САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 года ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный тур. 9 класс.

1. Докажите, что $\overline{xy} \cdot \overline{yz} \cdot \overline{zx} \neq \overline{yx} \cdot \overline{zy} \cdot \overline{xz}$, если цифры x, y, z, 0 попарно не равны. (*К. Кохась*)

2. Некоторые n клеток квадрата $n \times n$ закрашены. При каком наибольшем k заведомо найдется клетчатый прямоугольник периметра k без закрашенных клеток?

3. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AFB и BLC, причем один из них лежит внутри треугольника ABC, а другой построен во внешнюю сторону. При этом $\angle AFB = \angle BLC$ и $\angle CAF = \angle ACL$. Докажите, что прямая FL отсекает от угла ABC равнобедренный треугольник. (*Ф. Бахарев*)

4. В ряд выписаны 120 чисел. Сережа может стереть несколько чисел (но не все), стоящих подряд, и написать на месте каждого из них среднее арифметическое стертых чисел. Всегда ли он может добиться того, чтобы все числа стали равными? (*С. Рукшин*)

5. Натуральные n, m, k таковы, что числа $5^n - 2$ и $2^k - 5$ делятся на $5^m - 2^m$. Докажите, что n и m взаимно просты.

6. На меньшей дуге AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. На стороне AC нашлась такая точка E, что $DE = AE$. На прямой, параллельной AB, проходящей через E, отмечена точка F такая, что $CF = BF$. Докажите, что D, E, C, F лежат на одной окружности. (*А. Смирнов*)

7. Докажите для положительных a, b, c неравенство:

$$\frac{ab}{3a+b} + \frac{bc}{b+2c} + \frac{ac}{c+2a} \leq \frac{2a+20b+27c}{49}.$$

8. В каждой точке плоскости написано положительное число, не превосходящее 1. Известно, что для любого квадрата со стороной 1 суммы чисел в его противоположных углах равны. Докажите, что все написанные на плоскости числа равны.

Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2004 года по математике
Отборочный тур. 10 класс.

1. Некоторые 10 клеток квадрата 10×10 закрашены. При каком наибольшем k заведомо найдется клетчатый прямоугольник периметра k без закрашенных клеток?

2. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AFB и BLC, причем один из них лежит внутри треугольника ABC, а другой построен во внешнюю сторону. При этом $\angle AFB = \angle BLC$ и $\angle CAF = \angle ACL$. Докажите, что прямая FL отсекает от угла ABC равнобедренный треугольник. (*Ф. Бахарев*)

3. Последовательность положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задается равенствами $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$ при всех натуральных n. Докажите, что $0.999 < a_{2004} < 1$. (*Ф. Петров*)

4. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 + b^3$ делится на $a^2 + ab + b^2$, а число $a - b$ — простое. Докажите, что $a^3 - b^3$ — точная четвертая степень. (*Ф. Бахарев*)

5. В N-элементном множестве выделены 100 подмножеств. Все они четны (т. е. состоят из четного числа элементов), их всевозможные пересечения по 2, по 3, ..., по 99 тоже четны, а пересечение всех 100 подмножеств нечетно. При каком наименьшем N такое возможно? (*С. Иванов*)

6. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно. Прямая KL пересекает стороны AD и BC в точках X и Y соответственно. Описанная окружность треугольника AKX пересекает сторону AB в точке M. Докажите, что описанная окружность треугольника BLY тоже проходит через точку M. (*А. Смирнов*)

7. В каждой точке плоскости написано положительное число, не превосходящее 1. Известно, что для любого квадрата со стороной 1 суммы чисел в его противоположных углах равны. Докажите, что все написанные на плоскости числа равны.

8. Натуральные числа $a, b, c, d, e > 1$ таковы, что $a^{b^{c^{d^e}}} = e^{d^{c^{b^a}}}$. Докажите, что $a = e$ и $b = d$. (*К. Сухов*)

Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2004 года по математике

Отборочный тур. 11 класс.

1. Некоторые n клеток квадрата $n \times n$ закрашены. При каком наибольшем k заведомо найдется клетчатый прямоугольник периметра k без закрашенных клеток?

2. Дана последовательность (x_n) такая, что $x_1 > 0$ и для любого натурального n $x_{n+1} = \frac{n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$. Докажите, что $x_{2004} \leq 1$. *(Ф. Петров)*

3. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 + b^3$ делится на $a^2 + ab + b^2$, а число $a - b$ — простое. Докажите, что $a^3 - b^3$ — точная четвертая степень. *(Ф. Бахарев)*

4. На дуге AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC, не содержащей B, отмечена точка D, а на стороне AC — точка E так, что $DE = AE$. На прямой, параллельной AB, проходящей через E отмечена точка F такая, что $CF = BF$. Докажите, что точки D, E, C, F лежат на одной окружности.

(А. Смирнов)

5. В различных клетках автодрома 2004×2004 стоит $2\,000\,000$ машинок с номерами от 1 до $2\,000\,000$, управляемых с помощью большого компьютера. Компьютер выдает команды вида "Машинке № k — сдвинуться на 1 клетку влево (вправо, вниз, вверх)". Получив команду, машинка передвигается на указанную клетку, если эта клетка свободна и лежит внутри автодрома, после чего сообщает компьютеру, удалось ли выполнить команду.

Костя не видит автодрома и не знает, как расставлены машинки. Докажите, что он может написать такую последовательность команд, что по результатам их выполнения можно будет установить первоначальную расстановку машинок. (Все команды должны быть написаны до начала выполнения первой из них.)

(Д. Карпов, А. Пастор)

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины диагоналей AC и BD. Прямая PQ пересекает стороны AB и CD в точках N и M соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ANP, BNQ, CMP, DMQ пересекаются в одной точке. *(А. Смирнов)*

7. Двудольный граф с $v \geq 4$ вершинами без кратных ребер нарисован на плоскости так, что каждое ребро пересекается не более, чем с одним другим. Докажите, что в этом графе не более, чем $3v - 8$ ребер. *(Д. Карпов)*

8. Натуральные числа $a, b, c, d > 1$ таковы, что $a^{b^{c^d}} = d^{c^{b^a}}$. Докажите, что $a = d$ и $b = c$. *(К. Сухов)*