САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 6 класс.

1. Закрасьте несколько клеток в квадрате 10×10 так, чтобы у каждой клетки было ровно две соседних по стороне закрашенных клетки.

2. Имеется 2003 целых числа с суммой 0. Разрешается выбрать любые 300 чисел и поменять у всех них знак, либо уменьшить каждое на 1. Докажите, что при помощи таких операций можно получить 2003 нуля.

3. В селе Ивановском живет $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя. (*С. Иванов*)

4. Квадрат 300×300 разрезан на прямоугольники 1×3. В каждом вертикальном прямоугольнике написан номер столбца, содержащего этот прямоугольник. Докажите, что сумма написанных чисел делится на 3.

. . . .

Олимпиада 2003 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

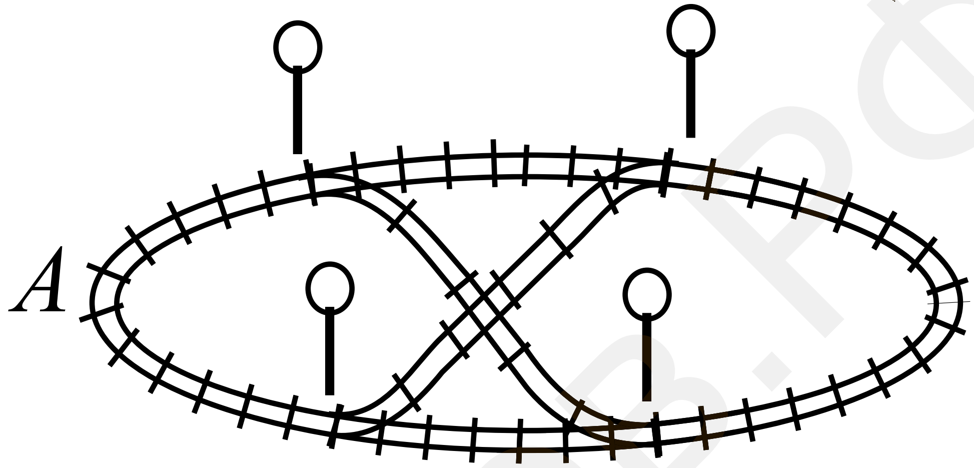
5. Костя задумал четырехзначное число и написал остатки от деления этого числа на 2, на 3, …, на 101 (всего 100 остатков). Могло ли среди выписанных чисел оказаться не менее 20 семерок?

6. Шахматный конь, будучи поставленным на клетку $d4$ шахматной доски, может сделать ход в 8 направлениях. Докажите, что конь, обошедший все клетки шахматной доски ровно по одному разу и вернувшийся на начальную клетку, делал ходы не менее чем в пяти направлениях.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 7 класс.

1. Костя играет в паровозик. Подъезжая к стрелке, Костя может переключить ее один раз, если она мешает движению в нужную сторону. В начальный момент стрелки включены так, что можно беспрепятственно ехать по большому кругу. Паровозик не имеет заднего хода. Может ли Костя, начав со станции A, покататься, и вернуться обратно в A, переключив во время поездки стрелки ровно 5 раз? *(К. Кохась)*



2. В селе Ивановском живут больше 100 человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя. *(С. Иванов)*

3. Число $\frac{2003}{2^{2003}}$ записано в виде конечной десятичной дроби. Какая цифра у него стоит на четвертом с конца месте?

4. На доску выписаны 5 натуральных чисел, все их попарные суммы (10 штук), все их тройные суммы (тоже 10 штук), все их четверные суммы (5 штук), и, наконец, сумма всех пяти чисел (1 шт.) — всего 31 число. Может ли так быть, что ровно 16 из этих чисел делится на 2003?

....

Олимпиада 2003 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. Дана шоколадка 712×2003 (712 — высота, 2003 — ширина). Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой кусок всего один) и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому игроку разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше либо равна ширины, а второму — у которых меньше либо равна ширины. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выиграет при правильной игре? *(А. Выскубов, Р. Семизаров)*

6. Отрезки AC и BD пересекаются в точке M, причем $AB = CD$ и $\angle ACD = 90^\circ$. Докажите, что $MD \geq MA$. *(Ф. Петров)*

7. Докажите, что существуют такие натуральные числа a, b, c, что $a^2 - 1 \,\vdots\, b$, $b^2 - 1 \,\vdots\, c$, $c^2 - 1 \,\vdots\, a$ и $a + b + c > 2003$. *(Ф. Петров)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 8 класс.

1. В селе Ивановском живет больше 100 человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя. *(С. Иванов)*

2. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа от 1 до 50 в таком порядке, чтобы для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots, 49$ сумма первых k чисел в этой записи делилась на $(k+1)$-е число, увеличенное на 1? *(С. Берлов)*

3. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника. *(С. Иванов)*

4. Квадрат размером 40×40 клеток разбит на полоски 1×4. Для каждой вертикальной полоски написали номер столбца, в котором она лежит, а для каждой горизонтальной — номер строки, в которой она лежит. (Строки и столбцы пронумерованы числами от 1 до 40.) Докажите, что сумма всех написанных чисел делится на 4.

. . . .

Олимпиада 2003 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. На плоскости дана квадратная решетка 100×100 точек (100 рядов по 100 точек с одинаковыми промежутками между ними). Разрешается проводить прямые, не проходящие через левую нижнюю точку этой решетки. Каким наименьшим числом таких прямых можно покрыть все точки, кроме левой нижней? *(А. Косовская)*

6. CL — биссектриса треугольника ABC, $AC < BC$. На прямой, параллельной CL и проходящей через B, выбрана такая точка M, что $LM = LB$. На отрезке CM выбрана такая точка K, что отрезок AK делится прямой CL пополам. Докажите, что $\angle CAK = \angle ABC$. *(С. Берлов)*

7. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел a и b, для которых $a^8 + b^4 + 1$ делится на ab. *(по мотивам задачи Ф. Петрова)*