

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ  
II тур. 9 класс.

---

1. Учитель выдал Диме и Сереже по квадратному трехчлену, написал на доске 4 числа и велел каждому из учеников подставить эти четыре числа в свой квадратный трехчлен. У Сережи получились значения 1, 3, 5 и 7. А Дима успел подставить только первые три числа и получил 17, 15 и 13. Когда же Дима собрался подставить четвертое число, оказалось, что учитель уже стер числа с доски. Какое у него получилось бы значение, если бы он успел подставить четвертое число? (Ответ должен быть конкретным числом). (А. Голованов)

2. Для натуральных чисел  $a$  и  $b$  выполняется неравенство

$$a \cdot \text{НОД}(a, b) + b \cdot \text{НОК}(a, b) < 2,5ab.$$

Докажите, что  $a$  делится на  $b$ . (А. Храбров)

3. Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $AD = DC$ . Прямая  $BD$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $E$ . Оказалось, что  $\frac{BD}{BE} = \frac{AE}{EC}$ . Докажите, что  $BE = BC$ . (Ф. Батарев)

4. В городе Угрюмове 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей. (А. Голованов, С. Берлов)

.....  
Олимпиада 2011 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  все углы меньше, чем  $150^\circ$ , причем сумма углов  $A$  и  $D$  равна  $150^\circ$ . Докажите, что его площадь больше, чем  $\frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot BC + BC \cdot CD)$ . (С. Берлов)

6. Бесконечная последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  составных натуральных чисел задается следующим правилом:  $a_{n+1} = a_n - p_n + a_n/p_n$ , где  $p_n$  — наименьший простой делитель  $a_n$ . Известно, что все члены последовательности кратны 37. Какие значения может принимать число  $a_1$ ? (О. Иванова)

7. Сапа и Сережа играют в игру на правильном стоугольнике. В начале игры Сапа расставляет в вершинах стоугольника натуральные числа. Далее игроки ходят по очереди, начинает Сережа. Каждым ходом Сережа прибавляет по 1 к числам в двух противоположных вершинах, а Сапа прибавляет по 1 к числам в двух соседних вершинах. Сережа стремится к тому, чтобы после его хода на стоугольнике стояло как можно больше нечетных чисел. Какого наибольшего количества он сможет добиться независимо от Сапиных действий? (С. Берлов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ  
II тур. 10 класс.

---

1. Учитель выдал каждому ученику  $10^4 A$  квадратный трехчлен, а потом написал на доске 4 числа и велел каждому ученику подставить эти четыре числа в его квадратный трехчлен. У Васи получились значения 2, 3, 5 и 8. А Петя успел подставить только первые три числа и получил 16, 15 и 13, а когда он собрался подставить четвертое число, оказалось, что учитель уже стер задание с доски. Помогите Пете найти четвертое значение (ответ должен быть обоснован, иначе Петя репит, что над ним издеваются). (А. Голованов)

2. У каждого натурального числа от  $n+1$  до  $n+1000$  выписывают все делители, не превосходящие 1000. Докажите, что для бесконечно многих натуральных  $n$  сумма всех выписанных чисел больше миллиона, и для бесконечно многих — меньше.

(А. Храбров, Ф. Петров)

3. Точка  $O$  — центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ , с углом  $\angle B = 30^\circ$ . Луч  $BO$  пересекает  $AC$  в точке  $K$ . Точка  $L$  — середина дуги  $OC$  описанной окружности треугольника  $KOC$ , не содержащей точку  $K$ . Докажите, что  $A, B, L, K$  лежат на одной окружности. (Ф. Петров)

4. В городе Угрюмове 2000000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей.

(А. Голованов, С. Берлов)

.....  
Олимпиада 2011 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Назовем число  $x$  *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа  $k$  выполняются неравенства  $|x - k^2| > 10^6$  и  $|x - k^3| > 10^6$ . Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел  $n$ , что число  $2^n$  далеко от квадратов и кубов. (А. Голованов, С. Иванов)

6. Имеется гирлянда из  $n$  лампочек. Вначале некоторые из них включены, а некоторые нет. Разрешается взять любую горящую лампочку (только горящую!) и погасить ее, изменив при этом состояние двух соседних лампочек (горящие выключить, негорящие включить). При каких  $n$  можно с помощью этих операций выключить все лампочки независимо от их начального состояния?

(В. Волков, Р. Бойкий)

7. На диагонали  $AC$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  наплась точка  $P$ , лежащая внутри треугольника  $ABD$ , для которой

$$\angle ACD + \angle BDP = \angle ACB + \angle DBP = 90^\circ - \angle BAD.$$

Докажите, что либо  $\angle BAD + \angle BCD = 90^\circ$ , либо  $\angle BDA + \angle CAB = 90^\circ$ .

(Ф. Петров, И. Богданов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ  
II тур. 11 класс.

---

1. Даны два квадратных трехчлена  $f$  и  $g$ . Трехчлен  $f$  принимает в некоторых четырех точках значения 2, 3, 7 и 10, а трехчлен  $g$  в первых трех из этих точек принимает значения соответственно 16, 15 и 11. Найдите значение трехчлена  $g$  в четвертой точке. (А. Голованов)

2. Точка  $O$  — центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором угол  $B$  равен  $30^\circ$ . Луч  $BO$  пересекает  $AC$  в точке  $K$ . Точка  $L$  — середина дуги  $OC$  описанной окружности треугольника  $KOC$ , не содержащей точку  $K$ . Докажите, что точки  $A, B, L, K$  лежат на одной окружности. (Ф. Петров)

3. Можно ли сложить параллелепипед  $6 \times 7 \times 7$  из брусков размера  $1 \times 1 \times 2$  так, чтобы брусков каждого из трех возможных направлений было одинаковое количество?

4. Назовем число  $x$  *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа  $k$  выполняются неравенства  $|x - k^2| > 10^6$  и  $|x - k^3| > 10^6$ . Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел  $n$ , что число  $2^n$  далеко от квадратов и кубов. (А. Голованов, С. Иванов)

.....

Олимпиада 2011 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляют разность между его наибольшим собственным делителем и его наименьшим собственным делителем, и результат записывают на доску вместо исходного числа. (Если число на доске оказалось простым, то процесс заканчивается.) В начале написано число, большее 1000. Докажите, что рано или поздно на доске появится число, не делящееся на 17. (О. Иванова)

6. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  точка  $M$  — середина диагонали  $AC$ , причем  $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$ . Докажите, что  $AD = DC + AB$ . (А. Акопян, Ф. Петров)

7. В тайном обществе 2011 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов они могут перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2010 пар друзей.