САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. Четыре плиточника за 3 дня замостили плитками 50×50 см комнату 6×6 м, а 16 плиточников за 12 дней замостили одинаковыми квадратными плитками комнату 12×12 м. На укладку одной плитки любого размера у плиточника уходит одно и то же время. Плитками какого размера они пользовались во второй комнате?

(*К. Кохась*)

2. Умная Маша задумала натуральное число. Каждую минуту она прибавляет к числу его предпоследнюю цифру. Через 99 минут она получила 56789. Докажите, что она ошиблась. (*Ф. Бахарев*)

3. Школьник в течение учебного года каждый день получал одну из оценок 3, 4, или 5. Ни в какой из дней сумма его оценок (т. е. сумма всех оценок, которые он получил от начала года и до текущего дня) не делилась на 3. Докажите, что за год среди всех его оценок было не больше 60 % четверок. (*К. Сухов*)

4. На острове живут племя рыцарей и племя лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Однажды каждый житель острова заявил: *В моем племени у меня больше друзей, чем в другом.* Может ли рыцарей быть меньше, чем лжецов? (*В. Франк*)

....

Олимпиада 2011 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. На плоскости нарисованы горизонтальные и вертикальные отрезки трех цветов, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Каждый синий отрезок пересекает ровно 100 зеленых, каждый зеленый — ровно 100 красных, а каждый красный — ровно 100 синих. Какое наименьшее количество отрезков может быть проведено? (*С. Берлов*)

6. Два игрока играют в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Первый ставит по одному крестику, а второй по два нолика. Сможет ли первый игрок поставить три крестика по горизонтали или по вертикали? (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 7 КЛАСС.

---

1. В тетради нарисована квадратная сетка 9×9 клеток (сторона клетки равна 1). Требуется расставить стрелки на всех единичных отрезках этой сетки так, чтобы из каждого узла сетки выходило нечетное число стрелок. Объясните, как это можно сделать.

2. Федя перемножил все натуральные числа от 1 до 2011, вычел 1 из произведения и результат записал на длинной полоске бумаги. Какое наименьшее количество цифр в этом числе надо заменить нулями, чтобы оно стало делиться на 13?

3. На острове живут племя рыцарей и племя лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждый житель имеет на острове ровно 100 знакомых. Однажды каждый житель острова произнес фразу: *Знакомых соплеменников у меня больше, чем знакомых людей из другого племени*. Докажите, что рыцарей на острове больше, чем лжецов. (*С. Берлов*)

4. Натуральное число, большее единицы, заменяют на сумму его минимального простого делителя и максимального простого делителя (например, из числа 15 получится $3+5=8$, из числа 17 получится число $17+17=34$, а из числа 25 получится число $5+5=10$). Докажите, что после нескольких таких операций получится квадрат натурального числа.

. . . .

Олимпиада 2011 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. На доске написано $***\cdot***\cdot***\cdot***$. Оля с Сергеем играют в такую игру: Оля называет ненулевую цифру, а Сергей ставит ее вместо одной из звёздочек. Сергей хочет, чтобы после 12 пар ходов произведение четырех полученных трехзначных чисел делилось на 9. Сможет ли он этого добиться? (*О. Иванова*)

6. В двух соседних вершинах правильного 777-угольника стоят фишки. Если фишки стоят в вершинах A и B, то их разрешается одновременно переставить в вершины C и D, если треугольники ABC и ABD равнобедренные. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы фишки стояли в двух вершинах через одну?

7. Внутри треугольника даны точки A, B, C и D. Докажите, что на сторонах треугольника найдется такая точка K, что $KA+KB \geq KC+KD$. (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 8 КЛАСС.

---

1. На плоскости проведено 102 прямых и отмечены все точки их пересечения. Может ли на какой-нибудь окружности оказаться 105 отмеченных точек? (*С. Берлов*)

2. На сторонах AB, BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K, L и M соответственно, такие что $DM/MC = CL/LB = 2$ и $AK/KB = 5$. Оказалось, что $AB \perp KL$ и $DC \perp LM$. Докажите, что $AC = BD$. (*С. Берлов*)

3. В школе писали контрольную работу. Оказалось, что средний балл тех, кто получил 3 и 5, меньше, чем средний балл тех, кто получил 2 и 4. Докажите, что средний балл тех, кто получил 4 или 5, менее чем на 2 балла превышает средний балл тех, кто получил 2 или 3. (*С. Берлов*)

4. Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$a + c = 2011201120112011 \qquad \text{и} \qquad (5a - b)(c + b) = b^2.$$

Докажите, что числа a, b, c имеют общий делитель, больший 1. (*Жюри*)

....

Олимпиада 2011 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. В некоторых клетках доски 100×100 расставлены фишки. Клетка называется хорошей, если ровно в двух соседних с ней по стороне клетках стоят фишки, причем эти две клетки граничат по углу. (В хорошей клетке фишка может стоять, а может и стоять.) Может ли на доске быть ровно 2011 хороших клеток? (*С. Берлов*)

6. Дан треугольник ABC, на стороне AC выбрана точка D. Известно, что $\angle ADB = 60^\circ$, и $BD = AC$. Докажите, что $AB + CD > BC$. (*А. Пастор*)

7. В строку без пробелов в порядке возрастания выписаны все натуральные числа от 1 до 100 002. Докажите, что для любого двузначного простого числа p можно заменить нулями две соседние цифры в выписанной строчке так, чтобы получилось число, делящееся на p. (*Жюри*)