САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 9 КЛАСС.

---

1. Даны натуральные числа b и c такие, что $c+1$ делится на b. Докажите, что существуют такие натуральные x, y и z, что $x+y=bz$ и $xy=cz$.

2. 40 членов жюри подбирают вторую задачу для 9 класса. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить в вариант задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причем любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

3. Различные натуральные числа x, y и z удовлетворяют условию
$$\text{НОК}(x,y)-\text{НОК}(x,z)=y-z.$$
Докажите, что y и z делятся на x. (*Ф. Петров*)

4. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки A_1 и C_1. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Описанные окружности треугольников AA_1B и CC_1B пересекаются в точке P. Оказалось, что точка P — центр вписанной окружности треугольника AKC. Докажите, что точка P — ортоцентр треугольника ABC.

....

Олимпиада 2009 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точки X и Y — середины отрезков CA_1 и AC_1. Известно, что $XY=BB_1$. Докажите, что отношение каких-то двух сторон треугольника ABC равно $\sqrt{2}$.

6. Назовем доской произвольный набор клеток на клетчатой плоскости. Набор ладей на доске называется прекрасным, если они не бьют друг друга, но бьют все остальные клетки доски. (Ладья бьет любую клетку, находящуюся с ней в одной строке или в одном столбце, даже если не все клетки между ними принадлежат доске.) Докажите, что если на некоторой доске можно поставить прекрасный набор из 2008 ладей и можно поставить прекрасный набор из 2010 ладей, то можно поставить и прекрасный набор из 2009 ладей. (*К. Кохась, С. Берлов, Ф. Петров и др.*)

7. Дискриминанты квадратных трехчленов
$$f(x),\ g(x),\ h(x),\ f(x)+g(x),\ g(x)+h(x) \text{ и } f(x)+h(x)$$
равны 1. Докажите, что $f(x)+g(x)+h(x)$ — нулевой многочлен.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. Натуральные числа x и y таковы, что $\text{НОД}(x^7, y^4) \cdot \text{НОД}(x^8, y^5) = xy$. Докажите, что xy — точный куб. *(Ф. Петров)*

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство $AB = CD$. Его диагонали пересекаются в точке O. Точки X, Y, Z и T — середины отрезков BC, AD, AC и BD соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной вокруг треугольника OZT, лежит на прямой XY. *(А. Смирнов)*

3. У квадратных трехчленов $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ дискриминанты равны 2, а у квадратных трехчленов $f(x)+g(x)$, $g(x)+h(x)$ и $f(x)+h(x)$ дискриминанты равны 1. Докажите, что квадратный трехчлен $f(x)+g(x)+h(x)$ не имеет корней. *(В. Волков, Ф. Петров)*

4. Улицы Москвы представляют из себя несколько концентрических окружностей (кольцевых шоссе) и несколько радиальных проспектов, проведенных из центра O к самому внешнему кольцу. Перекрестки A и B расположены на внешнем кольце. Трое друзей собираются проехать из A в B: Дима — по внешнему кольцу; Костя — сначала по проспекту AO, затем по проспекту OB; Сергей же утверждает, что знает путь короче, чем оба предыдущих. Докажите, что он ошибается. *(С. Иванов)*

. . . .

Олимпиада 2009 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Назовем доской произвольный набор клеток на клетчатой плоскости. Набор ладей на доске называется прекрасным, если они не бьют друг друга, но бьют все остальные клетки доски. (Ладья бьет любую клетку, находящуюся с ней в одной строке или в одном столбце, даже если не все клетки между ними принадлежат доске.) Докажите, что если на некоторой доске можно поставить прекрасный набор из 2008 ладей и можно поставить прекрасный набор из 2010 ладей, то можно поставить и прекрасный набор из 2009 ладей. *(К. Кохась, С. Берлов, Ф. Петров и др.)*

6. Дана последовательность x_n, такая, что $x_{n+2} = |x_{n+1}| - x_n$.
Докажите, что она периодична. *(М. Браун)*

7. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках Y и X соответственно. Отрезки AX и CY пересекаются в точке O. Точки M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что прямая BO касается описанной окружности треугольника MON. *(А. Смирнов)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 11 КЛАСС.

---

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами. Пусть M — множество значений, которые он принимает при четных x, а N — множество значений, которые он принимает при нечетных x. Докажите, что множества M и N могут быть либо совпадающими, либо непересекающимися. *(А. Голованов)*

2. Различные натуральные числа x, y и z удовлетворяют условию $\text{НОК}(x, y) - \text{НОК}(x, z) = y - z$. Докажите, что y и z делятся на x. *(Ф. Петров)*

3. Улицы Москвы представляют из себя несколько концентрических окружностей (кольцевых шоссе) и несколько радиальных проспектов, проведенных из центра O к самому внешнему кольцу. Перекрестки A и B расположены на внешнем кольце. Трое друзей собираются проехать из A в B: Дима — по внешнему кольцу; Костя — сначала по проспекту AO, затем по проспекту OB; Сергей же утверждает, что знает путь короче, чем оба предыдущих. Докажите, что он ошибается. *(С. Иванов)*

4. Из клетчатого квадрата 2008×2008 вырезали угловую клетку. Четно или нечетно количество способов разрезать образовавшуюся фигуру на уголки из трех клеток? *(С. Берлов)*

....

Олимпиада 2009 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY. Докажите, что $OF \parallel O_1E$. *(А. Смирнов)*

6. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит не менее 2008 дорог. Каждую дорогу покрасили в один из двух цветов. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, в котором не менее 504 дорог и все дороги одного цвета. *(Д. Карпов)*

7. Пусть $f(x) = x^2 + x$. Последовательность положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{10000}$ такова, что b_1 — произвольное число, а

$$|b_{n+1} - f(b_n)| \le 0,001 \quad \text{при } 1 < n < 10000.$$

Докажите, что можно выбрать положительное число a_1 и построить последовательность $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2), \ldots, a_{10000} = f(a_{9999})$ так, что $|a_n - b_n| \le 0,1$ для каждого натурального $n \le 10000$. *(С. Тихомиров)*