Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2006 года по математике

Отборочный тур. 9 класс.

1. На доске написано 101 натуральное число. Известно, что произведение любых 51 из этих чисел делится на произведение оставшихся. Докажите, что если числа набора взаимно просты в совокупности, то произведение всех чисел — степень натурального числа. (*М. Антипов*)

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника ABC расположена окружность, касающаяся сторон AB и BC в точках X и Y соответственно и пересекающая описанную окружность треугольника AIC в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников AXZ и CYZ касаются друг друга. (*С. Берлов*)

3. Дан квадратный трехчлен $2005x^2+2006x+2007$. Двое ходят по очереди. Своим ходом игрок может вычесть из многочлена x^2, x или 1. Проигрывает игрок, после хода которого получается многочлен с целочисленным корнем. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник? (*Д. Карпов*)

4. Решите в натуральных числах уравнение $n^3-5n+10=2^k$.

(*И. Андреева. Н. Кушпель. Ф. Бахарев. Ф. Петров*)

5. Пусть BL — биссектриса остроугольного треугольника ABC, H — его ортоцентр, точка K симметрична точке L относительно центра описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $BK > HL$. (*А. Пастор*)

6. В графе $n>300$ вершин. В любом множестве A, содержащем не менее трех вершин этого графа, можно указать три вершины, каждая из которых смежна не более чем с 200 вершинами из A. Какое максимальное количество ребер может быть в этом графе? (*Д. Карпов*)

7. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, сумма квадратов которых равна 1. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_{i+1}}{2-(a_i-a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}$$

(нумерация переменных циклическая, т. е. $a_{n+1}=a_1$). (*С. Берлов*)

8. Нечетное число n равно произведению трех различных простых чисел. Докажите, что для любых различных натуральных a и b число a^n-b^n имеет простой делитель, больший n. (*частный случай результата Биркгофа*)

Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2006 года по математике
Отборочный тур. 10 класс.

1. Дано 101 натуральное число. Известно, что произведение любых 51 из этих чисел делится на произведение оставшихся. Докажите, что если числа взаимно просты в совокупности, то их произведение — квадрат натурального числа.

(*М. Антипов*)

2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Через вершину B провели окружность с центром в точке I, которая пересекла стороны AB и BC, а сторону AC пересекла в двух точках: F и L (F лежит между A и L). Докажите, что проекции точки I на AC, BC и BL лежат на одной прямой. (*Ф. Бахарев*)

3. Положительные числа x, y, z, α, β и γ удовлетворяют соотношениям $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ и

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy\cos\gamma + yz\cos\alpha + zx\cos\beta).$$

Докажите, что из отрезков с длинами x, y и z можно сложить треугольник с углами α, β и γ. (*А. Храбров*)

4. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов авиарейсами так, чтобы от любого города можно было долететь до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D, для которых есть рейсы AB, BC, CD, был и рейс AD. Сколько существует способов это сделать?

(*С. Берлов, С. Иванов*)

5. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что $a + b + c + d + \frac{1}{abcd} \geq 18$. (*А. Храбров*)

6. Два юноши в буфете угощают девушку конфетами. За один ход юноша покупает у буфетчицы 1 или 2 конфеты и отдает их девушке. Ходят по очереди. Изначально у молодых людей по 550 рублей, а у буфетчицы 1000 конфет. Каждая конфета стоит рубль. Игрок, который не может в свой ход угостить девушку, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре? (*К. Кохась*)

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что отрезок XY проходит через центр I вписанной окружности. Биссектрисы углов AXY и XYC пересекаются на стороне AC. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный. (*Ф. Бахарев*)

8. Попарно различные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и попарно различные числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ принадлежат отрезку $[0, 1)$. На доску выписаны дробные части всех попарных сумм $\{a_i + b_j\}$ при $1 \leq i, j, \leq n$. Оказалось, что на доске написано не более $2n - 2$ различных чисел. Докажите, что каждое число встречается на доске как минимум дважды. (*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. 11 КЛАСС.

---

1. Назовем тройку вещественных чисел хорошей, если два меньших числа этой тройки отличаются не более чем на 1 (например, $(1, \sqrt{3}, 4)$ — хорошая тройка, а (1,3,4) — нет). В некотором тетраэдре длины ребер любой грани образуют хорошую тройку. Докажите, что полусуммы длин скрещивающихся ребер также образуют хорошую тройку. (*М. Громов*)

2. Решите в натуральных числах уравнение $n^3 - 5n + 10 = 2^k$.
(*И. Андреева, Н. Купцель, Ф. Бахарев, Ф. Петров*)

3. Окружность с центром I вписана в треугольник ABC и касается его сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На отрезке BC_1 нашлась точка K такая, что $IK = IC$. Докажите, что середина KC лежит на A_1C_1. (*Ф. Бахарев*)

4. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов двусторонними авиарейсами так, чтобы от любого города можно было долететь до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D, для которых есть рейсы A–B, B–C, C–D, был и рейс A–D. Сколько существует способов это сделать?
(*С. Иванов, Ф. Петров*)

5. $2^n + 1$ различных множества разбиты на две категории — "красные" и "синие", причем есть и те, и другие. Множество, являющееся симметрической разностью красного и синего, назовем белым (оно может принадлежать, а может и не принадлежать исходному набору множеств). Докажите, что белых множеств не менее 2^n.
(*Д. фон дер Флаас, М. Алексеев*)

6. Дан выпуклый n-угольник F. Назовем окружность полувписанной в F, если она полностью лежит в многоугольнике F и касается трех его сторон. Известно, что никакие четыре прямые, содержащие стороны F, не касаются одной окружности. Докажите, что полувписанных окружностей ровно $n - 2$. (*фольклор*)

7. Конечная последовательность $f(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ не убывает и принимает целочисленные значения из промежутка $[1, n]$. Докажите неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} f(f(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{n^2}{4}.$$

(*Ф. Назаров*)

8. Даны различные простые числа p, q и натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $b_1, b_2, \ldots, b_q$. Известно, что суммы $a_i + b_j$ дают все возможные остатки при делении на pq. Докажите, что числа a_i дают все возможные остатки при делении на p.
(*С. Иванов*)