Олимпиада Юношеской Математической Школы 2008 г.
Задачи первого (заочного) тура
5–6 классы

1. В турнире по настольному теннису участвовали три пятиклассницы и две шестиклассницы. В каждом матче встречались пятиклассница и шестиклассница. Сначала Анна выиграла у Марии, затем Софья выиграла у Ирины, а Анна — у Ольги, и, наконец, Ольга выиграла у Софьи. Выясните, как зовут шестиклассниц. Почему Вы так считаете?

2. В примере на сложение одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные — разными. Известно, что получилось РЕШИ+РЕБУС=СКОРЕЙ. Найдите хотя бы один способ восстановить исходные цифры.

3. Покрасьте клетки доски 6×6 клеток в красный и чёрный цвета так, чтобы красных и чёрных клеток на доске оказалось поровну, но при этом в любом квадрате 2×2 чёрных и красных клеток было бы не поровну.

4. В пяти вазочках лежат конфеты. Если во всех вазочках лежит разное количество конфет, то Андрей добавляет четыре конфеты в вазочку, в которой меньше всего конфет. Объясните, почему в некоторый момент в каких-то двух вазочках всё же окажется поровну конфет.

5. Существует ли такое трёхзначное число, что при вычёркивании любой его цифры получается число, являющееся квадратом натурального числа? Объясните, почему Вы так считаете.

6. Капризная ладья бьет либо только по вертикали, либо, наоборот, только по горизонтали, зато умеет бить сквозь фигуры. Мальчик ставит ладей по одной на шахматную доску. Как только капризную ладью ставят на доску, она сообщает мальчику, будет она бить вдоль вертикали или вдоль горизонтали. Мальчик хочет добиться того, чтобы поставленные ладьи били все свободные клетки. Каким наименьшим количеством ладей он сможет обойтись, как бы ни вели себя ладьи?

7. У Миши было две кучи по 288 одинаковых на вид монет, среди которые есть настоящие (одинакового веса) и бракованные (каждая на 1 грамм легче настоящей). В одной куче все монеты настоящие, а в другой — половина монет бракованные. Одну из куч Миша потерял. У него есть двухчашечные весы без гирь и стрелок (если одна из чаш перевесила, то груз на ней более тяжел, но неизвестно, на сколько граммов). Может ли Миша узнать, какую именно из куч он потерял, сделав пять взвешиваний на этих весах? А может ли он обойтись меньшим числом взвешиваний? Обоснуйте свой ответ.

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2008 г.
Задачи первого (заочного) тура
7 класс

1. В турнире по футболу каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. При этом одна команда проиграла всем остальным. Могла ли она забить больше всех голов?

2. В школьном саду растут 24 яблони и 24 дуба. На каждом дубе вырастает в три раза больше желудей, чем яблок на яблоне (на каждом дубе растёт одинаковое количество желудей, и на каждой яблоне одинаковое количество яблок). По объёму одно яблоко равно восьми желудям. Дети отправились в сад собирать яблоки и жёлуди. В результате они собрали столько же мешков желудей, сколько мешков яблок (все мешки одинаковые). При этом все жёлуди оказались собраны, а вот какая-то часть яблок осталась на деревьях. Какая?

3. В деревне Арифляндии живут три человека. Один из них всегда говорит правду, а двое других — всегда врут. У каждого человека на лбу написано натуральное число, причём сумма всех чисел 2009. Однажды каждый человек сказал, что сумма чисел у двух остальных людей чётна. Какой остаток от деления на 4 может давать произведение всех чисел на лбах?

4. Существует ли такое трёхзначное число, что при вычёркивании любой его цифры остаётся число, являющееся квадратом натурального числа?

5. Капризная ладья бьет или только по вертикали, или только по горизонтали, в зависимости от настроения, зато умеет перепрыгивать через фигуры. Мальчик хочет поставить несколько ладей на шахматную доску так, чтобы, независимо от их настроения, оставалось непобитой не более одной свободной клетки доски. Каким наименьшим количеством ладей он сможет обойтись?

6. Есть 7 куч по 2008 камней. Два игрока по очереди выкидывают камни из них. За ход можно выкинуть один камень из какой-нибудь кучи. Игра продолжается до тех пор, пока в кучах есть камни. Если в некоторый момент хотя бы в пяти кучах окажется разное число камней, то выиграет первый игрок, а если такого не случится, то второй. Может ли второй игрок помешать первому выиграть?

7. В стране 2007 городов, причём любые два города соединены прямой авиалинией. Любитель авиации совершил путешествие по стране на самолётах, использовав каждую авиалинию ровно по разу (каждую в каком-то одном направлении). Докажите, что на каком-то этапе своего путешествия он посетил 5 различных городов подряд.

Решения олимпиады Вы можете **с 1 по 3 октября** (включительно) с 16.00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29.* Также Вы можете отправить свою работу по почте **до 3 октября** на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ.* Контактный телефон ЮМШ: 445-05-38. Веб-сайт: `http://yumsh.spbu.ru`

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2008 г.
Задачи первого (заочного) тура
8 класс

Дорогие друзья! Вам предлагается решить задачи, которые не похожи на те, с которыми Вы раньше встречались в школе. Все задачи разбиты на три сюжета. В каждом из сюжетов собраны задачи, в которых ведётся речь об одном и том же объекте, ситуации. Каждая следующая задача является либо развитием результата, полученного в предыдущей, либо предложением взглянуть на объект с другой стороны. Решая последовательно поставленные задачи, Вы изучаете этот объект, понимаете, что произойдёт, если так или иначе изменить условия задачи... То есть, по сути, Вы выполняете исследовательскую работу! При этом работы, в которых один сюжет исследован полностью, будут цениться выше, чем работы, в которых сделано по одной задаче из каждого сюжета.

Сюжет 1

Чук и Гек играют на школьной доске в следующую игру. В начале игры на доске написано одно натуральное число. За ход можно последнее выписанное число поделить на 2 (если оно чётное) или прибавить к нему 1. При этом запрещается повторять числа. Проигрывает тот, кто не может сделать свой ход. Если игра продолжается неограниченно долго, то никто не выигрывает. Первым ходит Чук.

1. Первое число на доске — чётное. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен для этого играть?
2. Первое число на доске — 7. Докажите, что ни один из игроков не может гарантировать себе выигрыш.
3. Первое число на доске — нечётное, не меньшее 9. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен для этого играть?

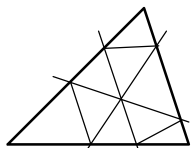
Сюжет 2

На следующий день Чук и Гек занимались в шахматном кружке и после кружка затеяли новую игру. Они придумали специальную фигуру — *ленивую ладью*. Ленивая ладья бьет только по одной линии — либо только по вертикали (и при этом не бьет по горизонтали), либо наоборот, — только по горизонтали; зато умеет бить сквозь фигуры. Сперва Чук расставляет ленивые ладьи на шахматной доске 8×8, затем Гек их всех ориентирует — то есть для каждой ладьи выбирает, по какой линии (вертикали или горизонтали) она бьет.

1. Чук расставляет 50 ленивых ладей. Всегда ли Гек может ориентировать их так, чтобы нашлось хотя бы одна свободная клетка, непобитая ни одной из ладей?
2. Какое минимальное количество ленивых ладей должен поставить Чук (и как именно), чтобы при любом выборе Гека осталось непобитой не более одной свободной клетки доски?
3. Чук ставит на доску 9 ленивых ладей. Какое наибольшее количество побитых клеток (свободных от ладей) Гек может обеспечить?

Сюжет 3

На третий день Чук и Гек учились геометрии и после уроков занялись разрезанием фигур на части. Они режут треугольник на 9 треугольников следующим образом (см. рисунок): тремя прямыми, пересекающимися в одной точке, и проходящими так, чтобы любую сторону пересекали ровно две из трёх, и еще тремя отрезками, соединяющими точки пересечения прямых со сторонами исходного треугольника.



1. Сначала они взяли в качестве исходного треугольника равнобедренный прямоугольный. Какое наибольшее количество равносторонних (среди 9 маленьких) у них может получиться?
2. Потом ребята взяли равносторонний исходный треугольник. Могут ли все 9 треугольников получиться прямоугольными?
3. Исходный треугольник — равносторонний, но при этом из трёх прямых, пересекающихся внутри него, никакие две не перпендикулярны. Какое наибольшее количество прямоугольных треугольников может получиться теперь?

Решения олимпиады Вы можете **с 1 по 3 октября** (включительно) с 16.00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29.* Также Вы можете отправить свою работу по почте **до 3 октября** на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ.* Контактный телефон ЮМШ: 445-05-38. Веб-сайт: `http://yumsh.spbu.ru`