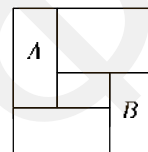


САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

1. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 102, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102. (Н. Кушпель)

2. Разрежьте по клеточкам квадрат размером 10×10 клеток на 5 прямоугольных частей по схеме, показанной на рисунке, так, чтобы площадь прямоугольника A была больше площади каждой из остальных частей, и при этом периметр прямоугольника B был больше периметра каждой из остальных частей. (К. Козась)



3. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 42 красивые клетки? (Д. Максимов)

4. Треть всех мусорных контейнеров города Москина установлена в магазинах, $1/9$ часть — в ресторанах, а остальные — в школах. $2/7$ от общего количества папгета лежит на прилавках магазинов, еще $2/7$ — на тарелках посетителей ресторанов, а остальной папгет поровну распределен по мусорным контейнерам. Во время стихийного нашествия дикие крысы съели 80% всего папгета. Возможно ли, что при этом крысы не притронулись к папгету в школах? Не забудьте обосновать ответ.

(К. Козась)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Найдите такое трехзначное число, не делящееся на 102, что если его запись повторить 2010 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102.

(Н. Кушпель)

2. Пазл — это картинка, разрезанная на кусочки хитрой формы, среди которых нет одинаковых. Сапа, Дима и Федя коллекционируют кусочки пазла “Растипка на Севере”. Если бы у Федя был желтый кусочек с носом Растипки, у Сапы был зеленый кусочек с хвостом, а у Димы был синий кусочек с чёлкой, то оказалось бы, что любые два мальчика, собравшись вместе, могли бы из своих кусочков составить картинку целиком. Докажите, что уже сейчас вдвоем мальчики смогут целиком составить пазл.

(Ф. Базарев)

3. В школе писали контрольную работу по математике. Одна треть всех школьников плюс еще 20 школьников получили тройки, одна пятая всех школьников плюс еще 15 школьников получили четверки, одна седьмая всех школьников плюс еще 10 школьников получили пятёрки, а остальные школьники получили двойки. Сколько школьников получили четверки, если известно, что количество двоек меньше чем количество пятёрок?

(А. Храброе)

4. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли количество красивых клеток равняться 42?

(Д. Максимов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. В школе была проведена контрольная работа по математике для всех восьмиклассников. Треть от числа участников и ещё 20 учеников получили двойки, четверть от числа участников и ещё 30 учеников получили тройки, а некоторые умные ребята получили четверки. Кого оказалось больше: получивших двойку или получивших тройку?

(А. Храбров)

2. На некоторых клетках доски 10×10 стоят папки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число папок, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число папок. Может ли на доске оказаться ровно 42 красивые клетки?

(Д. Максимов)

3. Четыре человека написали поровну слов. Слово встречающееся у всех четверых, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у троих участников, каждый из них получает по $1/3$ балла; за слово, встречающееся у двоих, каждый из них получает по 1 баллу. Наконец, за слово, встречающееся лишь у одного участника, этот участник получает 3 балла. Могли ли все участники в сумме набрать ровно 2010 баллов?

(К. Козаць)

4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , AD — его высота. На отрезке BD отмечена такая точка E , что $AM = DE$. На отрезке EM отмечена такая точка F , что $EF = FC$. Докажите, что CF — биссектриса угла C треугольника ABC .

(А. Пастор)

5. Вдоль прямой аллеи растут, чередуясь, 36 берёз и 35 дубов. Расстояния от каждого крайнего дерева до двух его соседей отличаются ровно в 8 раз. Докажите, что точно посередине аллеи не может расти дуб.

(О. Иванова)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

1. Дима задумал три числа — a , b и c — и обнаружил, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и s . Сапа изменил значение одного из коэффициентов a , b или c . В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3s$. Чему может быть равно s ? Приведите все варианты ответа и докажете, что других нет.

(О. Иванова)

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B пересекает отрезок AD в точке M . Известно, что $AB = 4$, $BC = 9$ и $CD = 3$. В каком отношении точка M делит отрезок AD ?

(С. Берлов)

3. Три школьника написали поровну слов. Слово, встречающееся у всех троих школьников, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у двоих школьников, каждый из них получает по $7/2$ балла; наконец, слово, встречающееся лишь у одного школьника, стоит 5 баллов. Могли ли школьники в сумме набрать ровно 2011 баллов?

(К. Козась)

4. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство

$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 14.$$

(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .)

(А. Храброе)

5. На доске в ряд выписаны 10 натуральных чисел. Сапа вычислил сумму каждой пары подряд стоящих чисел, затем он вычислил суммы каждых трех подряд стоящих чисел, потом — каждых четырех и т.д.; и наконец, сумму всех чисел на доске. Все найденные суммы, а также 10 исходных чисел с доски, Сапа вперемешку записал в тетрадку. Мог ли у него получиться набор из 55 последовательных натуральных чисел?

(А. Храброе)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x - 3) + f(3x + 1) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$. (Приведите все варианты и докажите, что других нет.) (С. Иванов)

2. В некоторых клетках квадратной таблицы стоят звездочки. Клетка называется красивой, если и в содержащей ее строчке стоит нечетное число звездочек, и в содержащем ее столбце стоит нечетное число звездочек. (В красивой клетке может стоять звездочка, а может и не стоять.) Сапа насчитал в таблице ровно 2010 красивых клеток. Докажите, что он не прав. (Д. Максимов)

3. Докажите, что если $x \leq y$, то $\frac{x+3y}{2} \geq 6^{\frac{x+y}{4}}$. (А. Голованов)

4. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1. (А. Голованов)

5. Две окружности пересекаются в точках E и F . Прямая ℓ пересекает первую окружность в точках A и B , вторую — в точках C и D так, что точка E лежит внутри треугольника ADF , а точки B и C — на отрезке AD . Оказалось, что $AB = CD$. Докажите, что $BE \cdot DF = CE \cdot AF$. (Д. Максимов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x - 3) + f(3x + 1) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите b и c . (С. Иванов)

2. Несколько девятиклассников, десятиклассников и одиннадцатиклассников встали в круг. Оказалось, что имеется ровно 20 десятиклассников и ровно 25 одиннадцатиклассников, рядом с каждым из которых стоит хотя бы один девятиклассник. Докажите, что рядом с кем-то стоит два девятиклассника. (А. Голованов)

3. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство

$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 14.$$

(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .) (А. Храброе)

4. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K . Отрезок CE касается описанной окружности треугольника ABK в точке N . Найдите $\angle CNK$, если известно, что $\angle ECD = 40^\circ$. (А. Смирнов)

5. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1.

(А. Голованов)