САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

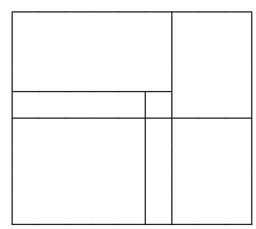
I тур. 6 класс.

1. Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 три трехзначных числа так, чтобы сумма двух чисел равнялась третьему и при этом у одного из этих чисел цифра десятков была равна 8. (Каждую цифру нужно использовать один раз.) (*А. Храбров*)

2. Голодные Малыш и Карлсон съели торт и стали сытыми. Известно, что голодный Карлсон легче сытого Малыша, а сытый Карлсон весит столько же, сколько два голодных Малыша. Что весит больше: торт или голодный Малыш? Не забудьте обосновать свой ответ. (*К. Кохась*)

3. В школе, где учится больше 225, но меньше 245 учеников, часть учеников являются отличниками, а остальные — хорошистами. После сложной контрольной работы 2/7 отличников стали хорошистами, а хорошисты так и остались хорошистами за исключением одного человека, который стал троечником. При этом хорошистов и отличников стало поровну. Сколько учеников могло быть в школе? Приведите все возможные варианты ответа.

4. Саша заметил, что если из прямоугольника 7×9 вырезать **любую внутреннюю клетку** и оставшуюся часть прямоугольника разрезать на 6 частей так, как показано на рисунке, то из этих 6 частей не удастся составить прямоугольник. Объясните, почему.



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 7 класс.

1. Придумайте девятизначное натуральное число, в записи которого присутствует хотя бы одна единица, хотя бы одна тройка и хотя бы одна семерка, и такое, что:

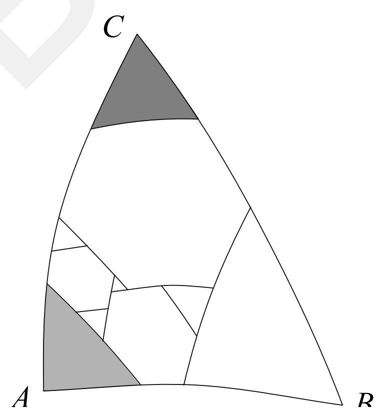
— если в нем вычеркнуть все единицы, то получится число, делящееся на 73;

— если в нем вычеркнуть всех тройки, то получится число, делящееся на 71;

— если в нем вычеркнуть все семерки, то получится число, делящееся на 13. (*К. Кохась*)

2. В роще растут 18 дубов. На них поровну желудей. Подул ветер и с некоторых дубов осыпались желуди: с каких-то — ровно половина, с каких-то — ровно треть, с остальных же ничего не упало. При этом со всех дубов вместе упала ровно одна девятая часть всех желудей. Со скольких дубов желуди не упали? (*А. Храбров*)

3. Равносторонний треугольник ABC разрезан прямыми линиями на 7 равносторонних треугольников и 3 равносторонних шестиугольника. Справа приведен искаженный чертеж этого разбиения, в котором многие прямые линии искривлены. У какого закрашенного треугольника сторона на самом деле больше — у прилегающего к вершине A или к вершине C? (*К. Кохась, Р. Семизаров*)



4. В Бразилии живет много-много диких обезьян. Каждый год 2 января всех обезьян пересчитывают. В 1999 г. количество обезьян увеличилось по сравнению с 1998 г. ровно на 5%. И в 2000–2003 гг. прирост поголовья обезьян каждый год тоже составлял ровно 5%, причем по данным переписи 2003 г. в стране проживало не более 5 000 000 диких обезьян. Сколько диких обезьян жило в Бразилии 2 января 2003 года? (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. Можно ли расставить в таблице 3×3 девять различных четырехзначных чисел так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних клетках делилась нацело на 2003? (Соседними считаются клетки таблицы, примыкающие друг к другу по горизонтали или вертикали.)

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Серединный перпендикуляры к диагоналям BD и AC пересекают сторону AD в точках X и Y соответственно, причем X лежит между A и Y. Оказалось, что прямые BX и CY параллельны. Докажите, что прямые BD и AC перпендикулярны. (*С. Берлов*)

3. У натурального числа n есть такие два различных натуральных делителя a и b, что

$$(a-1)(b+2) = n-2\,.$$

Докажите, что $2n$ — квадрат натурального числа.

4. На окружности длины 101 см отмечена 101 точка. Отмеченные точки делят окружность на равные дуги. Вася поставил в одну из этих точек фишку и двигает ее по таким правилам: за один ход можно передвинуть фишку по часовой стрелке на 6, 7, 8, 9 или 10 см (расстояние измеряется по окружности), при этом фишка должна оказаться в отмеченной точке, в которой еще ни разу не была. Вася уже сделал 45 ходов. Докажите, что он сможет сделать еще один ход.

5. Учительница написала на доске в ряд 13 чисел (не обязательно целых), причем каждое следующее число больше предыдущего на одну и ту же величину. Каждый ученик вычислил сумму каких-то трех из написанных чисел. Один из учеников получил в ответе 0, другой — $3\frac{1}{2}$, а третий — $6\frac{1}{3}$. Докажите, что кто-то из них ошибся.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. Модуль разности корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ не меньше 10. Докажите, что модуль разности корней квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + 3c$ больше 17. (*А. Храбров*)

2. В роще росли сосны, кедры и лиственницы, причем на всех деревьях было поровну шишек. Подул легкий ветерок и несколько шишек упало на землю. Оказалось, что с каждой сосны упало ровно 11% ее шишек, с каждого кедра — ровно 54%, а с каждой лиственницы — ровно 97%. При этом со всех деревьев вместе упало ровно 30% всех висевших на них шишек. Докажите, что количество деревьев в роще делится на 43. (*А. Храбров*)

3. На окружности длины 101 см отмечена 101 точка. Отмеченные точки делят окружность на равные дуги. Вася поставил в одну из этих точек фишку и двигает ее по таким правилам: за один ход можно передвинуть фишку по часовой стрелке на 6, 7, 8, 9 или 10 см (расстояние измеряется по окружности), при этом фишка должна оказаться в отмеченной точке, в которой еще ни разу не была. Вася уже сделал 45 ходов. Докажите, что он сможет сделать еще один ход.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $CM = MN = = NB$. К стороне BC в точке N построен перпендикуляр, пересекающий сторону AB в точке K. Оказалось, что площадь треугольника AMK в 4,5 раза меньше площади исходного треугольника. Докажите, что исходный треугольник равнобедренный.

5. Найдите все положительные решения уравнения

$$5[x^2] + 5[x] - x^2 - x = 2000\,.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. Модуль разности корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ не меньше 10. Докажите, что модуль разности корней квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + 3c$ больше 17. *(А. Храбров)*

2. Можно ли расставить числа -11, -10, -9, $\ldots$, 13, 14 в вершинах, на ребрах и на гранях куба (у куба 8 вершин, 12 ребер и 6 граней) так, чтобы число на любом ребре куба равнялось сумме чисел, стоящих в его концах, а число на любой грани этого куба равнялось сумме четырех чисел, стоящих на ее сторонах? *(Ф. Бахарев)*

3. На окружности длины 101 см отмечена 101 точка. Отмеченные точки делят окружность на равные дуги. Вася поставил в одну из этих точек фишку и двигает ее по таким правилам: за один ход можно передвинуть фишку по часовой стрелке на 6, 7, 8, 9 или 10 см (расстояние измеряется по окружности), при этом фишка должна оказаться в отмеченной точке, в которой еще ни разу не была. Вася уже сделал 45 ходов. Докажите, что он сможет сделать еще один ход.

4. Серединные перпендикуляры к диагоналям BD и AC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках X и Y соответственно. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от прямых BX и CY. *(С. Берлов)*

5. Натуральное число $n > 100$ разделили с остатком на 10, 35 и 42. Оказалось, что сумма остатков от деления на 35 и 42 равна остатку от деления на 10. Докажите, что число n — составное. *(А. Храбров)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. Приведите пример девятизначного натурального числа, в десятичной записи которого имеется хотя бы одна единица, хотя бы одна пятерка и хотя бы одна девятка, и такое что

— если в нем вычеркнуть все пятерки, то получится число, делящееся на 13;

— если в нем вычеркнуть все девятки, то получится число, делящееся на 17;

— если в нем вычеркнуть все единицы, то получится число, делящееся на 19. (*К. Кохась*)

2. У натурального числа n есть такие два различных натуральных делителя a и b, что
$$(a-1)(b+2)=n-2\,.$$
Докажите, что $2n$ — квадрат натурального числа.

3. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K. L — середина AC, точка M на отрезке AB такова, что $\angle AKM=\angle CKL$. Докажите, что $MA=MB$. (*Ф. Бахарев*)

4. На окружности отмечены 40 точек и нарисованы 5 треугольников с вершинами в этих точках. Треугольники не пересекаются, в том числе, не имеют общих вершин. Докажите, что можно нарисовать еще один треугольник с вершинами в отмеченных точках так, чтобы он не имел общих точек с уже нарисованными треугольниками. (*К. Кохась, Е. Сопкина*)

5. Докажите, что не существует функции $f(x)$, заданной при всех вещественных x и принимающей вещественные значения, такой что для всех целых x
$$f(-x^2+3x+1)=f^2(x)+2\,.$$
(*Ф. Петров*)