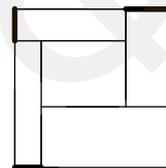


**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 6 КЛАСС.**

1. Расставьте 8 минусов и 17 плюсов в клетках квадрата 5×5 так, чтобы рядом с каждым минусом (т. е. в клетках соседних по стороне) было ровно 2 плюса. (Ф. Базарев)

2. Квадрат со стороной 4 м разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Сумма длин жирных отрезков равна 2 м. Найдите периметр внутреннего прямоугольника. Не забудьте обосновать свой ответ.



(Ф. Базарев)

3. У 10 девочек было по 10 конфет. Каждая девочка подарила несколько конфет другим (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у нее их оказалось в конце.

(по мотивам задачи А. Храброва)

4. Костя написал два числа, не содержащих в записи нулей, и заменил цифры буквами (разные цифры — разными буквами). Оказалось, что число КРОКОДИЛЛЛ делится на 312. Докажите, что число ГОРИЛЛА не делится на 392. (К. Кохас)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 7 КЛАСС.**

1. Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырех из них указаны на рисунке. Чему равен периметр прямоугольника x ?

(О. Вавюшнина, К. Кохась)

10		x
11		
12		13

2. Каждый из семи фальшивомонетчиков изготовил по 31 монете: 20 монет по 6 рублей, 10 — по 1 рублю и 1 монету в 5 рублей. Любые двое могут меняться монетами так, чтобы у каждого оставалась такая же сумма денег. Могут ли в результате таких обменов все монеты по 1 рублю оказаться у одного фальшивомонетчика? Не забудьте обосновать свой ответ.

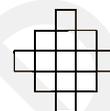
(О. Вавюшнина)

3. У 10 девочек было по 10 конфет. Каждая девочка подарила несколько конфет другим (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у нее их оказалось в конце. (по мотивам задачи А. Жаброва)

4. Костя написал два числа, не содержащих в записи нулей, и заменил цифры буквами (разные цифры — разными буквами). Оказалось, что число КРОКОДИЛЛЛ делится на 312. Докажите, что число ГОРИЛЛА не делится на 392. (К. Кохась)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 8 КЛАСС.**

1. Расставьте числа в клетках изображенной на рисунке фигуры так, чтобы в любом прямоугольнике из трех клеток сумма чисел была равна 1, и сумма всех чисел была равна 1. (Достаточно привести один пример.) (Ф. Бахарев)



2. Двочлен Вася складывает дроби, прибавляя числитель к числителю, а знаменатель — к знаменателю. Однажды он сложил две правильные несократимые дроби и получил ответ, который ровно в два раза меньше истинного. Какие дроби складывает Вася, если известно, что они различны и одна из них равна $\frac{1}{6}$? (Найдите все варианты и докажете, что других нет.) (С. Иванов)

3. Точки P и Q — середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно. Оказалось, что $AB = BC$, а точка P лежит на биссектрисе угла B . Докажите, что $BD = 2PQ$. (С. Берлов)

4. Даны шесть чисел. Сумма любых пяти из них больше 900, но меньше 1000. Докажите, что все данные числа больше 100.

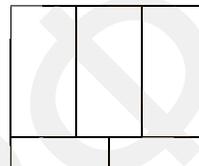
(А. Железняк, С. Иванов)

5. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

(А. Жабров)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 9 КЛАСС.**

1. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, как показано на рисунке. (У двух нижних прямоугольников горизонтальная сторона больше вертикальной, у трех верхних — наоборот.) У всех прямоугольников отношение большей стороны к меньшей равно одному и тому же числу. Найдите это число. (К. Козась)



2. Докажите, что ни при каком вещественном $a > 0$ число $[100a] + [71a]$ не может иметь вид $171k + 170$, где k — натуральное число. (Через $[x]$ обозначается целая часть x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .) (Ю. Иосифович)

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. На диагонали AC найдется такая точка K , что $AK = BK$ и четырехугольник $KBCD$ вписанный. Докажите, что $BD = CD$.

(Ф. Бахарев, Д. Ростовский)

4. 16-значное число a делится на 999 999 999. Докажите, что никакое натуральное 16-значное число, которое можно получить из a перестановкой цифр, не может делиться на 100 000 001. (В. Фразин)

5. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

(А. Жабров)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.**

1. Докажите, что квадрат можно разрезать на шесть прямоугольников, у каждого из которых отношение большей стороны к меньшей равно $2 + \sqrt{2}$. (В. Коваль)

2. Дана возрастающая положительная геометрическая прогрессия b_n . Известно, что

$$b_4 + b_3 - b_2 - b_1 = 5.$$

Докажите, что $b_6 + b_5 \geq 20$. (С. Берлов, Д. Ростовский)

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. На диагонали AC найдется такая точка K , что $AK = BK$ и четырехугольник $KBCD$ вписанный. Докажите, что $BD = CD$.

(Ф. Бахарев, Д. Ростовский)

4. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

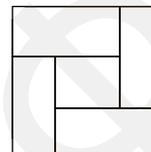
(А. Храбров)

5. Дано 39-значное натуральное число A . Докажите, что существует такое 20-значное число B , что ни одно 39-значное натуральное число, получающееся из A перестановкой его цифр, не делится на B .

(В. Фразис)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 11 КЛАСС.**

1. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, как показано на рисунке. У всех четырех окаймляющих прямоугольников отношение большей стороны к меньшей равно одному и тому же числу. Докажите, что центральный прямоугольник — квадрат. (Ф. Бахарев)



2. Дима написал арифметическую прогрессию из пяти чисел, принадлежащих промежутку $[-2\pi/3, 2\pi/3]$. Оказалось, что сумма синусов первого и четвертого ее членов равна сумме косинусов второго и пятого членов. Чему может быть равен третий член прогрессии? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.) (Ф. Петров)

3. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

(А. Жабров)

4. На какие цифры не может оканчиваться натуральное число

$$[x] + [3x] + [6x],$$

если $x > 0$ — вещественное число? (Через $[x]$ обозначается целая часть x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x .) (Эксперт)

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle ADB$. Докажите, что из отрезков BC , AD , AC можно сложить прямоугольный треугольник. (А. Смирнов)