

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.**

1. Приведите пример двузначного числа, у которого произведение цифр, умноженное на сумму цифр, равно 84. *(А. Железняк)*

2. Имелся 21 карточка с числами: 4 карточки с единицей, 2 карточки с двойкой, 7 карточек с тройкой и 8 — с четверкой. Костя сложил из двадцати карточек прямоугольник 4×5 . Известно, что суммы чисел во всех вертикальных рядах этого прямоугольника равны между собой, и суммы чисел во всех горизонтальных рядах тоже равны между собой. Какая карточка осталась у Кости? Не забудьте обосновать ответ.

(К. Кохась)

3. У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Длина каждой палочки — 1 см или 3 см. Докажите, что, сломав не более одной палочки, Иа-Иа сможет из всех палочек сложить прямоугольник (ослик ломает палочку на две части).

(К. Кохась)

4. У бедного دهكانша было 70 лошадей и 6 верблюдов. Он продал несколько верблюдов и на часть вырученных денег купил 10 лошадей. Мог ли он вместо этого продать все, добавить еще 15 золотых и купить 50 верблюдов? (Лошадь и верблюд стоят целое число золотых.)

(О. Малеев)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.**

1. Можно ли составить три несократимые дроби, произведение которых равно 1, используя в качестве числителей и знаменателей этих дробей шесть чисел из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе.)

2. Расстояние от Гадокино до Мартышкино не менее 9 км. Деревни соединены прямотейшим шоссе. На расстоянии не менее 1 км и не более 3 км от Гадокино на обочине шоссе растет береза, а на расстоянии не менее 5 км и не более 7 км от Гадокино, тоже на обочине, растет дуб. Точно посередине между березой и дубом зарыт клад, причем это место находится не дальше 4 км от Мартышкино. На каком расстоянии от Гадокино зарыт клад?

3. У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Длина каждой палочки — 1 см или 3 см. Докажите, что, сломав не более одной палочки, Иа-Иа сможет из всех палочек сложить прямоугольник (ослик ломает палочку на две части).

4. 100 грустных мартышек кидаются друг в друга одним кокосовым орехом. Грустная мартышка, попавшая орехом в другую грустную мартышку, становится веселой и больше уже не грустит. Мартышка, в которую попали, выбывает из игры. Каких мартышек больше выбыло из игры — веселых или грустных — к моменту, когда в игре осталась одна мартышка? (Б. Сомкина)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.**

1. В таблице 3×3 расставлены положительные числа. Произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 2. Какое число стоит в центре?

(С. Иванов)

2. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle BDA$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

(Ф. Бахарев)

3. На какое наибольшее количество путей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, если их сумма равна 407?

(С. Берлов)

4. При проверке диктанта в 8^а классе оказалось, что грубые ошибки составляют более четверти всех ошибок. Если бы каждый ученик сделал в 3 раза больше грубых ошибок и на 2 больше негрубых, то число грубых ошибок стало бы ровно в 5 раз меньше числа негрубых. Докажите, что по крайней мере треть класса написала диктант вообще без ошибок.

(К. Кохась)

5. В ряд выписаны 40 различных чисел из интервала $(0, 1)$. Сумма чисел, стоящих на местах с четными номерами, на 1 больше, чем сумма чисел, стоящих на местах с нечетными номерами. Докажите, что в ряду найдется число, которое меньше каждого из двух своих соседей.

(С. Иванов)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.**

1. Сумма двух делителей числа 160000 равна 1025. Найдите эти делители. (О. Вайнштейн)

2. У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Докажите, что, сломав не более двух из них (ослик ломает палочки на две части), он может из всех палочек сложить прямоугольник. (К. Кокось)

3. В параллелограмме $ABCD$ $AB + CD = AC$. На стороне BC находится такая точка K , что $\angle ADB = \angle BDK$. Найдите $BK : KC$. (Ю. Лифшиц)

4. Докажите для чисел $a, b, c \in [0, 1]$ неравенство

$$a^{17} - a^{10}b^7 + b^{17} - b^{10}c^7 + c^{17} - c^{10}a^7 \leq 1.$$

(Ю. Лифшиц, Ф. Петров)

5. На координатной плоскости отмечены точки $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(3, 0)$, $D(4, 0)$, $E(-2, 5)$, $F(-1, 5)$, $G(8, 5)$, $H(9, 5)$. Может ли график квадратного трехчлена пересекать четыре отрезка: AB , CD , EF , GH ?

(К. Кокось, Ф. Петров)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.**

1. У квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ два корня, один из них принадлежит промежутку $(0, 1)$, а второй — не принадлежит этому промежутку. Докажите, что $f(b) \leq 0$. (А. Жабров)

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются на стороне AD . Докажите, что $AO > AB$. (Ю. Лифини)

3. Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 100$. Чему может быть равно число $[x^2] - [x]^2$? (Как обычно, $[y]$ — это целая часть числа y , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее y ; $\{y\} = y - [y]$ — дробная часть числа y .) (А. Жабров)

4. Конструктор “Елки-палки” состоит из палочек по 8 и 9 см. Их суммарная длина равна 18 м (в конструкторе есть палочки обоих типов). Докажите, что из *всех* этих палочек можно сложить равносторонний восьмиугольник. (Муз. К. Козаса, сл. Д. Картова и А. Пастора)

5. В ряд выписаны 40 двузначных чисел. Сумма чисел, стоящих на местах с четными номерами, на 72 больше, чем сумма чисел, стоящих на местах с нечетными номерами. Докажите, что в ряду найдется число, которое не превосходит каждого из двух своих соседей. (С. Иванов)

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.**

1. У Саши есть несколько палочек по 5 и 6 см, суммарная длина палочек — 6 м. Докажите, что из всех палочек можно сложить правильный десятиугольник. (по мотивам задачи 10.4)

2. Дана функция $f(x) = \lg[x] + \lg\{x\}$. Для некоторого вещественного числа a оказалось, что $f(a) = 2$. Докажите, что $f(a^2) > 4$. (Как обычно, $[x]$ обозначает целую часть x , $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x .)
(А. Храбров)

3. В таблице 11×11 расставлены положительные числа. Известно, что произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 3×3 равно 2. Найдите произведение чисел в первой и второй клетках третьей строки.
(С. Иванов, А. Храбров)

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . На плоскости взята такая точка D , что AB_1DC_1 — параллелограмм. Докажите, что если D лежит внутри треугольника ABC , то площадь четырехугольника AB_1OC_1 меньше площади треугольника BOC .
(А. Храбров)

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана начальными условиями $x_0 = 1$, $x_1 = 6$ и соотношением

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + \sin x_n, & \text{если } x_n > x_{n-1}; \\ x_n + \cos x_n, & \text{если } x_n \leq x_{n-1}. \end{cases}$$

Докажите, что $x_n < 100$ при всех натуральных n . (К. Кохась)