САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

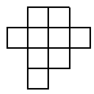
---

1. Из попарно различных цифр П, Е, Т, Р, О и В составлено шестизначное число ПЕТРОВ. Докажите, что произведение ПЕТРОВ·П·Е·Т·Р·О·В делится на 3.
(*Д. Максимов, И. Андреева*)

2. В шеренгу стоят 100 человек, каждый из которых рыцарь (они всегда говорят правду) или лжец (они всегда лгут). Каждый сделал заявление: *Количество лжецов слева от меня больше количества рыцарей справа от меня.* Сколько может быть лжецов в такой шеренге?
(*С. Берлов*)

3. У деда Мороза 10 мешков с одинаковым набором подарков. В каждом мешке мандарины, конфеты и хлопушки, причем хлопушек столько же, сколько мандаринов и конфет вместе. По требованию пожарной охраны Дед Мороз превратил в некоторых мешках все хлопушки в мандарины, в некоторых — в конфеты, а из одного мешка просто выкинул все хлопушки. Оказалось, что мандаринов стало всего 44 штуки, а конфет — 89. Сколько мандаринов, конфет и хлопушек было вначале в каждом мешке?
(*О. Иванова*)

4. Вася зарисовал в квадрате 1002×1002 несколько фигурок, изображенных на рисунке (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Оказалось, что в первом столбце закрашено 14 клеток, в столбцах со 2-го по 1001-й — по 32 клетки. Сколько закрашенных клеток в самом правом столбце?



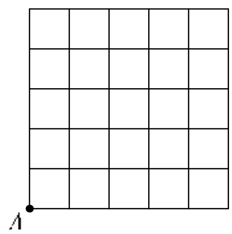
(*К. Кохась, Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2008 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Саша выписывает в ряд натуральные числа. Каждое следующее число больше предыдущего на 1, на 2 или на 3. Докажите, что рано или поздно в этом ряду появятся 100 чисел (не обязательно подряд), имеющих общий делитель, больший 1.
(*О. Иванова*)

6. Город представляет собой клетчатый квадрат 5×5, в котором стороны клеточек — это улицы, а углы клеток— перекрестки. Хулиган Костя выезжает из точки A на экскаваторе. До ближайшего перекрестка он едет с поднятым ковшом, после чего опускает ковш; на следующем перекрестке он снова поднимает ковш, а на следующем — снова опускает и т. д. Когда экскаватор едет с опущенным ковшом, улица полностью разрушается. Костя ездит только по целым улицам и никогда не уезжает с перекрестка в ту сторону, откуда только что приехал. Какое наибольшее число улиц может быть разрушено?



(*О. Иванова, К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. В куче 888 000 спичек. Два мудреца по очереди берут спички. В свой ход можно взять из кучи любое количество спичек, кроме того, которое было взято противником на предыдущем ходу (брать первым ходом все спички не разрешается). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что как бы хитро ни играл первый мудрец, второй мудрец сможет выиграть. (*Фольклор*)

2. Из попарно различных ненулевых цифр T, P, E, C, K, A составили двузначные и трехзначные числа и оказалось что

$$\frac{TPE}{CKA} < \frac{PE}{KA} < \frac{E}{A}.$$

Докажите, что $A \cdot T < E \cdot C$. (*О. Иванова, К. Кохась*)

3. Деревня рыцарей и лжецов на карте имеет вид клетчатого прямоугольника 2×10, в каждой клетке живет один человек — рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Соседними считаются клетки, примыкающие друг к другу по стороне или углу. Каждый житель сказал: *Среди моих соседей нечетное число лжецов*. Четно или нечетно количество лжецов в деревне? (*С. Иванов*)

4. В строку выписано 300 натуральных чисел. Известно, что каждое число, кроме самого первого, на 1, 2 или 3 больше предыдущего. Докажите, что в этой строке имеется 50 чисел, имеющих общий делитель больше 1. (*О. Иванова*)

....

Олимпиада 2008 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. Внутри треугольника ABC отмечена точка M, так что при этом $\angle BAM = \angle ABC$, $\angle AMB = 100°$, $\angle ACB = 70°$. Докажите, что $BM < AC$. (*Ф. Петров*)

6. Дано число n. Оказалось, что существует ровно 37 различных пар натуральных чисел (x, y), являющихся решениями уравнения

$$x^3y^2 = n.$$

Докажите, что n не делится на сто миллионов (10^8). (*О. Иванова, С. Иванов*)

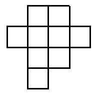
7. На кошачьем конкурсе красоты участниц оценивают по трем параметрам: усатости, хвостатости и кусатости. Из двух кошек более красивой считается та, которая превосходит другую по хотя бы двум из этих трех параметров (одинаковых значений не бывает). Было 25 участниц, и оказалось, что каждая из них красивее ровно 12 из оставшихся. Мурка была 8-й по усатости и 15-й по хвостатости. Которой она была по кусатости? (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 8 КЛАСС.

---

1. На доске написано несколько вещественных чисел, сумма которых равна 2000. Докажите, что можно стереть несколько чисел (возможно, ни одного) так, что сумма оставшихся чисел равна полусумме модулей первоначальных чисел, увеличенной на 1000. (*А. Храбров*)

2. Вася закрасил в клетчатом квадрате 17×17 несколько фигурок, изображенных на рисунке (ни одна клетка не закрашена дважды, фигурки можно поворачивать и переворачивать) и сказал Пете про каждый столбец, кроме самого правого, сколько в нем закрашенных клеток. Докажите, что Петя может наверняка узнать, сколько фигурок закрасил Вася.



(*К. Кохась, Ф. Петров*)

3. Решите в простых числах уравнение $p^3 + q^3 + 1 = p^2q^2$. (*Ф. Петров*)

4. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E, а на отрезке BE точка F. Оказалось, что $AC = BD$ и $2\angle ACF = \angle ADB$, $2\angle CAF = \angle CDB$. Докажите, что $AD = CE$. (*А. Смирнов*)

....

Олимпиада 2008 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. На кошачьем конкурсе красоты участниц оценивают по трем параметрам: усатости, хвостатости и кусатости. Из двух кошек более красивой считается та, которая превосходит другую по хотя бы двум из этих трех параметров (одинаковых значений не бывает). Было 25 участниц, и оказалось, что каждая из них красивее ровно 12 из оставшихся. Мурка была 8-й по усатости и 15-й по хвостатости. Которой она была по кусатости? (*С. Иванов*)

6. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника с углом 44° при вершине взяты точки M и N такие, что $AM = BN = AC$. Точка X на луче CA такова, что $MX = AB$. Найти угол $\angle MXN$. (*Ф. Нилов*)

7. По окружности стоят n натуральных чисел с суммой 800. В каждой паре соседних чисел поделили большее число на меньшее с остатком (если числа равны, то “большее” — любое из них и остаток равен нулю). Сумма всех n остатков оказалась равна 500. Каково наибольшее возможное значение n? (*О. Иванова*)