САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 6 класс.

1. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D, E так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равны: $AB = 4$, $BC = 7$, $CD = 9$, $DE = 6$, $AE = 8$? Если да — приведите пример, если нет — объясните, почему нельзя. (*В. Франк*)

2. Шестизначный номер называется *почти счастливым*, если сумма трех каких-то его цифр равна сумме трех остальных. Костя взял в автобусе два билета подряд. Их номера оказались почти счастливыми. Докажите, что один из этих номеров оканчивается на 0.

(*По мотивам задачи 7.4*)

3. Рома задумал натуральное число n, нашел его делитель, умножил этот делитель на 4 и результат вычел из числа n. Получилось 11. Чему равно n? Найдите все возможные ответы и докажите, что других ответов нет. (*К. Кохась*)

4. Футбольные матчи Зубило–Дробило, Зубило–Крокодило и Дробило–Крокодило оказались очень результативными. Зубило в сумме забило 60 голов, Дробило пропустило 80 голов. Крокодило забило столько же, сколько пропустило. Докажите, что в матче Дробило–Крокодило было забито не менее 40 голов. (*К. Кохась, Р. Семизаров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D, E так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равны: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 10$, $DE = 9$, $AE = 12$? Если да — приведите пример, если нет — объясните, почему нельзя. (*В. Франк*)

2. Натуральное число n равно произведению двух простых чисел. Каждое из этих простых чисел увеличили на 1. Произведение полученных чисел на 100 больше, чем число n. Чему равно число n? Найдите все возможные варианты ответа, и докажите, что других ответов нет. (*А. Железняк*)

3. В государстве имеют хождение монеты в 1, 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20, 25, 32, 50, 57, 75, 100 сантиков. Автомат разменивает одну монету на четыре других (например, монету 100 сантиков на монеты 57, 20, 20 и 3 сантика). Можно ли за несколько разменов превратить одну монету в 100 сантиков в 100 монет по 1 сантику? (*А. Железняк*)

4. Лотерейные билеты имеют номера от 0000000 до 9999999. Назовем номер *почти счастливым*, если сумма каких-то трех его цифр равна сумме четырех остальных. Докажите, что почти счастливых билетов меньше 5 000 000. (*В. Франк*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. Учительница записала на доске три положительных вещественных числа и велела Диме одно из них уменьшить на 3%, другое уменьшить на 4%, а третье увеличить на 5%. Результаты Дима записал в тетради. Оказалось, что в Диминой тетради записаны те же числа, что и на доске (возможно, в другом порядке). Докажите, что Дима ошибся. *(Жюри)*

2. Можно ли расставить в клетках таблицы 5×8 цифры 1 и 3 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел делилась на 7? *(Д. Ростовский, А. Храбров)*

3. Докажите, что если $2 \le x \le 3$, $2 \le y \le 3$, то

$$(3-x)^2 + (3-y)^2 + (x-y)^2 \le 2.$$

(А. Храбров)

4. Точки K и L — середины сторон AB и BC четырехугольника $ABCD$. На стороне CD выбрана такая точка M, что $CM : MD = 2 : 1$. Известно, что $DK \parallel BM$ и $AL \parallel CD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция. *(А. Храбров)*

5. Вася задумал натуральное число n, выписал все его натуральные делители, кроме самого числа n, и сложил два наибольших из них. Получилось число 193. Какое число задумал Вася? (Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.) *(С. Берлов)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. Костя задумал натуральное число, нашел его делитель, прибавил к этому делителю 10, полученное число умножил на 3 и результат вычел из задуманного числа. Получилось 1. Какое число задумал Костя?

(*К. Кохась*)

2. В классе учится 35 школьников, они изучают 10 предметов. После выставления годовых оценок оказалось, что средний балл по каждому предмету больше $4\frac{2}{3}$. Докажите, что хотя бы 5 школьников закончили год без двоек и единиц. (*О. Ванюшина*)

3. В выпуклом четырехугольнике, описанном около окружности, произведения противоположных сторон равны. Угол между стороной и одной из диагоналей равен 20°. Найдите угол между этой стороной и другой диагональю. (*Ф. Бахарев*)

4. На доске в строку выписаны 4 цифры: 2 0 0 3. К ним применяют такую операцию: подсчитывают сумму цифр на доске, дописывают ее справа в эту же строку, а слева стирают несколько цифр так, чтобы на доске по-прежнему оставалось только 4 цифры. Можно ли за несколько таких операций получить цифры 3 6 1 3 (в указанном порядке)?

(*В. Франк*)

5. Докажите для положительных a, b, c, d неравенство

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{abcd}.$$

(*А. Смирнов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

---

1. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $|4 - xy| < 2|x - y|$. Докажите, что одно из них меньше 2, а другое больше.

(*А. Храбров*)

2. В классе учится 35 детей, они изучают 10 предметов. После выставления годовых оценок оказалось, что средний балл по каждому предмету больше $4\frac{2}{3}$. Докажите, что хотя бы 5 детей закончили год без двоек и единиц.

3. Вася задумал натуральное число, нашел все его натуральные делители, кроме самого числа, и сложил два наибольших из них. Получилось число 61. Какое число задумал Вася? (Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.) (*С. Берлов*)

4. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M соответственно так, что $\angle BLK = \angle CLM = \angle BAC$. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что четырехугольник $AKPM$ — вписанный. (*С. Иванов*)

5. В клетках таблицы 17×17 записаны положительные числа. В каждой строке эти числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце квадраты этих чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что произведение числа в левом верхнем углу и числа в правом нижнем углу равно произведению чисел в двух других углах. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ I тур. 11 класс.

1. За круглым столом сидят 6 мальчиков, изначально у каждого из них по 11 булочек. Каждую минуту один из мальчиков передает одну из своих булочек своему соседу по часовой стрелке. Через 51 минуту у первого, третьего и пятого мальчика оказалось по 22 булочки, а у остальных — ни одной. Докажите, что каждый мальчик хотя бы раз передал одну из своих булочек. (*О. Ванюшина*)

2. Дима вычислил синусы ста последовательных натуральных чисел. Могло ли так оказаться, что ровно 51 из них принадлежат отрезку $[0, 1/2]$? (*фольклор*)

3. Вася задумал натуральное число, нашел все его натуральные делители, кроме самого числа, и сложил два наибольших из них. Получилось число 463. Какое число задумал Вася? (Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.) (*С. Берлов*)

4. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M соответственно так, что $\angle BLK = \angle CLM = \angle BAC$. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что четырехугольник $AKPM$ — вписанный. (*С. Иванов*)

5. Для произвольных вещественных чисел $x, y \in [0, 1]$ докажите неравенство

$$x^4 + y^5 + (x - y)^6 \leq 2\,.$$

(*А. Храбров*)