 4) $(4; +\infty)$.

Запишите в таблицу под каждой буквой соответствующий номер

А	Б	В

9. Решите неравенство $-(4x + 1) \leq 5(x + 4)$.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x + 4)(x - 5) \leq x^2, \\ \frac{x + 2}{4} - \frac{x}{3} > 0. \end{cases}$

11. Решите двойное неравенство $-2 < \frac{5-x}{6} < 3$.

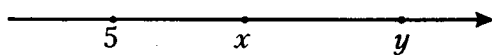
12. Докажите неравенство $(a-2)(a-6) < (a-3)(a-5)$.

13. Укажите наибольшее целое решение неравенства $(4-\sqrt{24})x > 40-8\sqrt{24}$.

ЯГубов.РФ

Вариант 2

1. На координатной прямой отмечены числа 5; x ; y .



Укажите верное неравенство

- 1) $5 - x > 0$; 2) $y - 5 < 0$; 3) $x - y < 0$; 4) $x - 5 < 0$.

2. Если $a > b$, то

- 1) $a - 12 > b - 12$ и $a + 4 > b + 4$; 3) $a - 12 < b - 12$ и $a + 4 < b + 4$;
2) $a - 12 < b - 12$ и $a + 4 > b + 4$; 4) $a - 12 > b - 12$ и $a + 4 < b + 4$.

3. Сравните значения выражений $6b$ и $9b^2 + 1$

- 1) $6b > 9b^2 + 1$; 2) $6b = 9b^2 + 1$; 3) $6b \geq 9b^2 + 1$; 4) $6b \leq 9b^2 + 1$.

4. Укажите число, удовлетворяющее неравенству $5x + 8 > -9$

- 1) -3 ; 2) -4 ; 3) $-3,4$; 4) -5 .

5. Решением неравенства $6x + 20 > 2$ является множество

- 1) $(-\infty; -3)$; 2) $(-3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $[-3; +\infty)$.

6. Укажите число, удовлетворяющее системе неравенств $\begin{cases} x - 5 > 8, \\ 5x - 4 > 17. \end{cases}$

- 1) 4,2; 2) 6; 3) 13; 4) 14;

7. Объединением числовых промежутков $[-9; 3)$ и $[-6; 7)$ является промежуток

- 1) $[-9; 7]$; 2) $[-6; 3)$; 3) $[-9; 7)$; 4) $[-9; 3)$.

8. Каждому неравенству сопоставьте соответствующий числовой промежуток

- А) $x \leq 5$; Б) $x < 5$; В) $x > 5$.
1) $(5; +\infty)$; 2) $[5; +\infty)$; 3) $(-\infty; 5]$; 4) $(-\infty; 5)$.

Запишите в таблицу под каждой буквой соответствующий номер

А	Б	В

9. Решите неравенство $1,4x - 5 \geq -2(2,6 - 0,5x)$.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x+3)(x-4) \leq x^2, \\ \frac{5x-2}{7} - \frac{x}{2} > 0. \end{cases}$

11. Решите двойное неравенство $-3 \leq \frac{6-x}{12} < 2$.

12. Докажите неравенство $(a-3)(a-4) > (a-5)(a-2)$.

13. Укажите наименьшее целое решение неравенства $(\sqrt{23}-5)x < 48-10\sqrt{23}$.

Ягубов.РФ

V. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

1. Определение степени с целым отрицательным показателем

Определение. $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, где $a \neq 0$ и n – целое отрицательное число.

Примеры: 1) $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$;

2) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$;

3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{27}} = -27$.

Замечание: 1) $0^1 = 0^2 = 0^3 = \dots = 0$;

2) $0^0; 0^{-1}; 0^{-2}; 0^{-3}; \dots$ не существует

3) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, где n – натуральное

$\frac{1}{a}$ и a взаимно обратные.

Поэтому $3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{32}{243}$$

171. Вычислите:

а) 5^{-2} ;

г) $(-1)^{10}$;

ж) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}$;

б) $(-4)^{-3}$;

д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$;

з) $\left(-1\frac{3}{5}\right)^{-2}$;

в) $(-1)^{-7}$;

е) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}$;

и) $0,01^{-3}$.

172. Найдите значение выражения:

а) -10^{-5} ;

в) $(-0,4)^{-2}$;

д) $-(-2)^{-4}$;

ж) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$;

б) $-0,25^{-3}$;

г) $(-0,5)^{-7}$;

е) $-(-3)^{-3}$;

з) $-\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

173. Вычислите:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } 8 \cdot 12^{-1}; & \text{в) } 6^{-2} - 3^{-2}; & \text{д) } 0,5^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}; & \text{ж) } (1,4)^0 + 0,1^{-3} \\ \text{б) } -8 \cdot 8^{-2}; & \text{г) } 1,4^0 - 1,4^{-1}; & \text{е) } 10 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}; & \text{з) } 36^0 + 0,1^{-2}. \end{array}$$

174. Представьте в виде дроби выражение:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } a^{-3} + b^{-2}; & \text{в) } (a + b^{-2})(a^{-2} - b); & \text{д) } (a^{-1} - b^{-1})(a - b)^{-1}; \\ \text{б) } xy^{-2} + xy^{-1}; & \text{г) } (x^{-1} - 2y^{-1})(x^{-1} + 2y^{-1}); & \text{е) } (a + b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2}). \end{array}$$

2. Свойства степени с целым показателем

Для любых $a \neq 0, b \neq 0$ и любых целых m и n

$$\begin{array}{l} 1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \\ 2) a^m : a^n = a^{m-n}; \\ 3) (a^m)^n = a^{mn}; \\ 4) (ab)^n = a^n \cdot b^n; \\ 5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \end{array}$$

Примеры: 1) $a^{-16} \cdot a^{14} = a^{-16+14} = a^{-2}$;

$$2) a^{-5} : a^{-3} = a^{-5-(-3)} = a^{-5+3} = a^{-2};$$

$$3) (2a^2b^{-3})^{-4} = 2^{-4}(a^2)^{-4} \cdot (b^{-3})^{-4} = \frac{1}{2^4} a^{-8} b^{12} = \frac{1}{16} a^{-8} b^{12}.$$

175. Найдите значение выражения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 4^{-4} \cdot 4^6; & \text{г) } 2^{11} : 2^{13}; & \text{ж) } (2^{-3})^{-1}; \\ \text{б) } 2^{-5} \cdot 2^3; & \text{д) } 5^{-4} : 5^{-3}; & \text{з) } (5^3)^{-2} \cdot 5^4; \\ \text{в) } 10^9 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}; & \text{е) } 2^{-4} : 2; & \text{и) } 3^{-5} \cdot (3^{-3})^{-2}. \end{array}$$

176. Вычислите:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 5^{-17} \cdot 5^{16}; & \text{г) } 9^{-4} \cdot 27^5; & \text{ж) } \frac{3^{-10} \cdot 9^7}{(-3)^4}; \\ \text{б) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}; & \text{д) } 125^{-5} : 25^{-6}; & \text{з) } \frac{5^{-6} \cdot 25^8}{125^4}; \\ \text{в) } 8^{-3} \cdot 4^3; & \text{е) } \frac{2^{-22}}{4^{-6} \cdot 4^{-5}}; & \text{и) } \frac{(2^5)^3 \cdot (2^3)^{-6}}{4^{-2}}. \end{array}$$

177. Упростите выражение:

а) $1,5x^{-3}y^{12} \cdot 6x^4y^{-10}$;

б) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-1} x^{-4}y^{-5} \cdot 30x^2y^{-4}$;

в) $(0,25x^{-3}y^{-4})^2 \cdot \left(\frac{x^{-4}}{4y^{-2}}\right)^{-3}$;

г) $\left(\frac{a^{-4}b^3}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{a^{-3}b^4}\right)^{-3}$;

д) $\left(\frac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{9z}\right)^3$;

е) $\left(\frac{3x^3}{y^2}\right)^{-1} \cdot (x^{-2}y^{-1})^3$.

3. Стандартный вид числа

Определение. Стандартным видом числа называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n – целое число.

Число n называется порядком числа.

Примеры: 1) $125000 = 1,25 \cdot 10^5$;

2) $0,453 = 4,53 \cdot 10^{-1}$;

3) $0,000003 = 3 \cdot 10^{-6}$.

178. Укажите порядок числа, представленного в стандартном виде:

а) $1,3 \cdot 10^8$;

в) $2,7 \cdot 10^{-4}$;

д) $5,43 \cdot 10^6$;

б) $4,8 \cdot 10^3$;

г) $7,6 \cdot 10^{-1}$;

е) $8,75 \cdot 10^{-5}$.

179. Запишите в стандартном виде число:

а) 63 000 000;

в) 75 000 000;

д) 0,00345;

ж) $47 \cdot 10^4$;

б) 3 195 000;

г) 52,44;

е) 0,0000047;

з) $0,83 \cdot 10^7$.

180. Выразите:

а) $4,7 \cdot 10^3$ т в граммах;

б) $2,8 \cdot 10^{-4}$ км в сантиметрах;

в) $9,73 \cdot 10^{-1}$ кг в тоннах;

г) $6,25 \cdot 10^5$ см в метрах;

д) $3,65 \cdot 10^9$ см в километрах;

е) $7,85 \cdot 10^{16}$ г в тоннах.

181. Выполните умножение и результат представьте в стандартном виде:

а) $(4,25 \cdot 10^2) \cdot (2,4 \cdot 10^3)$;

б) $(5,23 \cdot 10^{-2}) \cdot (1,4 \cdot 10^4)$;

в) $(5,63 \cdot 10^{-3}) \cdot (4,2 \cdot 10^{-2})$.

Тест 7. Степень с целым показателем. Стандартный вид числа

Вариант 1

1. Вычислите 4^{-3} .

1) $\frac{1}{12}$;

2) $-\frac{1}{12}$;

3) $\frac{1}{64}$;

4) $-\frac{1}{64}$.

2. Запишите $\frac{a^{-6} \cdot (a^2)^{-3}}{a^{-8} \cdot a^5}$ в виде степени с основанием a .

1) a^0 ;

2) a^{-9} ;

3) a^{-14} ;

4) a^{-25} .

3. Вычислите $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

1) $-\frac{25}{9}$;

2) $\frac{25}{9}$;

3) $-\frac{9}{25}$;

4) $\frac{9}{25}$.

4. Возведите в степень $(y^{-8})^{-5}$.

1) y^{-13} ;

2) y^{13} ;

3) y^{40} ;

4) y^{-40} .

5. Запишите в стандартном виде число 40300.

1) $40,3 \cdot 10^3$;

2) $4,03 \cdot 10^4$;

3) $403 \cdot 10^2$;

4) $0,403 \cdot 10^5$

6. Для каждого числа укажите его порядок, вписав в таблицу под каждой буквой соответствующий номер ответа.

А) 8300

Б) 0,083

В) 8,3

Г) 0,0083

1) - 3

2) - 2

3) 3

4) 0

А	Б	В	Г

7. Вычислите $\frac{8^6 \cdot (8^{-4})^2}{8^{-3}}$.

8. Вычислите $\frac{35^{-18}}{5^{-20} \cdot 7^{-17}}$.

9. Найдите значение выражения $(2,3 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^4)$. Результат представьте в стандартном виде.

Вариант 2

1. Вычислите 2^{-5} .

1) -10 ;

2) 10 ;

3) $-\frac{1}{32}$;

4) $\frac{1}{32}$.

2. Запишите $\frac{y^{-5} \cdot y^{-4}}{y^6}$ в виде степени с основанием y .

1) y^{-3} ;

2) y^{-15} ;

3) y^{14} ;

4) y^{-14} .

3. Вычислите $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

1) $\frac{125}{8}$;

2) $-\frac{125}{8}$;

3) $\frac{8}{125}$;

4) $-\frac{8}{125}$.

4. Возведите в степень $(a^{-6})^{-5}$.

1) a^{-11} ;

2) a^{11} ;

3) a^{30} ;

4) a^{-30} .

5. Запишите в стандартном виде число 2402.

1) $240,2 \cdot 10^1$;

2) $24,02 \cdot 10^2$;

3) $2,402 \cdot 10^3$;

4) $0,2402 \cdot 10^{-4}$.

6. Для каждого числа укажите его порядок, вписав в таблицу под каждой буквой соответствующий номер ответа.

А) 950

Б) 0,95

В) 9,5

Г) 0,0095

1) -3

2) -1

3) 0

4) 2

А	Б	В	Г

7. Вычислите $\frac{(6^{-2})^3 \cdot 6^5}{6^{-2}}$.

8. Вычислите $\frac{7^{-16} \cdot 3^{-13}}{21^{-15}}$.

9. Найдите значение выражения $(8,7 \cdot 10^{-7}) \cdot (3 \cdot 10^4)$. Результат представьте в стандартном виде.

4. Элементы статистики

Из 7 класса надо знать статистические характеристики: среднее арифметическое, размах, мода, медиана.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда (ряд, где числа записаны в порядке возрастания) чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине. Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Пример. Рассмотрим числовой ряд 30; 32; 36; 40; 41; 42; 49; 50.

- 1) $\frac{30+32+36+40+41+42+49+50}{8} = 40$ – среднее арифметическое данного ряда
- 2) $50 - 30 = 20$ – размах ряда
- 3) $\frac{40+41}{2} = 40,5$ – медиана ряда
- 4) моды нет

182. Можно ли считать выборку представительной, если при изучении времени, которое затрачивают на выполнение уроков восьмиклассники:

- а) опрашивали только мальчиков;
- б) опрос проводили только по средам;
- в) опрашивали только учащихся гимназий?

183. Ряд данных о количестве акций одинаковой стоимости, приобретенных сотрудниками фирмы представлен в виде таблицы частот.

Число акций	Частота
2	20
5	10
10	7
20	2
25	4
100	2

Найдите для этого ряда данных среднее арифметическое, размах и моду.

184. В фермерском хозяйстве площади, отведенные под посевы зерновых, распределены следующим образом:

- пшеница – 60 %;
овес – 17 %;
просо – 13 %;
гречиха – 10 %.

Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение площадей, отведенных под зерновые в данном фермерском хозяйстве.

5. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}; \quad y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

1) Свойства функции $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Область определения: x – любое число, кроме 0.

Область значений: y – любое число, кроме 0.

Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.

Графиком является гипербола, расположенная в первой и третьей четвертях координатной плоскости.

Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

При $x > 0$ функция убывает и при $x < 0$ функция убывает.

2) Свойства функции $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

Область определения функции: x – любое число, кроме 0.

Область значений функции: $y > 0$, т.е. $y \in (0; +\infty)$.

График расположен выше оси x в первой и второй координатных четвертях.

Любым противоположным значениям аргумента соответствуют одно и то же значение функции.

При $x > 0$ y возрастает и при $x < 0$ y возрастает.

185. Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^{-1}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ x^{-2}, & \text{если } x < -1, x > 1. \end{cases}$$

186. Известно, что точки $A\left(a; \frac{1}{256}\right)$ и $B(0,64; b)$ принадлежат графику функции $y = x^{-2}$.

Найдите a и b .

6. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение

Определение. Дисперсией ряда чисел называется среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего арифметического этого ряда.

Пример. Рассмотрим числовой ряд 7; 4; 5; 10; 6; 5; 10; 15.

Среднее арифметическое этого ряда равно $\frac{7+4+5+10+6+5+10+15}{8} = 7,75$

Для каждого члена ряда найдем его отличие (его отклонение) от среднего арифметического:

$$\begin{array}{llll} 7 - 7,75 = -0,75; & 4 - 7,75 = -3,75; & 5 - 7,75 = -2,75; & 10 - 7,75 = 2,25; \\ 6 - 7,75 = -1,75; & 5 - 7,75 = -2,75; & 10 - 7,75 = 2,25; & 15 - 7,75 = 7,25. \end{array}$$

Найдем сумму отклонений:

$$-0,75 + (-3,75) + (-2,75) + 2,25 + (-1,75) + (-2,75) + 2,25 + 7,25 = -11,75 + 11,75 = 0.$$

Сумма отклонений для любого ряда равна 0 и не может характеризовать разброс данных ряда.

Составим ряд квадратов отклонений и вычислим среднее арифметическое этого ряда.

$$\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-3\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-2\frac{3}{4}\right)^2 + \left(2\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-1\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-2\frac{3}{4}\right)^2 + \left(2\frac{1}{4}\right)^2 + \left(7\frac{1}{4}\right)^2}{8} =$$

$$= \frac{\frac{9}{16} + \frac{225}{16} + \frac{121}{16} + \frac{81}{16} + \frac{49}{16} + \frac{121}{16} + \frac{81}{16} + \frac{841}{16}}{8} =$$

$$= \frac{9+225+121+81+49+121+81+841}{16 \cdot 8} = \frac{1528}{128} = 11\frac{120}{128} = 11\frac{15}{16} =$$

$= 11,9375$ – это и есть дисперсия.

187. Для ряда чисел 4; 6; 9; 10; 7; 2 найдите:

- а) среднее арифметическое;
- б) отклонение каждого члена ряда от среднего арифметического;
- в) дисперсию ряда.

Тест 8. Итоговый тест

Вариант 1

1. Решите уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

1) $-2; \frac{1}{2}$;

2) $-2; -\frac{1}{2}$;

3) $2; \frac{1}{2}$;

4) $2; -\frac{1}{2}$.

2. Какое из уравнений имеет иррациональные корни?

1) $x^2 - 3x + 1 = 0$;

2) $x^2 - 3x - 1 = 0$;

3) $x^2 - 3x + 4 = 0$;

4) $x^2 - 3x - 4 = 0$.

3. Сократите дробь $\frac{4+b^2-4b}{b^2-4}$.

1) 4;

2) b;

3) $\frac{b-2}{b+2}$;

4) $\frac{2-b}{b+2}$.

4. Представьте в виде дроби $\frac{64-a^2}{a^2-2a+1} : \frac{16-2a}{a-1}$.

1) $\frac{8+a}{2(a-1)^3}$;

2) $-\frac{a+8}{2(a-1)}$;

3) $\frac{a+8}{2(a-1)}$;

4) $\frac{(a-8)^2(a+8)}{2(a-1)^3}$.

5. Вычислите $\frac{\sqrt{220}}{\sqrt{8,8}}$.

1) 10;

2) 25;

3) 5;

4) $\frac{1}{2}$.

6. Внесите множитель под знак корня $-\frac{1}{3}\sqrt{27a}$.

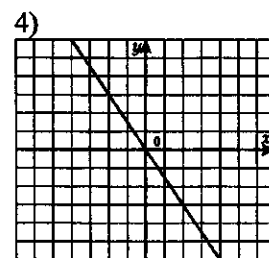
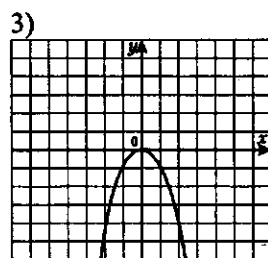
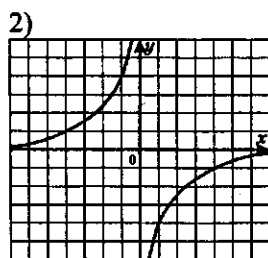
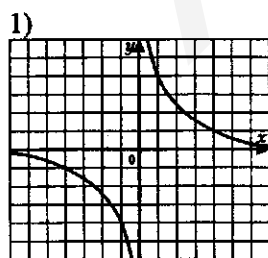
1) $-\sqrt{3a}$;

2) $\sqrt{-3a}$;

3) $-\sqrt{9a}$;

4) $\sqrt{-9a}$.

7. На каком чертеже, изображен график функции $y = -\frac{4}{x}$?



8. Изготовитель гарантирует, что каждый кусок обоев имеет длину $10 \pm 0,2$ м. Длина первого куска 9,7 м, длина второго куска 10,11 м. Какой из кусков имеет гарантируемую длину?

1) только первый;

2) только второй;

3) имеют оба;

4) не имеет ни один.

9. Решите систему неравенств $\begin{cases} 6x+4 > 2(5-4x), \\ 3x-5 \leq 5x+5. \end{cases}$

1) $\left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$;

2) $[-5; +\infty)$;

3) $\left[-5; \frac{3}{7}\right)$;

4) $\left(\frac{3}{7}; 5\right]$.

10. Решите уравнение $\frac{x^2+5x}{x-4} - \frac{5x+16}{x-4} = 0$.

1) $-4; 4$;

2) 4 ;

3) -4 ;

4) корней нет.

11. Упростите выражение $\frac{a^2-x^2}{a^2+4} \cdot \left(\frac{4+ax}{x^2-2ax+a^2} + \frac{a}{a-x} \right)$.

12. Постройте график функции $y = \frac{x^2-10x+25}{\sqrt{x^2-10x+25}}$.

13. Решите задачу.

Две машинистки должны были напечатать по 60 страниц каждая. Одна машинистка за 1 час печатает на 2 страницы меньше, поэтому закончила работу на 1 час позже. Сколько страниц в час печатала первая машинистка?

Вариант 2

1. Решите уравнение $2x^2 - x - 3 = 0$.

1) $-\frac{3}{2}; 1$

2) $-1; \frac{3}{2}$

3) $\frac{3}{2}; 1$

4) $-\frac{3}{2}; -1$

2. Какое из уравнений имеет рациональные корни?

1) $x^2 + 2x + 2 = 0$;

2) $x^2 + 2x - 6 = 0$;

3) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

4) $x^2 + 2x + 3 = 0$.

3. Сократите дробь $\frac{x^2 - 8x + 16}{8 - 2x}$.

1) $\frac{x-4}{2}$;

2) $\frac{4-x}{2}$;

3) $\frac{x-4}{8}$;

4) $4x + 2$.

4. Представьте в виде дроби $\frac{a^2 - 16}{a - 3} : \frac{8 - 2a}{9 - 6a + a^2}$.

1) $\frac{(a+4)(a-3)}{2}$;

2) $\frac{(a+4)(3-a)}{2}$;

3) $\frac{(a-3)^2(a+3)}{4-a}$;

4) $\frac{a-3}{4+a}$.

5. Вычислите $\sqrt{3\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{4,5}$.

1) 4;

2) 8;

3) 16;

4) 32.

6. Внесите множитель под знак корня $-5\sqrt{0,2y}$.

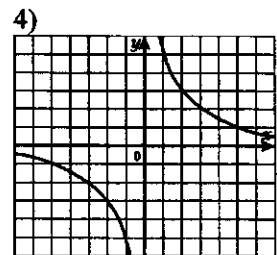
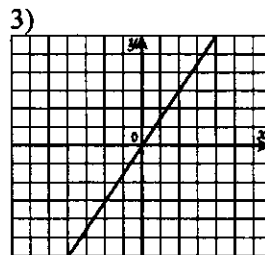
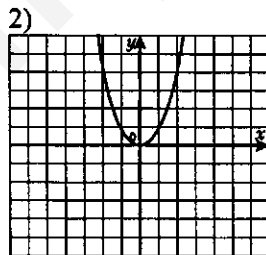
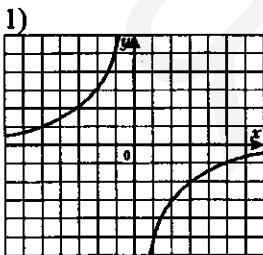
1) $\sqrt{5y}$;

2) $-\sqrt{5y}$;

3) $-\sqrt{-5y}$;

4) $\sqrt{-5y}$.

7. На каком чертеже изображен график функции $y = \frac{5}{x}$?



8. Изготовитель гарантирует, что каждый моток провода имеет длину $5 \pm 0,02$ м. Длина первого 4,92 м, а второго 5,01 м. Какой моток имеет гарантируемую длину?

1) только первый;

2) только второй;

3) имеют оба;

4) не имеет ни один.

9. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x-18 \leq 3(x+2), \\ 4x-8 > 3x-12. \end{cases}$

1) $(-4; +\infty)$;

2) $(-\infty; 12)$;

3) $(-4; 12]$;

4) $(-12; 4]$.

10. Решите уравнение $\frac{x^2+4x}{x-5} - \frac{4x+25}{x-5} = 0$.

1) $-5; 5$;

2) 5 ;

3) -5 ;

4) корней нет.

11. Упростите выражение $\frac{x^2}{4y^2+4xy+x^2} : \left(\frac{x}{x+2y} - \frac{2xy}{4y^2-x^2} \right)$.

12. Постройте график функции $y = \frac{x^2+4x+4}{\sqrt{x^2+4x+4}}$.

13. Решите задачу.

Рабочий и ученик должны изготовить по 40 деталей. Рабочий изготавливал за 1 час на 3 детали больше, чем ученик, поэтому весь заказ он выполнил на 3 часа раньше. Сколько деталей выпускал за 1 час ученик?

Ответы

Повторение изученного в 7 классе

1. а) 1; 3; 6) 2; 4; 5; 6
2. 1) 5; 2) 7; 3) 0; 4) 5.
3. 2)
4. 1) $5ab+4c^2$; 2) $2x^2+8y$; 3) $3y^2+y+3$; 4) $-12x^2+1$.
5. а) $4x^3-13x^2-3$; 6) $-2y^2+3y-15$.
6. 1) -3 ; 2) 0,5.
7. а) $-6a^4b^2+2a^3b^3-2a^3$; 6) $15x^3+20x^2-6x-8$.
8. 1) $9x^2+12x+4$; 8) $4ab$;
2) $36y^4-84y^2+49$; 9) $-16a^2+26ab+2b^2$;
3) $\frac{1}{16}a^2-ab+4b^2$; 10) $-18x^2-54$;
4) $x^2-10x+25$; 11) y^2-25 ;
5) $a^3+9a^2+27a+27$; 12) x^4-36 ; 12) x^4-36 ;
6) $27y^3-54y^2x+36yx^2-8x^3$; 13) $0,49x^4-y^6$;
7) a^2+b^2 ; 14) $10x^2y^3-4y^5-10x^2y^2+25x^4$.
9. 1) а) $3xy(x-2y^2)$; в) $(b+2)(b^3-3)$; д) $(b-5)(c^2+6)$.
6) $-12x^2y^2(2xy^3-3)$; г) $(a-b)(a+4)$;
2) а) $(x-y)(5-a)$; 6) $(a-4)(b+y)$; в) $3(x+5)(y-1)$; г) $2a(2b+15)$.
3) а) $(a-6x)(a+6x)$; г) $(y-1)(y+1)(y^2+1)(y^4+1)$; ж) $(x+3)(x^2-3x+9)$.
6) $(a^2-5)(a^2+5)$; д) $(a-b-2x)(a-b+2x)$;
в) $(x^2-3)(x^2+3)(x^4+9)$; е) $(2-b)(4+2b+b^2)$;
4) а) $(2b-c)(1+2b+c)$; в) $(x+a)(x-a-1)$; д) $(4-a-c)(4-a+c)$.
6) $(x-a-b)(x-a+b)$; г) $(p-a+b)(p+a-b)$;
10. 1) 0; 2; 3) $-4; 0; 4$; 5) $-2; -1; 2$;
2) $-1; 0; 1$; 4) $-2; 0; 2$; 6) $-5; 1; 5$.

Проверочная работа

Вариант 1

1.	а	б	в	г
	2	3	5	0

2. 2
3. 1) $-6a^4+2a^3-2a^2$; 3) $8x^2y-9xy^2$;
2) $-5x^5-2y^5-6$; 4) $3ab^3+a^2b^2-5$.
4. а) a^2+a+2 ; в) $x^2+5,5x+6$;
б) 16; г) $12m^3-13n^2$.
5. а) $6a^3-24a^2-12a$; в) $1,5y^3-3,75y^2+9y$;
б) $-12x^4+12x^3+8x^2$; г) $-3a^3b^3+3a^3b+3ab^3$.
6. а) $a^3+ab-a^2b^2-b^3$; в) $a^4-4a^3+4a^2$;
б) $81-x^4$; г) $3a^3+12a^2+12a$.

7. 1) $(x+y)(a+7)$; 3) $(2a-3)(2a+3)$; 5) $(a+b+x)(a+b-x)$.
 2) $(y-1)(y^2+1)$; 4) $8ab$;
8. 1) $-1\frac{2}{19}$ 2) $-3,5$ 3) $-\frac{4}{7}; 0$ 4) $0; 4\frac{2}{3}; 5$.

Вариант 2

1.

а	б	в	г
3	5	4	0
2. 3.
3. 1) $-5a^4 - 5a^3 + 11a^2$; 3) $-7xy^2 + 3x^2y$;
 2) $11y^5 - 6x^3 - 3$; 4) $-a^3b^3 - 2a^2b^2 - 5a^2b - 4$.
4. а) $x^2 - x - 5$; в) $-2x^2 - 2,5x + 4$;
 б) $-5a^2 - 6a + 7$; г) $9a^2b^2 + a^2 + 4b^2$.
5. а) $10a^3 + 35a^2 - 20a$; в) $-2,5y^3 + 3,75y^2 - 10y$;
 б) $20x^4 - 12x^3 - 8x^2$; г) $10x^3y^3 + 5x^3y - 5xy^3$.
6. а) $9y^2 - x^4$; в) $x^4 - 6x^3 + 9x^2$;
 б) $25 - y^4$; г) $5x^3 + 40x^2 + 80x$.
7. 1) $(a+1)(8b+7)$; 3) $(5a-4)(5a+4)$; 5) $(2x-a-b)(2x+a+b)$.
 2) $(x+1)^2(x-1)$; 4) $12ab$;
8. 1) -70 ; 2) 2 ; 3) $0; 2$; 4) $6; 12$.

I. Рациональные дроби

11. Целые 2; 3 Дробные 1; 4; 5.
12. а) 1; 2; 4; б) 3; 5.
13. а) x – любое число, кроме -8 ; в) x – любое число, кроме 0 ; д) a – любое число.
 б) b – любое число, кроме -4 и 4 ; г) $x \neq \pm 4$;

14. а)

x	-9	-6	-3	-2	-1	4	12	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0
$-\frac{36}{x}$	4	6	12	18	36	-9	-3	-72	108	Не существует

б)

x	0	1	2	3	5	-1	8	9	10	7
$\frac{x}{(6-x)^3}$	0	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{9}$	5	$-\frac{1}{343}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{32}$	-7

15. а) $\frac{2}{9}; \frac{5}{9}; \frac{1}{3}; \frac{7}{9}; \frac{9}{8}$; б) $\frac{24}{48}; \frac{40}{48}; \frac{28}{48}; \frac{54}{48}; \frac{36}{48}$.
16. 1) Да при $c \neq 0$; 2) Нет; 3) Да при $a \neq -5; a \neq 3$.
17. а) Да при $a \neq 4$; б) Да при $a \neq \pm 5$.
 1) Верные при всех a , кроме: а) 4; б) ± 5 .
 2) Тождественным преобразованием.
 3) Замены его на тождественно равное при всех допустимых значениях переменных.
 4) Умножение и деление дроби на одно и тоже выражение, отличное от 0.
 5) Да.
18. а) $\frac{2a}{3}$; в) $\frac{a}{5}$; д) $\frac{a+5}{a-5}$; ж) $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$;
 б) $\frac{x}{3y}$; г) $9x$; е) $\frac{1}{a^2+ab+b^3}$; з) $a+b$.

19. а) $\frac{5a}{b}; 10$; б) $\frac{x-3y}{4x}; -2$.
20. $y = x - 2$ при $x \neq 2; 4$).
21. а) -1 ; б) $a+2$; д) $\frac{1}{a-2}$;
 в) $2-a$; г) 1 ; е) 1 .
22. а) $9(a+b)$; б) $4(c-3d)$; в) $\frac{9(x-2y)}{5}$; г) $\frac{3x+y}{25(3x-y)}$.
23. а) $\frac{5^n(25+5-1)}{5^n(25-1)} = \frac{29}{24}$; б) $\frac{3^{3n+3}-3^{n+3}}{3^2 \cdot 3^n(3^n-1)(3^n+1)} = \frac{3^{n+3}(3^{2n}-1)}{3^2 \cdot 3^n(3^n-1)(3^n+1)} = 3$.
24. а) $\frac{a+b}{5}$; б) $-\frac{8a^2}{x}$; в) $\frac{a}{8}$; г) $\frac{3a+x}{b}$.
25. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2c-5}{c}$; в) $\frac{a-6b}{2a}$; г) $-\frac{1}{y}$.
26. а) $-x-a$; б) 3 ; д) $\frac{3}{b-a}$;
 в) $\frac{4}{a+b}$; г) $\frac{a+6}{a-3}$; е) $\frac{2a-10b}{(a-b)^2}$.
27. а) $\frac{a+6}{a-6}$; б) $\frac{(x+6)^2}{(x-6)^2}$; в) $\frac{x-5}{x+5}$; г) $\frac{9+a}{9-a}$.
28. а) $\frac{2a}{x} + \frac{b}{x}$; б) $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{6a}$; в) $\frac{x}{3y} + \frac{4y}{x}$; г) $\frac{2}{y} + \frac{y}{2a}$.
29. $4n+3+\frac{6}{n}$.
30. а) $\frac{2a+3b}{6}$; б) $\frac{4x^2y-9y+x}{12x^3}$; д) $\frac{2a-b-9}{3}$;
 в) $\frac{b^3-a^2}{ab}$; г) $\frac{xy+1}{y}$; е) $\frac{a^2+5a-1}{a}$.
31. а) $\frac{2a^2-b^2}{a(a+b)}$; б) $\frac{m^2+n^2}{n^2-m^2}$; д) $\frac{x^2+a^2}{x(x-a)}$;
 в) $\frac{6x-2}{x(x-2)}$; г) $\frac{4a}{(2-a)(a+2)}$; е) $\frac{b-a}{b+a}$.
32. а) $\frac{2x^2+6x+8}{x(x-2)(x+2)}$; б) $\frac{2}{x(x-2)^2}$; в) $-\frac{12a}{2a+3}$; г) $\frac{4-4a}{a^2-4}$.
33. а) $\frac{x^2+24x}{16-x^2}$; б) $\frac{1}{a-2}$; в) $\frac{x}{x^2-9}$; г) 0 .
34. а) $\frac{4}{5x^2}$; б) $\frac{2y}{y+1}$; д) $\frac{13x^2}{a}$;
 в) $3x^2$; г) $-\frac{90x}{y}$; е) $-\frac{3}{m}$.
35. а) $\frac{24}{a+5b}$; б) $\frac{2x(x+2)}{x-2}$; в) $\frac{a(a+2)}{3(a-2)}$; г) $\frac{2xy(x+3y)}{x-3y}$.

36. а) $\frac{a^2}{b}$; б) $\frac{16}{x^3}$; в) $\frac{a-4}{6a}$; г) $-\frac{4ab}{a+b}$.
37. а) $\frac{8}{9mn}$; б) $\frac{1}{32xy^3}$; д) $\frac{x}{2(3-x)}$;
 б) $\frac{2y}{3x^4}$; г) $\frac{8}{a}$; е) $2(a+2)$.
38. а) $\frac{1}{x-4y}$; б) $\frac{a-4b}{a+4b}$; в) $\frac{x-5y}{x+5y}$; г) $\frac{4b-a}{2(4b+a)}$.
39. а) $\frac{x+2}{a-b}$; б) $\frac{3b(a^3+7b)}{a^2-49}$; д) $-\frac{x}{8}$;
 б) $\frac{2(x+3)}{x^2-2x+4}$; г) $\frac{2}{mn(m+3n)}$; е) $\frac{1}{(a-1)^2}$.
40. а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{y}{x}$; в) 1; г) $\frac{x+3}{x-3}$.
41. а) $\frac{a-b}{b}$; б) $\frac{y}{x}$; в) 1; г) $\frac{3(x+3)}{2(x-3)}$.
42. а) Да, являются при $a \neq 0, a \neq \pm 2$; б) $x-2; -3, 3$.

43.

x	1	2	4	8	12	16	-1	-2	-4	-8	-12	-16
$y = \frac{16}{x}$	16	8	4	2	$\frac{4}{3}$	1	-16	-8	-4	-2	$-\frac{4}{3}$	-1

44.

x	0,1	-0,02	-100
y	-100	500	0,1

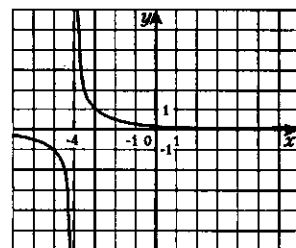
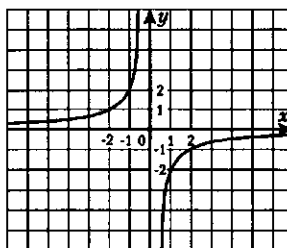
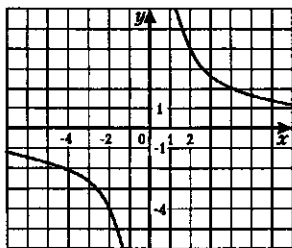
y	0,05	10	-20
x	-200	-1	0,5

45. $k = xy$ а) $k = 8 \cdot 1,25 = 10$; б) $k = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5} = 3$; в) $k = -500 \cdot 0,002 = -1$;
 $y = \frac{10}{x}$ $y = \frac{3}{x}$ $y = -\frac{1}{x}$.
46. а) $k = -4 \cdot (-0,25) = 1$; б) $50 \cdot (-0,02) = -1$; в) $-40 \cdot (-0,05) = 2$;
 $-8 \cdot (-0,125) = 1$. $-1 \neq 1$. $2 \neq 1$.
 Проходит. Не проходит. Не проходит.

47.

A	B	C	D
$y = \frac{3}{x}$	$y = -\frac{2}{x}$	$y = -2x + 3$	$y = 2x$

48. а) $y = \frac{32}{(x+1-x+1)(x+1+x-1)}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{x+4}{(x+4)^2}$;
 $y = \frac{32}{2 \cdot 2x} = \frac{8}{x}$. $y = \frac{1}{x+4}$.



Тест 1. Рациональные дроби

Вариант 1

1. 2

2. 2

3. 1

4. 1

5. 2

6. $\frac{a(2-a)}{a+4}$

7. $\frac{x-y}{y}$

8. $\frac{4x(x-2)}{x-5}; -\frac{7}{12}$

9. $y = \frac{2}{x+1};$

Смещенная влево на 1 гипербола $y = \frac{2}{x}$.

10. $\frac{k}{k^2} = -\frac{1}{4}; \frac{1}{k} = -\frac{1}{4}; k = -4.$

Вариант 2

1. 2

2. 1

3. 3

4. 1

5. 2

6. $\frac{x+4}{x(x-2)}$

7. $2(a-b)$

8. $\frac{(x-4)^2}{5(x^2-4)}; -\frac{49}{55}$

9. $y = \frac{6(x-1)}{(x-1)^2}; \quad y = \frac{6}{x-1};$

Смещенная вправо на 1 гипербола $y = \frac{6}{x}$.

10. $\frac{k}{-k^2} = \frac{1}{9}; \frac{k}{-k^2} = \frac{1}{9}; k = -9.$

II. Квадратные корни

49. а) Неверно; б) Неверно; в) Верно.

50. $2\frac{4}{5} = \frac{14}{5} = 14:5 = 28:10;$

$0,7 = \frac{7}{10} = \frac{21}{30} = 7:10 = 21:30;$

$-5\frac{3}{4} = \frac{-23}{4} = \frac{-46}{8} = -23:4 = -46:8;$

$-19 = -\frac{19}{1} = \frac{-38}{2} = -19:1 = -38:2;$

$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{5} = 0:1 = 0:2 = 0:5.$

51. $35 = \frac{35}{1}; \quad -43 = \frac{-43}{1}; \quad 5,3 = \frac{53}{10}; \quad -0,9 = \frac{-9}{10}; \quad 14\frac{1}{6} = \frac{85}{6}; \quad -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9}.$

52. а) $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6);$

е) $12,27 = 12,27000... = 12,27(0);$

б) $\frac{5}{12} = 0,41666... = 0,41(6);$

ж) $-18 = -18,000... = -18,(0);$

в) $\frac{3}{7} = 0,428571428571... = 0,(428571);$

з) $\frac{5}{16} = 0,3125000... = 0,3125(0);$

г) $\frac{-19}{9} = -2,111... = -2,(1);$

и) $-1\frac{7}{40} = -1,175000... = -1,175(0);$

д) $-\frac{4}{15} = -0,2666... = -0,2(6);$

к) $2\frac{5}{11} = 2,454545... = 2,(45).$

53. а) $2,014 < 2,104;$ в) $-3,27 > -3,47;$

л) $-1,176 < -1\frac{7}{40}$, т.к. $-1\frac{7}{40} = -1,175;$

б) $-0,003 < 0,001;$ г) $\frac{3}{8} = 0,375;$

е) $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}.$

54. а) $\frac{1}{9} = \frac{8}{72} = \frac{16}{144}$; $\frac{1}{8} = \frac{9}{72} = \frac{18}{144}$; $\frac{16}{144} < \frac{17}{144} < \frac{18}{144}$; следовательно, $\frac{1}{9} < \frac{17}{144} < \frac{1}{8}$;
 б) аналогично $\frac{1}{10} < \frac{19}{180} < \frac{1}{9}$.
55. а) $2\frac{3}{5}; \frac{5}{7}$; б) $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \pi$.
56. а) Верно; б) нет; в) верно; г) верно.
57. Рациональные: $0; \frac{1}{9}; 0,57; -2,(34); 5,3(41); 516$.
 Иррациональные: $0,71711711171117117\dots; \pi$.
58. а) $2,(57) > 2,57$; в) $1\frac{3}{7} = 1,(428571)$; $1\frac{3}{7} < 1,4286$; д) $2,(375) > 2\frac{3}{8}$;
 б) $-5,4(8) < -5,48$; г) $3\frac{1}{7} > 3,142$; е) $-4(16) < -4\frac{4}{25}$.
59. а) $AB = 5,5$; б) $AB = 2\frac{2}{3}$.
60. $-4,75\dots; -4,64\dots; 3(6); 5,62$.
61. а) $a = 2,0549\dots \approx 2,1$; $b = 3,0620\dots \approx 3,1$; $a + b \approx 5,2$.
 б) Аналогично $a + b \approx 5,11$.
 в) $a + b \approx 5,117$.
62. а) $a = 58,789\dots \approx 58,8$; $b = 45,234\dots \approx 45,2$; $a - b \approx 58,8 - 45,2 = 13,6$.
 б) Аналогично $a - b \approx 13,56$.
63. а) $\sqrt{49} = 7$ верно, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$;
 б) $\sqrt{0,25} = 0,5$ верно, так как $0,5 > 0$ и $(0,5)^2 = 0,25$;
 в) $\sqrt{36} = -6$ неверно, так как $-6 < 0$;
 г) $\sqrt{4,9} = 0,7$ неверно, так как $(0,7)^2 = 0,49 \neq 4,9$;
64. Имеет смысл в пунктах б; в; г; д. Не имеет смысла в пунктах а, е.
65. а) 20; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{8}{5}$; г) 0,9; д) 60.
66. а) $\sqrt{a+b} = \sqrt{49-13} = \sqrt{36} = 6$.
 б) Вычисляем аналогично: 8; 11.
- | | | | | | | |
|----|----------------|-------|-------|---|----|-----|
| в) | x | 0,04 | 0,49 | 1 | 36 | 121 |
| | $x - \sqrt{x}$ | -0,16 | -0,21 | 0 | 30 | 110 |
- Если $x = 0,04$, то $x - \sqrt{x} = 0,04 - \sqrt{0,04} = 0,04 - 0,2 = -0,16$.
67. а) 13,9; б) 75; в) 1.
68. а) 36; б) 0,09; в) 0; г) $\frac{1}{25}$; д) 144; е) $\frac{9}{16}$; ж) решений нет; з) 18,1.
69. а) 15; б) 16; в) 0; г) a^2 ; д) a^3 ; е) $-a^3$.
70. Имеет: а, б, в; не имеет: г.
71. а) ± 11 ; б) $\pm 0,9$; в) $\pm \sqrt{27}$; г) $\pm \sqrt{3,6}$; д) ± 2 ; е) $\pm \sqrt{6}$; ж) ± 10 ; з) решений нет; б) $x \geq 0$; и) ± 10 ; к) $-2; 0; 2$; л) $-\sqrt{15}; 0; \sqrt{15}$; м) 0; н) 1; 11; о) $-10; 2$; п) $7 \pm \sqrt{5}$; р) $-3 \pm \sqrt{8}$.
72. а) $a \geq 0$; б) $x \geq 0$; в) $a \geq 0$; г) $b \leq 0$.

73. а) 9; в) -45; д) 1,25; ж) $\frac{1}{3}$.
74. б) 7; г) 2,1; е) 27;
а) 1,64; б) 38; в) 76; г) -0,5.
75. а)

x	-9	-4	2	10	125
$\frac{ x }{x}$	-1	-1	1	1	1

 б)

1

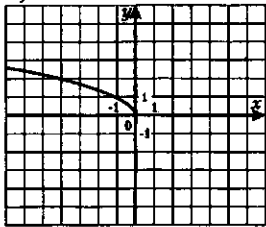
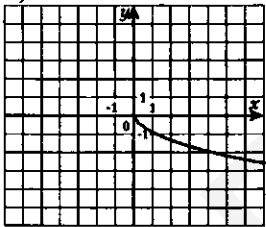
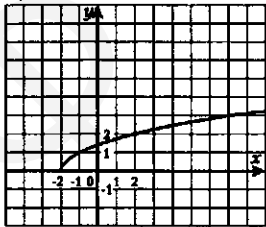
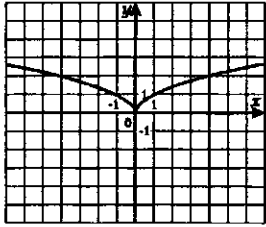
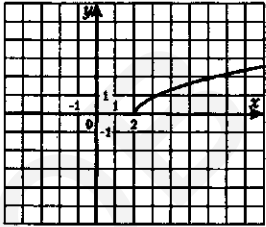
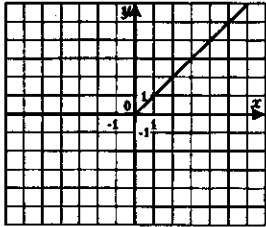
 в)

-1

76. а)

x	3,5	6	8,5
$\sqrt{x}$	$\approx 1,9$	$\approx 2,4$	$\approx 2,9$

 б)

y	1,5	2,5	2,7
x	2	6,3	7,3
77. а) Принадлежит; б) не принадлежит; в) не принадлежит; г) принадлежит.
78. а) Пересекает; б) пересекает; в) пересекает; г) не пересекает.
79. а) $x \leq 0$  в) $x \geq 0$  д) $x \geq -2$ 
- б) x – любое число  г) $x \geq 2$  е) $y = x, x \geq 0$ 
80. а) $\sqrt{1,4} < \sqrt{1,6}$; в) $\sqrt{\frac{1}{3}} > \sqrt{\frac{1}{9}}$; д) $\sqrt{3,7} > \sqrt{3\frac{1}{3}}$.
- б) $\sqrt{29} < \sqrt{30}$; г) $\sqrt{0,17} > 0,4$;
81. а) $\sqrt{0,4}; \sqrt{0,8}; \sqrt{2,7}; \sqrt{9,4}; \sqrt{19,5}$; б) 5; $\sqrt{18}; \sqrt{17,6}; \sqrt{13}; \sqrt{0,3}$.
82. а) 14; б) -3; в) 3; г) 3.
83. а) $\pm\sqrt{5}$; б) 25; в) $\pm\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{81}$.

Тест 2. Арифметический квадратный корень

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7
2	4	4	2	3	1,4	5; 6

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	3	2	$\frac{24}{13}$	4; 5; 6

84. а) 18; в) 0,022; д) 720; ж) 6,5;
б) $\frac{8}{3}$; г) $3\frac{3}{35}$; е) 72; з) 2,8.
85. а) 12; в) 7; д) 12; ж) 0,1;
б) 13; г) 4; е) 2; з) 0,2.

86. а) 4,6; в) 1; д) 36;
б) 4; г) -2; е) 27.
87. а) $-2x$; в) $-1,6a$;
б) $-y$; г) $\sqrt{x^2-2x+1}-x+3=\sqrt{(x-1)^2}-x+3=|x-1|-x+3=x-1-x+3=2$.
88. а) $2\sqrt{6}$; в) $-3\sqrt{3}$; д) $4|b^3|\sqrt{x}$;
б) $10\sqrt{3}$; г) $3b^2a^4\sqrt{3b}$; е) $2a^6b\sqrt{-11b}$.
89. а) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{36x}$; д) $\sqrt{\frac{1}{y^5}}$; ж) $-\sqrt{-16a}$; и) $-\sqrt{-75x}$;
б) $-\sqrt{200}$; г) $-\sqrt{32a}$; е) $-\sqrt{3x^3}$; з) $\sqrt{-4x^3}$; к) $\sqrt{-3x^7}$.
90. а) $4\sqrt{3} < \sqrt{75}$; б) $\sqrt{147} > 7\sqrt{2}$; в) $\sqrt{29} < 4\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{10} < 10\sqrt{\frac{1}{2}}$.
91. а) $6\sqrt{2}$; б) 12; в) $9-4\sqrt{5}$; г) $39+12\sqrt{3}$; д) 1.
92. а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; б) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; в) $2\sqrt{b}+\sqrt{2}$; г) $3\sqrt{b}-\sqrt{3}$.
93. а) $3\sqrt{2}$; в) $8\sqrt{5}+20$; д) $6\sqrt{2}-2$; ж) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$;
б) $\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$; г) $\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$; е) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
94. а) $x^2 = \sqrt{(\sqrt{20}-4)(\sqrt{20}+4)}$; б) $x^2 = (\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}})^2$ в) ± 2 .
 $x^2 = \sqrt{20-16}$; I способ
 $x^2 = \sqrt{4}$; $x^2 = (\sqrt{9+4\sqrt{5}})^2 - 2\sqrt{9+4\sqrt{5}}\sqrt{9-4\sqrt{5}} + (\sqrt{9-4\sqrt{5}})^2$;
 $x^2 = 2$; $x^2 = 9+4\sqrt{5} - 2\sqrt{81-80} + 9-4\sqrt{5}$;
 $x = \pm\sqrt{2}$. $x^2 = 16$; $x = \pm 4$.
 II способ
 $x^2 = \left(\sqrt{(2+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} \right)^2$;
 $x^2 = (|2+\sqrt{5}| - |2-\sqrt{5}|)^2$;
 $x^2 = (2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5})^2$;
 $x^2 = 16$; $x = \pm 4$.

Тест 3. Квадратные корни

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	3	2	1	1	4	3	$\frac{3}{6a+\sqrt{6}}$	3	3

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	4	13	2	1	3	$\frac{3}{3\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	-2	-85

III. Квадратные уравнения

95.

а, в, г, д.

96.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	6	-10	7
2	1	-4	-3
3	-1	-7	1
4	1	9	0
5	5	0	-40
6	8	0	0

Приведенные в пунктах 2 и 4.
Неполные в пунктах 4; 5; 6.

97.

а) $\pm 0,8$;

в) ± 10 ;

д) $\pm 0,25$;

б) $\pm 2\sqrt{2}$;

г) решений нет;

е) решений нет.

98.

а) 0; 1,6;

в) -0,4; 0;

д) $0; \frac{1}{7}$

б) 0; 1,4;

г) 0; 1,25;

е) -0,75; 0.

99.

а) 0; 3;

г) 0;

ж) решений нет;

б) $\pm 3\sqrt{2}$;

д) решений нет;

з) 5;

в) решений нет;

е) 0,5; 2,5;

и) -3.

100.

а) два корня;

в) два корня;

д) два корня;

б) корней нет;

г) два корня;

е) один корень.

101.

а) -8; 3;

е) -15; 15;

л) 6;

б) $\frac{-1 \pm \sqrt{85}}{6}$;

ж) $-6; 2; -2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}$;

м) 1; 5;

в) 0,25; 1;

з) ± 4 ;

н) $\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$;

г) $0; \frac{5}{3}$;

и) -1; 1;

о) $2; 4\sqrt{2}$;

д) $\frac{2}{7}; 1$;

к) -1; 1;

п) $\sqrt{2}; 4\sqrt{2}$.

102.

а) -7; 9;

б) $1 - \sqrt{7}; 1 + \sqrt{7}$;

в) -13; -5;

г) $-3; 2; \frac{8}{3}; 5$;

д) уравнение распадается на два: $x^2 - x - 14 = x^2 - 5x + 6$ или $x^2 - x - 14 = -(x^2 - 5x + 6)$.

Ответ: -1; 4; 5.

е) $\sqrt{2}; 4\sqrt{2}$;

з) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}; \frac{\sqrt{2}+1}{4}$

к) -5; 3;

м) -5; -0,5; 3;

о) -11; 1;

ж) $\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}; \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$;

и) корней нет;

л) 6; 12;

н) -1; -2;

п) $3 \pm \sqrt{5}$.

103.

а) При $a = -0,8; a = 1$;

б) при $a = -6; a = -2; a = 3$.

104.

21; 25.

105.

5; 12.

106.

5; 11.

107.

36.

108.

а) $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}; x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}$;

б) корней нет;

в) $x_1 + x_2 = 7; x_1 \cdot x_2 = 10$.

109.

а) -5; 4;

в) -6; 2;

д) -4; 3;

б) -1; 12;

г) -3; 4;

е) -12; -1.

110.

$D > 0$.

Сумма корней $x_1 + x_2 = 6$; произведение $x_1 \cdot x_2 = 8$.

а) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 6^2 - 2 \cdot 8 = 20$;

в) 2,5;

б) $x_1 \cdot x_2^3 + x_2 \cdot x_1^3 = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) = 8 \cdot 20 = 160$;

г) 272.

111. Более двух корней возможно при $a^2 - 6a + 8 = 0$; $a_1 = 2$; $a_2 = 4$.
 Если $a = 2$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 10 - 6 - 4 = 0$; $0 = 0$ верно при любом значении x .
 Если $a = 4$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x^2 + 12x + 10 - 12 - 16 = 0$; $12x - 18 = 0$; $x = \frac{3}{2}$.
 Ответ: при $a = 2$.
112. а) $x_2 = 3 - \sqrt{3}$; $c = 6$; б) $x_2 = 4 - \sqrt{3}$; $c = 5 + 2\sqrt{3}$;
113. а) $x^2 - 4x - 21 = 0$; в) $x^2 + 11x + 30 = 0$;
 б) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$ или $3x^2 - 2x - 8 = 0$; г) $x^2 - 11x + 30 = 0$.
114. а) 0; 6; б) Уравнение можно заменить системой $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 2, \\ x = 1 \text{ или } x = 2; \end{cases}$
 Ответ: 2.
 в) $0; \frac{4}{3}$.

Тест 4. Квадратные уравнения

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	2	2	3	2	2	2; 3	4	-3; 3	-8; -4; $q = 32$

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	2	3	2	1	2; 4	5	-3; 3	-2; 6; $q = 72$

115. а) -1; б) 5; в) 17; г) 3; д) 2; е) -6.
 116. а) -3; в) ± 3 ; д) ± 2 ; ж) ± 2 ;
 б) решений нет; г) решений нет; е) ± 2 ; з) 0.
 117. 6.
 118. а) -3; -2; б) 0; 1; в) -5; 1; $\frac{-4 \pm \sqrt{10}}{2}$.
 119. а) 12; 24; б) 100
 120. 15 км/ч

Тест 5. Дробные рациональные уравнения

Вариант 1

- 1
- 4
- 3
- а) -2; б) ± 3
- 10

Вариант 2

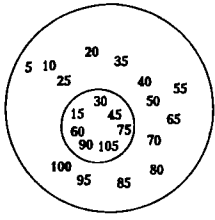
- 2
- 2
- 3
- а) 6; б) ± 7
- 4

IV. Неравенства

121. а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a < b$; г) $a > b$; д) $a > b$;
 е) $a - b = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$; $9 > 8$, следовательно, $\sqrt{9} > \sqrt{8}$; $\sqrt{9} - \sqrt{8} > 0$; $a > b$;
 ж) Заменим $a + 1 = 2b$ на равенство $a - b = b - 1$. По условию $b > 1$, следовательно,
 $b - 1 > 0$, $a - b > 0$, $a > b$;
 з) $a \geq b$;
 и) Равенство $b + c = 2 + b^2$ заменим на $a - b + b = 2 + b^2 - b$; $a - b = b^2 - 2b + 1 + 1$;
 $a - b = (b - 1)^2 + 1$; $(b - 1)^2 \geq 0$; $(b - 1)^2 + 1 > 0$; $a - b > 0$; $a > b$.

122. а) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$; б) $\frac{13}{12} < \frac{12}{11}$;
 в) $323 \cdot 325 = (324-1)(324+1) = 324^2 - 1^2 = 324^2 - 1$; $324^2 - 1 < 324^2$; $323 \cdot 325 < 324^2$;
 г) $74^2 - 27^2 = (74-27)(74+27) = 47 \cdot 101$;
 $73^2 - 26^2 = (73-26)(73+26) = 47 \cdot 99$;
 $47 \cdot 101 > 47 \cdot 99$; $74^2 - 27^2 > 73^2 - 26^2$.
123. а) Составим и упростим разность
 $(a-1)(a+2) - (a+4)(a-3) = a^2 - a + 2a - 2 - a^2 + 3a - 4a + 12 = 10$; $10 > 0$;
 $(a-1)(a+2) - (a+4)(a-3) > 0$; $(a-1)(a+2) > (a+4)(a-3)$;
 б) $a^2 + 25 \geq 10a$;
 в) $b^2 + 5 > 2b + 3$;
 г) $a^4 + 1 - 2a|a| = a^4 - 2a|a| + 1$;
 При $a \geq 0$, $|a| = a$, $a^4 - 2a|a| + 1 = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2 \geq 0$.
 При $a < 0$, $|a| = -a$, $a^4 - 2a|a| + 1 = a^4 - 2a(-a) + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 > 0$.
 Следовательно, $a^4 - 2a|a| + 1 \geq 0$ при любом значении a . $a^4 + 1 \geq 2a|a|$.
 д) $(a-2)^2 \geq 4(1-a)$.
124. в) $\frac{b}{b^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2b-b^2-1}{2(b^2+1)} = \frac{-(b^2-2b+1)}{2(b^2+1)} = \frac{-(b-1)^2}{2(b^2+1)}$;
 $(b-1)^2 \geq 0$; $-(b-1)^2 \leq 0$; $b^2+1 > 0$; $2(b^2+1) > 0$,
 следовательно, $\frac{-(b-1)^2}{2(b^2+1)} \leq 0$; $\frac{b}{b^2+1} - \frac{1}{2} \leq 0$; $\frac{b}{b^2+1} \leq \frac{1}{2}$ при любом значении b .
 г) $a^4 + 16 - 8a - 2a^3 = (a^4 - 2a^3) + (16 - 8a) = a^3(a-2) - 8(a-2) =$
 $= (a-2)(a^3 - 8) = (a-2)(a-2)(a^2 + 2a + 4) = (a-2)^2(a^2 + 2a + 4)$;
 $(a-2)^2 \geq 0$; $a^2 + 2a + 4 > 0$; следовательно, $(a-2)^2(a^2 + 2a + 4) \geq 0$, $a^4 + 16 - 8a - 2a^3 \geq 0$,
 $a^4 + 16 \geq 8a + 2a^3$ при любом значении a .
125. а) $a+1,2 < b+1,2$; б) $-3a > -3b$; д) $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$.
 б) $a-4,3 < b-4,3$; г) $\frac{2}{5}a < \frac{2}{5}b$;
126. а) $a > b$ и $b > 3$, следовательно, $a > 0$ и $b > 0$;
 б) $a > b$ и $a < -13$. Следовательно, $b < a$; $a < -13$, $-13 < 0$, следовательно, $b < 0$ и $a < 0$;
 в) $a > 0$; $b > 0$;
 г) $a < 0$; $b < 0$.
127. а) $a+10 > b+10$;
 б) $a-8 > b-8$;
 в) $\frac{3}{5}a > \frac{3}{5}b$;
 г) $\frac{3}{2}a > \frac{3}{2}b$;
 д) $-a < -b$.

128. а) $a < 0$; б) $a > 0$; в) $a > 0$; г) $a > 0$.
129. а) При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется.
 б) Делим на положительное число, следовательно, знак неравенства не меняется.
 в) Умножаем на положительное число и прибавляем одно и то же число.
 г) Умножаем обе части неравенства на отрицательное число $-0,01$ и прибавляем $0,7$.
 д) Умножили на -1 и прибавили 2 .
 е) Делим на -3 и прибавляем -4 .
130. d, b, a, c – положительные,
 $d < b$, следовательно, $\frac{1}{d} > \frac{1}{b}$; $b < a$, следовательно, $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$; $a < c$, следовательно, $\frac{1}{a} > \frac{1}{c}$.
 Итак, $\frac{1}{d} > \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{c}$.
 Ответ: $\frac{1}{c}; \frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{d}$.
131. а) $24 > 1$; б) $-10 < -3,1$.
132. а) $60 > 12$; б) $\frac{3}{2} < 6$.
133. а) $15 < a + b < 21$; в) $50 < ab < 90$;
 б) $-10 < a - b < -4$; г) $5 < a < 6$; $\frac{1}{15} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$; следовательно, $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < \frac{3}{5}$
134. а) $3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$; б) $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$
 $\frac{-1,5 < -\sqrt{2} < -1,4}{0,7 < \sqrt{5} - \sqrt{2} < 0,9}$;
 в) $\sqrt{10} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$. Неравенства с положительными членами можно перемножать, следовательно, $1,4 \cdot 2,2 < \sqrt{10} < 1,5 \cdot 2,3$, т.е. $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$.
 г) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$. Умножим второе неравенство почленно на 2 , получим $4,4 < 2\sqrt{5} < 4,6$. Итак, $4,4 < \sqrt{20} < 4,6$.
 д) Умножим первое неравенство почленно на -3 , получим $-4,2 > -3\sqrt{2} > -4,5$ или $-4,5 < -3\sqrt{2} < -4,2$.
135. $P_{\Delta} = 2a + b$. Умножим первое неравенство почленно на 2 и сложив со вторым, получим $9,3 < 2a + b < 9,9$.
136. 2.
137. 1.
138. а) Используя неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$; запишем $\frac{a^3+b}{2} \geq \sqrt{a^3b}$, $\frac{a+b^3}{2} \geq \sqrt{ab^3}$.
 Два последних неравенства почленно перемножим, $\frac{a^3+b}{2} \cdot \frac{a+b^3}{2} \geq \sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3}$;
 $\frac{(a^3+b)(a+b^3)}{4} \geq \sqrt{a^4b^4}$; $(a^3+b)(a+b^3) \geq 4a^2b^2$.
 б) $\frac{a+1}{2} \geq \sqrt{a \cdot 1}$;
 $\frac{b+1}{2} \geq \sqrt{b \cdot 1}$;
 $\frac{ab+1}{2} \geq \sqrt{ab \cdot 1}$.
 Записанные неравенства почленно перемножим. $\frac{(a+1)}{2} \cdot \frac{(b+1)}{2} \cdot \frac{(ab+1)}{2} \geq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{ab}$;
 $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8\sqrt{a^2b^2}$; $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8ab$.

139. По свойству $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$, запишем два неравенства $a^2 + 1 + \frac{1}{a^2 + 1} \geq 2$, где $a^2 + 1 > 0$.
Аналогично $b^2 + 1 + \frac{1}{b^2 + 1} \geq 2$, где $b^2 + 1 > 0$. Неравенства одного знака можно складывать.
Сложив почленно неравенства, получим $a^2 + 1 + \frac{1}{a^2 + 1} + b^2 + 1 + \frac{1}{b^2 + 1} \geq 4$, перенесем 2
вправо и приведем подобные слагаемые, получим $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq 2$.
140. а) $7,85 \approx 8$; $|7,85 - 8| = |-0,15| = 0,15$; б) 4; в) 0,003; г) 0,002.
141. $\frac{2}{3} = 0,666... \approx 0,67$; $\left| \frac{2}{3} - 0,67 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{67}{100} \right| = \left| \frac{200 - 201}{300} \right| = \left| \frac{-1}{300} \right| = \frac{1}{300}$.
142. а) $7,2 \leq y \leq 7,4$; б) $1,27 \leq y \leq 1,87$.
143. $3,625 \approx 3,6$; $|3,625 - 3,6| = 0,025$;
 $\frac{|3,625 - 3,6|}{|3,6|} = \frac{0,025}{3,6} = \frac{0,25}{36} = \frac{1}{4} : 36 = \frac{1}{4 \cdot 36} = \frac{1}{144}$.
144. в)
145. $x = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots; 16\}$; $y = \{10; 11; 12; \dots; 16\}$,
 $x \cap y = \{10; 11; 12; \dots; 16\}$; $x \cup y = \{1; 2; 3; 4; \dots; 16\}$.
146. $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \{15; 16; 25; 30; 36; 45; 49; 60; 64; 75; 81; 90\}$.
147. а) $\{1; 3; 5\}$; б) $\{б, г, л\}$;
 $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $\{а; б; г; е; и; л; р; я\}$.
148. а) $\angle AOC \cap \angle DOB = \angle DOC$; б) $\angle AOC \cup \angle DOB = \angle AOB$.
149. $\{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; \dots\}$,
 $\{15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; \dots\}$,
Пересечение $\{15; 30; 45; 60; \dots\}$;
Объединение $\{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; \dots\}$.
Общая часть – множество чисел, кратных 15.
- 
152. а) Принадлежат: -5 ; $-3,9$; 0 ; 5 .
б) Принадлежат: -10 ; -8 ; $-1,5$; 0 .
153. а) -13 ; -12 ; -11 ; -10 ; -9 ; -8 ; -7 ; -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ;
б) -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;
в) -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ;
г) $\{-2$; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; $3\}$.
154. а) $(2; 9) \cap (5; 12) = (5; 9)$; $(2; 9) \cup (5; 12) = (2; 12)$;
б) $[-10; 10] \cap [-7; 12] = [-7; 10]$; $[-10; 10] \cup [-7; 12] = [-10; 12]$;
в) $[-7; 6] \cap (-4; 8] = (-4; 6)$; $[-7; 6] \cup (-4; 8] = (-7; 8]$;
г) $(5; +\infty) \cap (8; +\infty) = (8; +\infty)$; $(5; +\infty) \cup (8; +\infty) = (5; +\infty)$;
д) $(-\infty; 12) \cap (-\infty; 10) = (-\infty; 10)$; $(-\infty; 12) \cup (-\infty; 10) = (-\infty; 12)$;
е) $(7; +\infty) \cap (-\infty; 11] = (-7; 11]$; $(7; +\infty) \cup (-\infty; 11] = (-\infty; +\infty)$.
155. а); г).
156. Любое число, меньшее -7 .
157. а) $(-\infty; 9,5)$; б) $(4; +\infty)$; в) $(-\infty; -18)$; г) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$;
б) $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; 8,5)$; е) $(1,5; +\infty)$; ж) $(-\infty; -1,6)$.

158. а) $x < \frac{2}{\sqrt{3}-2}$; $x < -2(\sqrt{3}+2)$. Ответ: $(-\infty; -2\sqrt{3}-4)$;
 б) $x > -3\sqrt{6}-9$ или $(-3\sqrt{6}-9; +\infty)$; в) $x > -\sqrt{2}-\sqrt{3}$ или $(-\sqrt{2}-\sqrt{3}; +\infty)$;
 г) $(6\sqrt{2}-6\sqrt{3}; +\infty)$; д) $(4,5; +\infty)$; е) $(2,5; +\infty)$;
 ж) $2x-3 < (5+2\sqrt{6}) \cdot 2(2\sqrt{6}-5)$; $2x-3 < -2$; $2x < 1$; $x < \frac{1}{2}$. Ответ: $(-\infty; \frac{1}{2})$;
 з) $4-5x \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(1-\sqrt{2})}$; $4-5x \geq -1$; $-5x \geq -5$. Ответ: $x \leq 1$; $(-\infty; 1)$;
 и) $(1,5; +\infty)$; к) $[-3; +\infty)$; л) $3x-12 > 0$; $x > 4$. Ответ: $(4; +\infty)$;
 м) $2x-5 < 0$; $2x < 5$; $x < 2,5$. Ответ: $(-\infty; 2,5)$;
 н) $2x-9 > 0$; $x > 4,5$; $x+3 \neq 0$ $x \neq -3$. Ответ: $(4,5; +\infty)$;
 о) $2x+5 < 0$; $x < -2,5$; $x+4=0$ $x=-4$. Ответ: $(-\infty; -2,5)$;
 п) $x-5=0$; $x=5$; $4x+16 < 0$; $x < -4$. Ответ: $(-\infty; -4) \cup \{5\}$;
 р) $x+2=0$; $x=-2$; $2x+9 > 0$ $x > -4,5$. Ответ: $(-4,5; +\infty)$
159. а) $[4; +\infty)$; б) $(-\infty; \frac{2}{3}]$; в) $[-0,2; +\infty)$; г) $(-\infty; 1,8)$;
 д) $\frac{12x-1}{3}-4x+3 \geq 0$; $12x-1-12x+9 \geq 0$; $8 \geq 0$ верно при любом значении x .
 Ответ: $(-\infty; +\infty)$;
 е) $-(15-3x) \geq 0$; $-15+3x \geq 0$; $3x \geq 15$; $x \geq 5$. Ответ: $[5; +\infty)$
160. а) $2(x-5)-\frac{1}{3}(6x+15) \geq 0$; $6(x-5)-(6x+15) \geq 0$;
 $6x-30-6x-15 \geq 0$; $-45 \geq 0$ неверно. Ответ: $\emptyset$;
 б) $x \leq \frac{1}{3}$, но $x \neq -7$. Или $(-\infty; -7) \cup (-7; \frac{1}{3}]$;
 в) $\begin{cases} 5-x \geq 0; \\ \sqrt{5-x}-2 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 5; \\ \sqrt{5-x} \neq 2; \end{cases} \begin{cases} x \leq 5; \\ 5-x \neq 4; \end{cases} \begin{cases} x \leq 5; \\ -x \neq -1; x \neq 1. \end{cases}$ Ответ: $x \leq 5$; $x \neq 1$ или $(-\infty; 1) \cup (1; 5]$.
161. а) $ax+3 \leq 0$; $ax \leq -3$
 1) Если $a=0$, то $0 \cdot x \leq -3$; $0 \leq -3$ неверно, решений нет;
 2) если $a > 0$, то $x \leq -\frac{3}{a}$; $(-\infty; -\frac{3}{a}]$;
 3) если $a < 0$, то $x \geq -\frac{3}{a}$; $[-\frac{3}{a}; +\infty)$;
 Ответ: при $a=0$ решений нет; при $a > 0$ $x \in (-\infty; -\frac{3}{a}]$; при $a < 0$ $x \in [-\frac{3}{a}; +\infty)$.
 б) $6a+3x < 1-ax$; $3x+ax < 1-6a$; $(a+3)x < 1-6a$;
 1) Если $a+3=0$, т.е. $a=-3$, то $0 \cdot x < 1-6 \cdot (-3)$; $0 < 19$ верно при любом значении x ;
 2) если $a+3 > 0$, т.е. $a > -3$, то $x < \frac{1-6a}{a+3}$; $x \in (-\infty; \frac{1-6a}{a+3})$;
 3) если $a+3 < 0$, т.е. $a < -3$, то $x > \frac{1-6a}{a+3}$; $x \in (\frac{1-6a}{a+3}; +\infty)$;
 Ответ: при $a=-3$, $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a > -3$, $x \in (-\infty; \frac{1-6a}{a+3})$; при $a < -3$ $x \in (\frac{1-6a}{a+3}; +\infty)$.

в) При $a=3$ решений нет;

при $a>3$, $x \in (-\infty; -1)$;

при $a<3$, $x \in (-1; +\infty)$

г) При $a=-2$ решений нет;

при $a>-2$ $x \in \left(-\infty; \frac{2a+1}{a+2}\right)$;

при $a<-2$ $x \in \left(\frac{2a+1}{a+2}; +\infty\right)$.

д) При $a=9$ $x \in (-\infty; +\infty)$;

при $a>9$ $x \in \left(-\infty; \frac{a+3}{a-9}\right)$;

при $a<9$ $x \in \left(\frac{a+3}{a-9}; +\infty\right)$.

е) При $m=1$ решений нет;

при $m>1$ $x \in (m+1; +\infty)$;

при $m<1$ $x \in (-\infty; m+1)$.

162. а) Квадратное уравнение не имеет корней при $D<0$. $D=4-4(4a+3)$; $4-4(4a+3)<0$;

$1-(4a+3)<0$; $1-4a-3<0$; $-4a<2$; $a>-\frac{1}{2}$. Ответ: при $a \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

б) Имеет два корня при $\begin{cases} a+6 \neq 0; \\ D>0; \end{cases} \begin{cases} a \neq -6; \\ D=4-4(a+6)=4-4a-24=-4a-20; \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq -6; \\ -4a-20>0; \end{cases} \begin{cases} a \neq -6; \\ a<-5; \end{cases}$ Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -5)$.

в) Если $a-1=0$, т.е. $a=1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x^2 - 2x + 1 + 2 = 0$, $-2x + 3 = 0$;
 $x=1,5$ – одно решение.

Квадратное уравнение не имеет корней при $\begin{cases} a-1 \neq 0, \\ \frac{D}{4} < 0 \end{cases}$;

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a-1)(a+2) = a^2 - a^2 + a - 2a + 2 = -a + 2;$$

$\begin{cases} a \neq 1 \\ -a+2 < 0; \end{cases} \begin{cases} a \neq 1 \\ a > 2; \end{cases}$ Ответ: при $a \in (2; +\infty)$.

163. $-3; 0$

164. а) Является.

б) Является.

165. а) $(-\infty; 4]$;

б) $(1; +\infty)$.

166. а) $[-24; 24]$;

б) $(1; 16)$.

167. а) Неравенство равносильно двум системам

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x > -4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -4 \end{cases}$$

$x \in (-4; 1]$ Решений нет.

Ответ: $(-4; 1]$

б) Решается аналогично а). Сводится к решению двух систем

$$\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ x+1 > 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1,5; +\infty)$

в) $\frac{2x+3}{x-2} \leq 1$; $\frac{2x+3}{x-2} - 1 \leq 0$; $\frac{2x+3-(x-2)}{x-2} \leq 0$; $\frac{x+5}{x-2} \leq 0$.

Далее смотри решение а).

Ответ: $[-5; 2)$.

г) Аналогично в)

Ответ: $(-\infty; -5) \cup [11; +\infty)$.

$$\text{д) } \begin{cases} x-5=0 \\ x=5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ x \geq 5, x \geq 5 \end{cases}$$

Ответ: $[5; +\infty)$.

$$\text{е) } \begin{cases} 2x-3=0 \\ x=1,5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ 2x-3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 1,5; x \geq 1,5 \end{cases}$$

Ответ: $[1,5; +\infty)$.

$$\text{ж) } \begin{cases} 3x-1 \leq 0 \\ 1-x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{3}; \\ x < 1, x \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

з) 2; $[5; +\infty)$.

168. а) $[-2; 4]$; б) $(-\infty; 4]$; в) $[4; +\infty)$; г) $(-\infty; 2]$.

169. а) $[2; 14]$; б) $[-5; 3]$; в) $[-4; 3]$.

170. а) $\left[3\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; 1,25]$; в) $(-\infty; 2)$; г) $(-\infty; 4,5)$.

Тест 6. Неравенства

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8		
3	1	4	4	3	3	2	А	Б	В
							2	3	4

9. $\left[-2\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

10. $[-20; 6)$.

11. $(-13; 17)$.

12. Составим и упростим разность

$$(a-2)(a-6) - (a-3)(a-5) = a^2 - 2a - 6a + 12 - a^2 + 5a + 3a - 15 = -3; -3 < 0;$$

$$(a-2)(a-6) - (a-3)(a-5) < 0; (a-2)(a-6) < (a-3)(a-5) \text{ при любом значении } a.$$

13. $4 - \sqrt{24} < 0$, следовательно, $x < \frac{40-8\sqrt{24}}{4-\sqrt{24}}$; $x < \frac{(4-\sqrt{24})^2}{4-2\sqrt{24}}$; $x < 4 - \sqrt{24}$. Ответ: -1 .

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8		
3	1	4	1	2	4	2	А	Б	В
							3	4	1

9. $[-0,5; +\infty)$.

10. $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

11. $(-18; 42]$.

12. Составим и упростим разность

$$(a-3)(a-4) - (a-5)(a-2) = a^2 - 3a - 4a + 12 - a^2 + 2a + 5a - 10 = 2; 2 > 0;$$

$$(a-3)(a-4) - (a-5)(a-2) > 0; (a-3)(a-4) > (a-5)(a-2) \text{ при любом значении } a.$$

13. $\sqrt{23} - 5 < 0$, следовательно, $x > \frac{48-10\sqrt{23}}{\sqrt{23}-5}$; $x > \frac{(\sqrt{23}-5)^2}{\sqrt{23}-5}$; $x > \sqrt{23} - 5$. Ответ: 0 .

V. Степень с целым показателем. Элементы статистики

171. а) $\frac{1}{25}$; г) 1; ж) $\frac{16}{81}$;
 б) $-\frac{1}{64}$; д) 25; з) $\frac{25}{64}$;
 в) -1; е) $-\frac{27}{64}$; и) $100^3 = 10^6 = 1\,000\,000$.
172. а) -0,00001; в) 6,25; д) $-\frac{1}{16}$; ж) $\frac{81}{625}$;
 б) -64; г) -128; е) $\frac{1}{27}$; з) $-\frac{8}{27}$.
173. а) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{12}$; д) 11; ж) 1001;
 б) $-\frac{1}{8}$; г) $\frac{2}{7}$; е) -25; з) 101.
174. а) $\frac{a^3+b^2}{a^3b^2}$; в) $\frac{(ab^2+1)(1-a^2b)}{a^2b^2}$; д) $-\frac{1}{ab}$;
 б) $\frac{x+xy}{y^2}$; г) $\frac{y^2-4x^2}{x^2y^2}$; е) $\frac{b-a}{a^2b^2(a+b)}$.
175. а) 16; г) 0,25; ж) 8;
 б) 0,25; д) 0,2; з) 0,04;
 в) 0,01; е) $\frac{1}{32}$; и) 3.
176. а) 0,2; г) 2187; ж) $\frac{1}{2187}$;
 б) 3; д) $\frac{1}{125}$; з) 0,04;
 в) $\frac{1}{8}$; е) 1; и) 2.
177. а) $9xy^2$; в) $4x^6y^{-14}$; д) $\frac{16}{9}x^{-17}y^6z^{-7}$;
 б) $36x^{-2}y^{-9}$; г) $3a^{-1}b^6$; е) $\frac{1}{3}x^{-7}y^{-1}$.
178. а) 8; в) -4; д) 6;
 б) 3; г) -1; е) -5.
179. а) $6,3 \cdot 10^7$; в) $7,5 \cdot 10^7$; д) $3,45 \cdot 10^{-3}$; ж) $4,7 \cdot 10^5$;
 б) $3,195 \cdot 10^6$; г) $5,244 \cdot 10$; е) $4,7 \cdot 10^{-6}$; з) $8,3 \cdot 10^6$.
180. а) $4,7 \cdot 10^9$ г; в) $9,73 \cdot 10^{-4}$ т; д) $3,65 \cdot 10^4$ км;
 б) $2,8 \cdot 10$ см = 28 см; г) $6,25 \cdot 10^3$ м; е) $7,85 \cdot 10^{10}$ т.
181. а) $1,02 \cdot 10^6$; б) $7,322 \cdot 10^2$; в) $2,3646 \cdot 10^{-4}$.

Тест 7. Степень с целым показателем. Стандартный вид числа

Вариант 1

1	2	3	4	5	6				7	8	9
3	2	4	3	2	A	Б	В	Г	8	$\frac{25}{7}$	$1,38 \cdot 10^0$
					3	2	4	1			

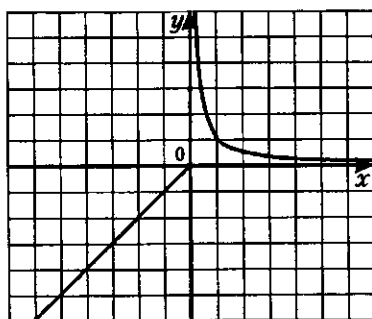
Вариант 2

1	2	3	4	5	6				7	8	9
4	2	4	3	3	A	Б	В	Г	6	$\frac{9}{7}$	$2,61 \cdot 10^{-2}$
					4	2	3	1			

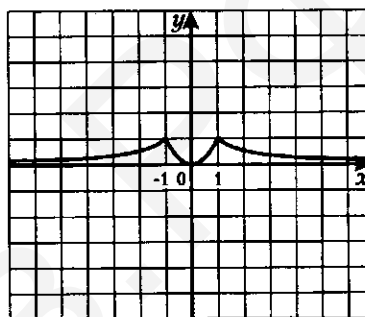
182. Нет

183. Примерно 11 акций, 98 акций, 2 акции.

185. а)



б)



186. а) $a = \pm 16$; б) $b = \frac{25}{16}$.

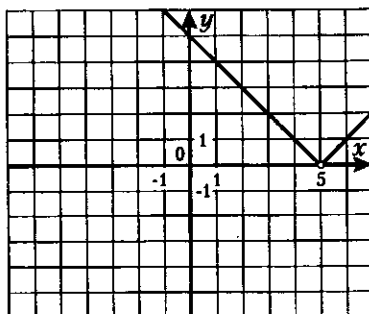
187. а) $\frac{19}{3}$; б) $\frac{68}{9}$.

Тест 8. Итоговый

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1 и 2	3	3	3	1	2	2	1	3	$\frac{a+x}{a-x}$

12. $y = |x - 5|, x \neq 5$.

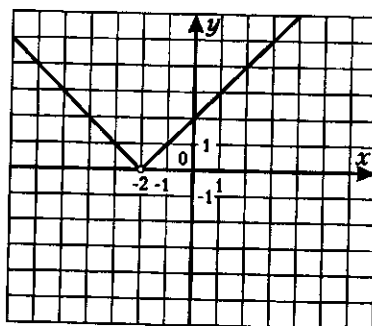


13. 10.

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	2	2	1	2	4	2	1	3	$\frac{x-2y}{x+2y}$

12. $y = |x+2|, x \neq -2.$



13. 5.

РГУБОБ.РФ

Для заметок

ЯГубов.РФ