

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

1. Сапа написал трехзначное число, ни одна из цифр которого не равна 9, а потом увеличил каждую цифру этого числа на 1. Могло ли от этого произведение цифр числа увеличиться вдвое? (В. Франк)

2. Большой треугольник разбит тремя жирными отрезками на 4 треугольника и 3 четырехугольника. Сумма периметров четырехугольников равна 25 см. Сумма периметров четырех треугольников равна 20 см. Периметр исходного большого треугольника равен 19 см. Найдите сумму длин жирных отрезков. Не забудьте обосновать ответ.



(К. Кохась, Д. Ростовский)

3. На доске размером $30 \times x$ клеток расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьет ровно одну другую. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали присутствует как минимум одна ладья. Докажите, что x делится на 3. (Ладья — это шахматная фигура, которая держит под боем все клетки своей вертикали и своей горизонтали.) (С. Берлов)

4. Когда добрая фея взмахивает волшебной палочкой, появляются либо 100 карамелек и 100 ирисок, либо 101 карамелька и 98 ирисок, либо 103 карамельки и 94 ириски. На детском празднике фея взмахнула палочкой несколько раз и появилось 2943 карамельки. Сколько появилось ирисок? (В. Франк)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Есть 10 карточек, у каждой из которых одна сторона черная, а другая — белая. Карточки лежат на столе белой стороной вверх. Костя перевернул 5 карточек, затем Сережа перевернул 6 карточек, а после этого Оля перевернула 7 карточек. В результате все 10 карточек оказались повернуты черной стороной вверх. Как такое могло произойти?

(К. Котась, Д. Ростовский)

2. Остал Бендер умножил некоторое двузначное число на его первую цифру, Буратино умножил то же самое число на его вторую цифру, а Крокодил Гена сложил их результаты. Докажите, что сумма не равна 672.

(К. Котась, С. Иванов)

3. Вдоль дороги длиной 60 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый турист идет по дороге со скоростью 5 км/ч. Возле каждого пенка он останавливается и отдыхает одно и то же целое число часов. Второй турист путешествует на велосипеде со скоростью 12 км/ч и на каждом пенке отдыхает в два раза дольше первого туриста. Вышли и пришли туристы одновременно. Сколько пеньков на дороге? Не забудьте обосновать ответ.

(О. Иванова, К. Котась)

4. Докажите, что на доску 10×10 нельзя положить по клеточкам 9 доминошек (т.е. 9 прямоугольников 1×2) так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали они занимали нечетное количество клеток. Доминошки могут соприкасаться сторонами, но не должны перекрываться.

(О. Иванова, С. Иванов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. Вдоль дороги длиной 37 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков на дороге?

(О. Иванова, К. Козась)

2. Есть 100 карточек, у каждой из которых одна сторона черная, а другая — белая. Карточки лежат на столе белой стороной вверх. Костя перевернул 50 карточек, затем Сережа перевернул 60 карточек, а после этого Оля перевернула 70 карточек. В результате все 100 карточек оказались повернуты черной стороной вверх. Сколько карточек было перевернуто три раза? Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.

(К. Козась, Д. Ростовский)

3. На стороне AC треугольника ABC найдены точки K и L , такие что L — середина AK и BK — биссектриса угла $\angle LBC$. Оказалось, что $BC = 2BL$. Докажите, что $KC = AB$.

4. На длинной полоске бумаги напечатано число $3^{20072008}$. Саппа разрезал полоску на три куска. Изучив числа, написанные на этих кусках, Саппа заявил, что каждое из этих трех чисел является степенью тройки. Докажите, что он ошибается.

(А. Храбров)

5. Найдутся ли такие различные вещественные числа a , b , c , что прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ пересекаются в одной точке?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

1. Вдоль дороги длиной 37 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков на дороге?

(О. Иванова, К. Козась)

2. Учительница написала на доске два натуральных числа. Сапа умножил первое число на сумму цифр второго и получил 200720072007200720072007, а Кирилл умножил второе число на сумму цифр первого и получил 200820082008200820082008. Докажите, что кто-то из них ошибся.

(А. Храброе)

3. Докажите, что в клетках квадратной таблицы 4×4 можно расставить различные делители числа 14^3 так, чтобы произведение чисел в любой строке и в любом столбце было равно 14^6 .

(К. Козась)

4. На продолжении стороны AD вписанного четырехугольника $ABCD$ за точку D отмечена точка E , такая что $AC = CE$ и $\angle BDC = \angle DEC$. Докажите, что $AB = DE$.

(А. Пастор)

5. Докажите, что на доску 100×100 нельзя положить по клеточкам 98 доминошек (т.е. 98 прямоугольников 1×2) так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали они занимали нечетное количество клеток. Доминошки могут соприкасаться сторонами, но не должны перекрываться.

(О. Иванова, С. Иванов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. Вдоль дороги длиной 37 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков на дороге?

(О. Иванова, К. Козась)

2. Сапа и Кирилл задумали два натуральных числа. Сапа умножил первое число на сумму цифр второго и получил 200720072007200720072007. Кирилл умножил второе число на сумму цифр первого числа и получил 200820082008200820082008. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.

(А. Храброе)

3. Найдутся ли такие различные вещественные числа a , b , c , что прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ пересекаются в одной точке?

4. На продолжении стороны AD вписанного четырехугольника $ABCD$ за точку D отмечена точка E такая, что $AC = CE$ и $\angle BDC = \angle DEC$. Докажите, что $AB = DE$.

(А. Пастор)

5. Числа от 1 до 600 выписаны в строчку в некотором порядке. Сумма любых двух соседних чисел не превосходит 800. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, стоящих через одно, больше 800.

(С. Берлов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = 2x^2 - ax + 7$. При каких значениях параметра a найдется такое число φ из промежутка $(\pi/4; \pi/2)$, что выполняется равенство $f(\sin \varphi) = f(\cos \varphi)$? (С. Берлоэ)

2. Даны натуральные числа k, ℓ, m, n и возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots$ с положительными членами. Известно, что среднее геометрическое ее членов a_k и a_ℓ больше, чем среднее арифметическое a_m и a_n . Докажите, что $(k + \ell)/2 > \sqrt{mn}$. (К. Козась)

3. На длинной полоске бумаги напечатано число $3^{20072008}$. Саппа разрезал полоску на три куска. Изучив числа, написанные на этих кусках, Саппа заявил, что каждое из этих трех чисел является степенью тройки. Докажите, что он ошибается. (А. Храброе)

4. Через вершины A и B остроугольного треугольника ABC проведена окружность, пересекающая сторону AC в точке X , а сторону BC в точке Y . Оказалось, что эта окружность проходит через центр описанной окружности треугольника XYC . Отрезки AY и BX пересекаются в точке P . Известно, что $\angle ACB = 2\angle APX$. Найдите $\angle ACB$. (С. Берлоэ)

5. Числа от 1 до 600 выписаны в строчку в некотором порядке. Сумма любых двух соседних чисел не превосходит 800. Докажите, что есть два числа, стоящих через одно, сумма которых больше 800. (С. Берлоэ)