САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Примеры заданий отборочного и заключительного этапов.

2013/2014 учебный год.

Ягубов.рф

Председатель методической комиссии

Олимпиады школьников СПбГУ по математике,

член-корреспондент РАН,

декан Математико-механического факультета,

профессор, д.ф.-м.н. _____ Г.А. Леонов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике. Задания заключительного этапа. 2013/2014 учебный год.

Задания для 10–11 классов

Ягубов.рф

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный тур. 2013/2014 учебный год.

Вариант 1

1. *На доске написано четырехзначное восьмеричное число x, у которого пара старших цифр такая же, как пара младших цифр. Если записать x в десятичной системе, то оно будет читаться одинаково слева направо и справа налево. Что написано на доске?*

Ответ: 1111.

Решение. Пусть x_8 и x_{10} — соответственно восьмеричная и десятичная запись x. Заметим, что $x = \overline{abab}_8 = (1+64)\cdot\overline{ab}_8 = 5\cdot 13\cdot\overline{ab}_8$. Поэтому x делится на 5 и на 13. В частности, x_{10} начинается и заканчивается на 5. Поскольку $1000_8 > 100$ и $7777_8 < 10\,000$, число x_{10} может быть либо четырехзначным, либо трехзначным. Рассмотрим оба случая.

1) $x_{10} = \overline{5cc5}_{10}$. Заметим, что $\overline{5cc5}_{10} = 5005 + 110c = 5\,(1001 + 22c)$. Тогда $1001 + 22c$ делится на 13. Так как 1001 кратно 13, на 13 делится 22c и, значит, c, что возможно только при c=0. Но число $5005_{10} = 11615_8$ не удовлетворяет условию задачи.

2) $x_{10} = \overline{5c5}_{10}$. Заметим, что $\overline{5c5}_{10} = 505 + 10c = 5\,(101 + 2c)$. Тогда $101 + 2c$ делится на 13. Так как $101 = 13\cdot 8 - 3$, остаток от деления $2c$ на 13 должен быть равен 3. Это возможно только при $c = 8$. Осталось заметить, что $585_{10} = 1111_8$. □

2. *В квалификационном турнире n шахматистов играют в один круг. Для попадания в основной турнир необходимо занять место не ниже m-го. При равенстве очков преимущество имеет спортсмен с бóльшим рейтингом (рейтинг у всех разный). Каково минимальное количество очков, с которым возможно пройти в основной турнир? (За победу в шахматах дают 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0).*

Ответ: $\frac{n-m}{2}$.

Решение. Пусть X — шахматист, занявший m-е место. Необходимо найти минимально возможное количество его очков. Сделаем два наблюдения.

1) *Можно считать, что спортсмены, занявшие места выше X, выиграли у тех, кто стоит ниже X.* В противном случае изменим соответствующие результаты, что не повлияет на место X.

2) *Можно считать, что X проиграл всем, кто стоит выше его.* Действительно, пусть X не проиграл кому-то из стоящих выше его. Заменим этот результат на проигрыш. Затем результаты X с нижестоящими соперниками улучшим так, чтобы количество очков X (по возможности) не изменилось. Если в итоге число очков X все-таки уменьшится, то результат X с нижестоящими соперниками окажется максимальным, и в силу 1) место X не изменится. Проводя такую операцию несколько раз, мы добьемся желаемого.

Вследствие 1) и 2) задача сводится к минимизации количества очков N, набранных победителем турнира с $n-m+1$ участником. В этих матчах разыгрывается $C^2_{n-m+1} = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}$ очков. Победитель набирает наибольшее количество очков, поэтому $N \geqslant \frac{n-m}{2}$. Равенство реализуется, если все участники, занявшие место не выше m-го, сыграли друг с другом вничью. □

3. *Найдите наименьшее значение выражения*

$$\left(\sqrt[4]{x^4+4} + x - y\right)^2 + \left(\sqrt[4]{y^4+4} + y - x\right)^2.$$

Ответ: 4.

Решение 1. Положим $f(t) = \sqrt[4]{t^4+4} + t$, $A = \big(x, f(x)\big)$, $B = \big(f(y), y\big)$. Нам необходимо минимизировать AB^2. Поскольку $f(t) > t$ для любого t, точки A и B лежат по разные стороны от биссектрисы ℓ первого и третьего квадрантов. Тогда AB не меньше суммы расстояний от A и B до ℓ, а при $y = x$ реализуется равенство ввиду симметрии A и B относительно ℓ. Заметим, что расстояние от A до ℓ есть $\frac{f(x)-x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[4]{x^4+4}}{\sqrt{2}}$, а его минимальное значение равно 1, как и расстояния от B до ℓ. Поэтому минимум AB^2 равен 4. □

Решение 2. Заметим, что при $x = y = 0$ интересующее нас выражение равно 4. Докажем, что при произвольных x и y оно не меньше 4. Легко видеть, что

$$\left(\sqrt[4]{x^4+4}+x-y\right)^2+\left(\sqrt[4]{y^4+4}+y-x\right)^2 = \\ = \sqrt{x^4+4}+\sqrt{y^4+4}+2(x-y)\left(x-y+\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}\right).$$

Каждое из первых двух слагаемых не меньше двух. Поэтому достаточно проверить, что последнее слагаемое неотрицательно. Оно обращается в ноль при $x = y$, а при $x \neq y$ равно

$$2(x-y)^2\left(1+\frac{\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}}{x-y}\right).$$

Нам нужно доказать неотрицательность этого выражения, то есть проверить неравенство

$$\frac{\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}}{x-y} \geqslant -1.$$

Преобразуем дробь в левой части, домножив числитель и знаменатель на сопряженные:

$$\frac{\sqrt[4]{x^4+4}-\sqrt[4]{y^4+4}}{x-y} = \frac{x^4-y^4}{x-y}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x^4+4}+\sqrt{y^4+4}\right)\left(\sqrt[4]{x^4+4}+\sqrt[4]{y^4+4}\right)} = \\ = \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^4+4}+\sqrt{y^4+4}\right)\left(\sqrt[4]{x^4+4}+\sqrt[4]{y^4+4}\right)} \geqslant \\ \geqslant -\frac{(|x|+|y|)(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^4+4}+\sqrt{y^4+4}\right)\left(\sqrt[4]{x^4+4}+\sqrt[4]{y^4+4}\right)} \geqslant -1.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $\sqrt[4]{x^4+4} \geqslant |x|$ и $\sqrt[4]{y^4+4} \geqslant |y|$, откуда первая скобка в знаменателе не меньше x^2+y^2, а вторая скобка не меньше $|x|+|y|$. $\square$

4. *У Васи есть доска 50×50, клетки которой раскрашены в шахматном порядке, и много бумажных полосок, состоящих из трех клеток того же размера, что и клетки доски. Каким наименьшим количеством полосок Вася сможет накрыть все черные клетки доски (полоски могут перекрываться и вылезать за край доски)?*

Ответ: 626.

Решение. Развернем доску так, что левая нижняя клетка будет черной. Отметим черные клетки, разности координат которых кратны 4. Такие клетки располагаются на параллельных диагоналях (одна из которых идет из левого нижнего угла), отстоящих друг от друга на 4 клетки. Общее число клеток на этих диагоналях равно

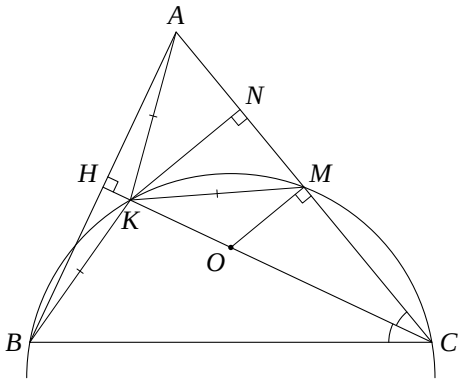
$$50+2\cdot 46+2\cdot 42+2\cdot 38+\ldots+2\cdot 2 = 50+4\cdot(1+3+5+\ldots+23) = 50+4\cdot 12^2 = 626.$$

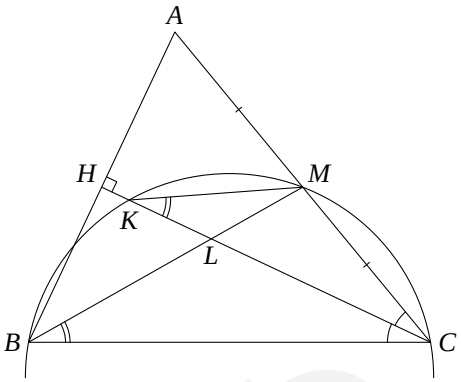
Поскольку каждая полоска покрывает не более одной отмеченной клетки, нам потребуется не менее 626 полосок.

Покажем, что покрыть 626 полосками все черные клетки можно. Заметим, что для покрытия всех черных клеток полосы 48×2 достаточно 24 полосок (см. рисунок). Доска 50×50 без углового квадрата 2×2 разрезается на 26 полос 48×2. Для черных клеток из полос нам понадобится $26 \cdot 24 = 624$ полоски, и еще две для черных клеток углового квадрата 2×2. $\square$

5. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC, CH — высота ABC. Описанная окружность треугольника BCM пересекает CH в точке K. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC, если известно, что $CK = 1$.*

Ответ: $\frac{2}{3}$.





Решение 1. Так как треугольник ABC равнобедренный, его высота CH является биссектрисой, то есть углы ACH и BCH одинаковы. Тогда равны хорды MK и BK, на которые эти углы опираются. Кроме того, точка K лежит на серединном перпендикуляре к AB, откуда $BK = AK$. Следовательно, треугольник AKM равнобедренный, поэтому его высота KN также является и медианой. Тогда

$$NM = \tfrac{1}{2}\,AM = \tfrac{1}{2}\,CM, \quad \text{то есть} \quad CM = \tfrac{2}{3}\,CN.$$

Заметим, что центр O описанной окружности треугольника ABC лежит на пересечении CH и серединного перпендикуляра к AC, откуда $MO \perp AC$. Поэтому треугольники COM и CKN подобны с коэффициентом $\frac{2}{3}$, и мы получаем $CO = \frac{2}{3}\,CK = \frac{2}{3}$. $\square$

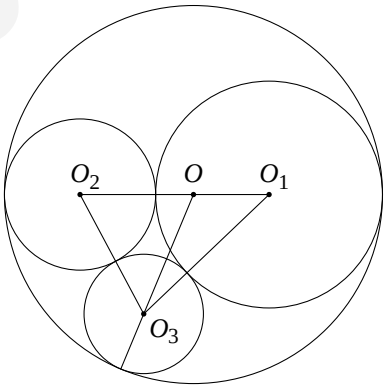
Решение 2. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, его высота CH является биссектрисой и медианой, в частности, $\angle ACH = \angle BCH$. Пусть L — точка пересечения BM и CH. Тогда L является точкой пересечения медиан треугольника ABC и, значит, она делит каждую медиану в отношении $2:1$. Таким образом, $CL = \frac{2}{3}\,CH$. Из вписанности четырехугольника $BKMC$ следует, что $\angle CKM = \angle CBM$. Тогда треугольники KMC и BLC подобны по двум углам. Учитывая равенство $CK = 1$, мы получаем

$$BC = \frac{BC}{CK} = \frac{CL}{CM} = \frac{\frac{2}{3}\,CH}{\frac{1}{2}\,AC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{CH}{AC} = \frac{4}{3} \cdot \sin\angle BAC.$$

По теореме синусов радиус описанной окружности треугольника ABC равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{2}{3}$. $\square$

6. *В сферическую оболочку радиуса 5 помещены три металлических шара, два из которых имеют радиусы 1 и 4. Найдите максимально возможный радиус третьего шара.*

Ответ: $\frac{20}{21}$.



Решение. Шары радиусов 1 и 4 касаются друг друга и сферы. Поэтому радиус третьего шара максимален, если этот шар касается двух других и сферы. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, r_1, r_2, r_3 —

их радиусы, O — центр охватывающей сферы (на рисунке показано сечение, проходящее через центры шаров). Заметим, что

$$OO_1 = 2r_2 + r_1 - (r_1 + r_2) = r_2, \quad OO_2 = r_1, \quad OO_3 = r_1 + r_2 - r_3.$$

Тогда полупериметры треугольников OO_2O_3 и OO_1O_3 равны $r_1 + r_2$, и по формуле Герона

$$S_{OO_2O_3} = \sqrt{(r_1 + r_2)r_2(r_1 - r_3)r_3}, \quad S_{OO_1O_3} = \sqrt{(r_1 + r_2)r_1(r_2 - r_3)r_3}.$$

Поэтому

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{S_{OO_2O_3}}{S_{OO_1O_3}} = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)r_2(r_1 - r_3)r_3}{(r_1 + r_2)r_1(r_2 - r_3)r_3}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3}.$$

Подставляя в это равенство $r_1 = 4$ и $r_2 = 1$, мы получим $r_3 = \frac{20}{21}$. $\square$

Ягубов.рф

Вариант 2

1. *Квадрат натурального числа x — шестизначное число, десятичная запись которого есть палиндром (то есть она одинаково читается слева направо и справа налево). Может ли x тоже оказаться палиндромом?*

Ответ: Нет.

Решение. Так как число x^2 имеет вид $\overline{abccba}$, суммы его цифр на четных и нечетных позициях одинаковы. Поэтому x^2 делится на 11, а значит, и x тоже. Допустим, что x является палиндромом. Так как число x трехзначное, его цифры имеют вид $a, 2a, a$. Заметим, что $a \leqslant 4$ (поскольку $2a \leqslant 9$) и $a \geqslant 3$ (иначе x будет пятизначным числом). Таким образом, x должен быть равен 363 или 484. Непосредственно проверяется, что квадраты этих чисел не будут палиндромами. $\square$

2. *В квалификационном турнире n шахматистов играют в один круг. Для попадания в основной турнир необходимо занять место не ниже m-го. При равенстве очков преимущество имеет спортсмен с бóльшим рейтингом (рейтинг у всех разный). Каково минимальное количество очков, гарантирующее шахматисту попадание в основной турнир независимо от результатов других игр и рейтинга? (За победу в шахматах дают 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0).*

Ответ: $\frac{2n-m-1}{2}$.

Решение. Пусть X — шахматист, занявший $(m+1)$-е место. Необходимо найти максимально возможную сумму его очков и добавить ней $\frac{1}{2}$. Сделаем два наблюдения.

1) *Можно считать, что спортсмены, занявшие места выше X, выиграли у тех, кто стоит ниже X.* В противном случае изменим соответствующие результаты, что не повлияет на место X.

2) *Можно считать, что X выиграл у всех, кто стоит ниже его.* Действительно, пусть X не выиграл у кого-то из стоящих ниже его. Заменим этот результат на выигрыш. Затем результаты X с вышестоящими соперниками ухудшим так, чтобы количество очков X (по возможности) не изменилось. Если в итоге число очков X все-таки увеличится, это будет означать, что X проиграл всем вышестоящим соперникам, и в силу 1) место X не изменится. Проводя такую операцию несколько раз, мы добьемся желаемого.

Вследствие 1) и 2) задача сводится к максимизации количества очков N, набранных аутсайдером турнира с $m+1$ участником. В этих матчах разыгрывается $C^2_{m+1} = \frac{m(m+1)}{2}$ очков. Аутсайдер набирает наименьшее количество очков, поэтому $N \leqslant \frac{m}{2}$. Равенство реализуется, если все участники, занявшие места не ниже $(m+1)$-го, сыграли друг с другом вничью. Ответом будет $n - m - 1 + N + \frac{1}{2} = \frac{2n-m-1}{2}$ очков. $\square$

3. *Найдите наименьшее значение выражения*

$$\left(\sqrt{x^2+3} - x + y\right)^2 + \left(\sqrt{y^2+3} - y + x\right)^2.$$

Ответ: 6.

Решение 1. Положим $f(t) = \sqrt{t^2+3} + t$, $A = \big(-x, f(-x)\big)$, $B = \big(f(-y), -y\big)$. Нам необходимо минимизировать AB^2. Поскольку $f(t) > t$ для любого t, точки A и B лежат по разные стороны от биссектрисы ℓ первого и третьего квадрантов. Тогда AB не меньше суммы расстояний от A и B до ℓ, а при $y = x$ реализуется равенство ввиду симметрии A и B относительно ℓ. Заметим, что расстояние от A до ℓ есть $\frac{f(-x)+x}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{x^2+3}{2}}$, а его минимальное значение равно $\sqrt{\frac{3}{2}}$, как и расстояния от B до ℓ. Поэтому минимум AB^2 равен $\left(2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 6$. $\square$

Решение 2. Заметим, что при $x = y = 0$ интересующее нас выражение равно 6. Докажем, что при произвольных x и y оно не меньше 6. Легко видеть, что

$$\left(\sqrt{x^2+3} - x + y\right)^2 + \left(\sqrt{y^2+3} + y - x\right)^2 = (x^2+y^2+6) + 2(x-y)\big(x - y + \sqrt{y^2+3} - \sqrt{x^2+3}\big).$$

Первая скобка, очевидно, не меньше шести. Поэтому достаточно проверить, что последнее слагаемое неотрицательно. Оно обращается в ноль при $x = y$, а при $x \neq y$ равно

$$2(x-y)^2\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{y^2+3}}{x-y}\right).$$

Нам нужно доказать неотрицательность этого выражения, то есть проверить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+3}}{x-y}\leqslant 1.$$

Преобразуем дробь в левой части, домножив числитель и знаменатель на сопряженное:

$$\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+3}}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x-y}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}\right)}=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}\leqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}\leqslant 1,$$

поскольку $\sqrt{x^2+3}\geqslant|x|$ и $\sqrt{y^2+3}\geqslant|y|$, откуда знаменатель не меньше $|x|+|y|$. $\square$

4. *У Пети есть доска 40×40, клетки которой раскрашены в шахматном порядке, и много бумажных полосок, состоящих из пяти клеток того же размера, что и клетки доски. Каким наименьшим количеством полосок Петя сможет накрыть все черные клетки доски (полоски могут перекрываться и вылезать за край доски)?*

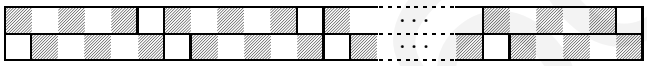
Ответ: 268.

Решение. Развернем доску так, что левая нижняя клетка будет черной. Отметим черные клетки, разности координат которых кратны 6. Такие клетки располагаются на параллельных диагоналях (одна из которых идет из левого нижнего угла), отстоящих друг от друга на 6 клеток. Общее число клеток на этих диагоналях равно

$$40+2\cdot 34+2\cdot 28+2\cdot 22+2\cdot 16+2\cdot 10+2\cdot 4=40+4\cdot(2+5+8+11+14+17)=268.$$

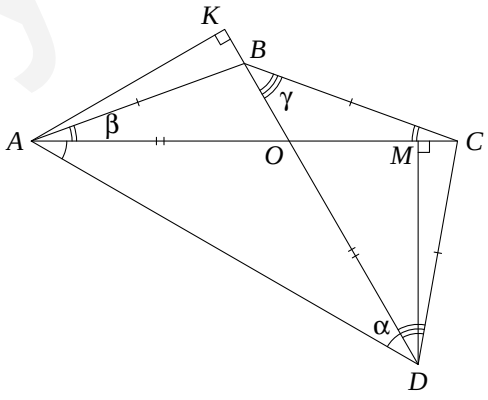
Поскольку каждая полоска покрывает не более одной отмеченной клетки, нам потребуется не менее 268 полосок.

Покажем, что покрыть 268 полосками все черные клетки можно. Заметим, что для покрытия всех черных клеток полосы 36×2 достаточно 12 полосок (см. рисунок). Доска 40×40 без углового квадрата 4×4 разрезается на 22 полосы 36×2. Для черных клеток из полос нам понадобится $22\cdot 12=264$ полоски, и еще четыре для черных клеток углового квадрата 4×4. $\square$



5. *Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB=BC=CD$, $AO=DO$ и $AC\neq BD$. Чему равно выражение $\angle BAD+\angle ADC$?*

Ответ: 120°.



Решение 1. Положим $\alpha=\angle ODA$, $\beta=\angle OAB$ и $\gamma=\angle OBC$. Проведем в треугольниках AOB и DOC высоты AK и DM (см. рисунок). Треугольники AOK и DOM равны, откуда $AK=DM$. Тогда треугольники KAB и MDC также равны, и $\angle KAB=\angle MDC$. Возможны две ситуации.

Ялубов.рф

1) $\angle KAO = \beta \pm \angle KAB = \gamma \pm \angle KAB$. Тогда $\beta = \gamma$, $OC = OB$ и $AC = BD$, что противоречит условию.
2) $\angle KAO = \beta \pm \angle KAB = \gamma \mp \angle KAB$. В этом случае

$$\beta + \gamma = 2\angle KAO = 2(90^\circ - \angle AOK) = 2(90^\circ - 2\alpha), \quad \text{откуда} \quad 4\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Кроме того, из треугольников BOC и AOD

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - \angle AOD = 2\alpha.$$

Исключая из этих равенств $\beta + \gamma$, мы получим $6\alpha = 180^\circ$, то есть $\alpha = 30^\circ$. Наконец,

$$\angle BAD + \angle ADC = 2\alpha + \beta + \gamma = 4\alpha = 120^\circ. \quad \square$$

Решение 2. Положим $\alpha = \angle ODA$, $\beta = \angle OAB$ и $\gamma = \angle OBC$. Тогда $\angle OAD = \alpha$, $\angle BCA = \beta$ и $\angle CBD = \gamma$. Из теоремы синусов для треугольников ABD и ACD следуют равенства

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\angle ABD} \quad \text{и} \quad \frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}.$$

Их левые части совпадают, поскольку $AB = CD$. Тогда $\sin\angle ABD = \sin\angle ACD$, что эквивалентно $\angle ABD = \angle ACD$ или $\angle ABD = 180^\circ - \angle ACD$. В первом случае треугольники ABD и ACD оказываются равными по двум углам и стороне, откуда $AD = BC$, а это противоречит условию. Стало быть, $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$. Таким образом,

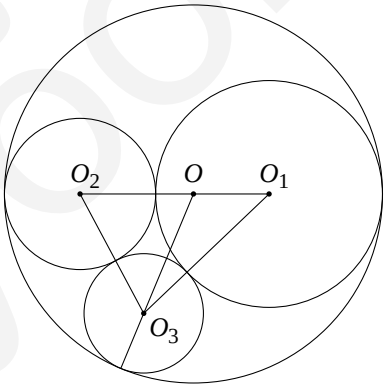
$$180^\circ - \alpha - (\alpha + \beta) + 180^\circ - \alpha - (\alpha + \gamma) = 180^\circ$$

и, значит, $4\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Кроме того, $\beta + \gamma = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - \angle AOD = 2\alpha$. Исключая из этих равенств $\beta + \gamma$, мы получим $6\alpha = 180^\circ$, то есть $\alpha = 30^\circ$. Следовательно,

$$\angle BAD + \angle ADC = (\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma) = 2\alpha + (\beta + \gamma) = 4\alpha = 120^\circ. \quad \square$$

6. *Три металлических шара, помещенные внутрь сферической оболочки, касаются оболочки и друг друга. Известно, что средний шар вдвое меньше бо́льшего. Найдите отношение радиусов бо́льшего и меньшего шаров.*

Ответ: $7 : 3$.



Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, r_1, r_2, r_3 — их радиусы ($r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$), O — центр охватывающей сферы (на рисунке показано сечение, проходящее через центры шаров). Заметим, что

$$OO_1 = 2r_2 + r_1 - (r_1 + r_2) = r_2, \quad OO_2 = r_1 \quad \text{и} \quad OO_3 = r_1 + r_2 - r_3.$$

Тогда полупериметры треугольников OO_2O_3 и OO_1O_3 равны $r_1 + r_2$, и по формуле Герона

$$S_{OO_2O_3} = \sqrt{(r_1 + r_2)r_2(r_1 - r_3)r_3} \quad \text{и} \quad S_{OO_1O_3} = \sqrt{(r_1 + r_2)r_1(r_2 - r_3)r_3}.$$

Поэтому

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{S_{OO_2O_3}}{S_{OO_1O_3}} = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)r_2(r_1 - r_3)r_3}{(r_1 + r_2)r_1(r_2 - r_3)r_3}} \iff \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3} \iff \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \frac{1 - \frac{r_3}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_3}{r_1}}.$$

Подставляя в это равенство $\frac{r_1}{r_2} = 2$, мы получим $\frac{r_3}{r_1} = \frac{3}{7}$. $\square$

Вариант 3

1. *Пусть верно равенство* $\overline{\text{ЧИСЛО}} = 3 \cdot \overline{\text{СОЧИ}}$, *где* $\overline{a_n \dots a_1}$ *означает десятичную запись* n*-значного числа с цифрами* $a_n, \dots, a_1$, *а разным буквам соответствуют разные цифры. Найдите* $\overline{\text{ЧИСЛО}}$ *и* $\overline{\text{СОЧИ}}$.

Ответ: $23\,769 = 3 \cdot 7923$.

Решение. Ясно, что цифра Ч равна 1 или 2. Значит, переноса из второго разряда в третий не будет, откуда цифры И, О, С имеют одинаковую четность. Поэтому перенос d из третьего разряда в четвертый четен. Рассмотрим два случая.

1) $d = 0$. Тогда цифра О может принимать значения $1, 2, 3$ (ноль отпадает, иначе С $= 0$). Соответствующие им значения цифры И равны $7, 4, 1$, а цифры С — $9, 8, 7$. Но число $3 \cdot$ О должно оканчиваться на С, чего не получается ни в одном из случаев.

2) $d = 2$. В этом случае возможные значения для О — $7, 8, 9$, для И — $9, 6, 3$, для С — $1, 4, 7$ соответственно. Число $3\text{С} + 2$ оканчивается на И, откуда С $= 7$, И $= 3$, О $= 9$. Так как $3\text{С} + 2 = 23$, мы получаем Ч $= 2$ и Л $= 6$. □

2. *В однокруговом шахматном турнире участвовало* n *мальчиков и 10 девочек. По окончании турнира выяснилось, что каждый участник (и участница) турнира набрал ровно половину своих очков в партиях с девочками. Сколько мальчиков участвовало в турнире? (За победу в шахматах дают 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0).*

Ответ: 6 или 15.

Решение. Пусть мальчиков было n человек. Посчитаем двумя способами, сколько всего было набрано очков в турнире. С одной стороны, в нем было сыграно $\frac{1}{2}(n+10)(n+9)$ партий и, значит, разыграно $\frac{1}{2}(n+10)(n+9)$ очков.

Теперь найдем эту сумму другим способом. Девочки между собой сыграли $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ партий. В них было разыграно 45 очков. Поскольку каждая девочка в играх с девочками набрала ровно половину своих очков, все девочки вместе набрали ровно половину своих очков в играх с девочками. Следовательно, в общей сложности они набрали 90 очков. Поскольку каждый мальчик в играх с девочками набрал ровно половину своих очков, вторую половину он набрал в играх с мальчиками. Поэтому и все мальчики вместе набрали ровно половину своих очков в играх с мальчиками. Мальчики между собой сыграли $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий и в партиях друг с другом набрали в сумме $\frac{1}{2}n(n-1)$ очков. Следовательно, в общей сложности они набрали $n(n-1)$ очков. Значит, всего было разыграно $n(n-1) + 90$ очков.

Таким образом, мы получаем равенство

$$\frac{(n+10)(n+9)}{2} = n(n-1) + 90,$$

которое после преобразований сводится к квадратному уравнению $n^2 - 21n + 90 = 0$. Это уравнение имеет решения $n = 6$ и $n = 15$. Покажем, что оба решения подходят.

Действительно, пусть $n = 6$. Занумеруем мальчиков числами от 1 до 6, а девочек — числами от 1 до 10. Пусть все мальчики сыграли между собой вничью и все девочки сыграли между собой вничью. Кроме того, пусть вничью завершатся все партии между мальчиками и девочками с номерами одной четности, а во всех остальных партиях выиграют девочки. Несложно проверить, что такой пример удовлетворяет условию.

Пусть теперь $n = 15$. Занумеруем мальчиков числами от 1 до 15, а девочек — числами от 1 до 10. Пусть все мальчики сыграли между собой вничью и все девочки сыграли между собой вничью. Кроме того, пусть i-я девочка выиграет у j-го мальчика, если $i - j$ делится на 5 или дает остаток 1 при делении на 5, а все остальные партии завершатся вничью. Несложно проверить, что такой пример также удовлетворяет условию. □

3. *Найдите наименьшее значение выражения*

$$\left(\sqrt{4 + x^8} - 2y^2 + 1\right)^2 + \left(\sqrt{4 + y^8} - 2x^2 + 1\right)^2.$$

Ответ: 2.

Решение. Положим $f(t)=\sqrt{4+t^8}$, $g(t)=2t^2-1$, $A=\big(f(x),g(x)\big)$, $B=\big(g(y),f(y)\big)$. Нам необходимо минимизировать AB^2. В силу неравенства Коши о средних

$$f(t)-g(t)=\sqrt{4+t^8}-2t^2+1\geqslant\sqrt{2\sqrt{4t^8}}-2t^2+1=1,$$

причем в случае $t^4=2$ реализуется равенство. Отсюда вытекает два следствия.

1) Точки A и B лежат по разные стороны от биссектрисы ℓ первого и третьего квадрантов. Тогда AB не меньше суммы расстояний от A и B до ℓ, а при $y=x$ реализуется равенство ввиду симметрии A и B относительно ℓ.

2) Поскольку расстояние от A до ℓ есть $\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{2}}$, его минимальное значение равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$, как и расстояния от B до ℓ. Поэтому минимум AB^2 равен $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2=2$. □

4. *В таблице 50×50 расставлены целые числа так, что в каждой строке и в каждом столбце числа идут в строго возрастающем порядке. Известно, что в любой горизонтальной или вертикальной полоске 1×3 сумма чисел четна. Какова наименьшая разность чисел, стоящих в правом нижнем углу и левом верхнем углу?*

Ответ: 130.

Решение. Заметим, что в таблице числа k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ не могут идти подряд. Действительно, сумма первых трех из них равна $3k+3$, а последних трех — $3k+6$. Эти суммы разной четности, поэтому одна из них нечетна, чего по условию быть не может. Следовательно, если числа a, b, c, d идут в строке или столбце подряд, то $d-a\geqslant4$.

Пусть в левом верхнем углу стоит 1. Тогда второе число первой строки не меньше 2, а 50-е отличается от него по крайней мере на $4\cdot16=64$ и, значит, оно не меньше 66 (и совпадает с первым числом последнего столбца). Поэтому второе число последнего столбца не меньше 67, а 50-е — по крайней мере $67+64=131$. Таким образом, интересующая нас разность не меньше 130.

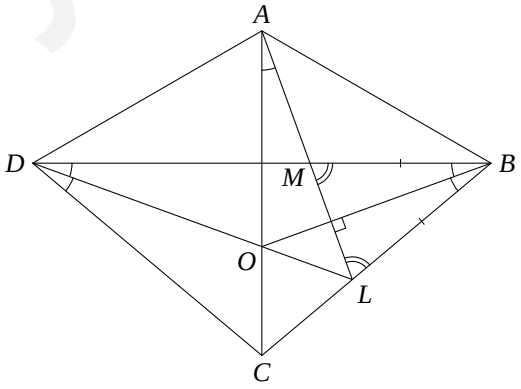
Покажем, что разность 130 возможна. Расставим в шаблоне числа следующим образом:

1	2	3	5	6	7	9	10	11	⋯

В первой строке таблицы разместим первые 50 чисел шаблона, во второй — числа со второго по 51-е, в третьей — с третьего по 52-е, и так далее. Заметим, что каждая следующая строка таблицы — сдвиг предыдущей влево на одну позицию. Поэтому указанная таблица удовлетворяет условию задачи, а ответом является разность между 99-м и первым числами шаблона, которая равна $2+\frac{4}{3}\cdot(99-3)=130$. □

5. *Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB=AD$ и $CB=CD$. Биссектриса угла BDC пересекает сторону BC в точке L, а отрезок AL пересекает диагональ BD в точке M. Оказалось, что $BL=BM$. Чему равно выражение $2\angle BAD+3\angle BCD$?*

Ответ: 540°.



Решение. Пусть $\alpha=\angle BAD$, $\beta=\angle BCD$, O — точка пересечения AC и DL. Треугольники ABC и ADC равны, откуда $\angle BCA=\angle DCA$. Тогда CA — биссектриса треугольника BCD и, значит, O — точка

пересечения биссектрис треугольника BCD. Поэтому BO — биссектриса угла DBC, и из равнобедренности треугольника BCD вытекает равенство $\angle DBO = \angle OBC = \angle CDO = \angle BDO$. Так как треугольник LBM равнобедренный, мы получаем $BO \perp AL$, откуда

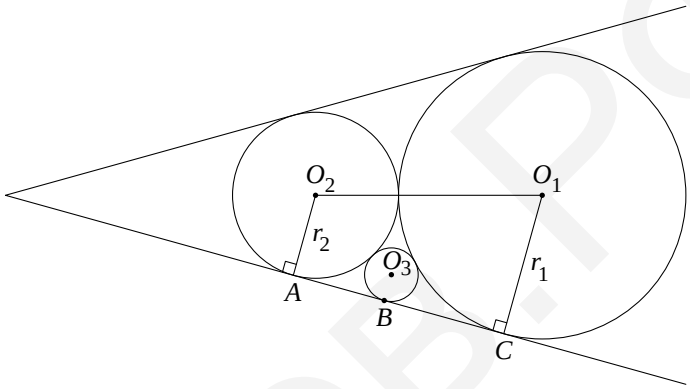
$$\angle CAL = 90^\circ - \angle AOB = \angle OBD = \angle CDL.$$

Поэтому четырехугольник $ALCD$ — вписанный. Заметим, что $\angle ADB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle BDL = \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$. Тогда

$$\angle ACL = \angle ADL = \angle ADB + \angle BDL \iff \tfrac{\beta}{2} = 135^\circ - \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{4} \iff \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{3\beta}{4} = 135^\circ \iff 2\alpha + 3\beta = 540^\circ. \quad \square$$

6. *Головка швейцарского сыра сферической формы имеет дырки в виде не налегающих друг на друга шаров радиусов* $1; 2{,}7; \ldots; 2{,}7^n$ *мм. Найдите минимально возможный радиус головки.*

Ответ: $3{,}7 \cdot 2{,}7^{n-1}$ мм.



Решение. Пусть шары с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 касаются друг друга и конуса (на рисунке показано сечение, проходящее через центры шаров). Заметим, что

$$AC^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \iff AC = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Аналогично $AB = 2\sqrt{r_2 r_3}$ и $BC = 2\sqrt{r_1 r_3}$. Так как точки A, B, C лежат на одной прямой, мы получаем

$$AC = AB + BC \iff 2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{r_1 r_3} \iff \frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

В случае $r_1 = 2{,}7^{k+2}$ и $r_2 = 2{,}7^{k+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2{,}7}\right)^{k+2}}\left(\sqrt{2{,}7} + 1\right) < \frac{2{,}7}{\left(\sqrt{2{,}7}\right)^{k+2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2{,}7}\right)^{k}}.$$

Пусть шары радиусов r_1 и r_2 содержатся в головке. Тогда шар радиуса $2{,}7^k$ можно поместить между этими шарами внутри конуса и, тем более, внутри головки ввиду ее выпуклости. По индукции получается, что если два самых больших шара лежат внутри головки, то туда можно поместить и все остальные. Поэтому минимальный радиус головки надо выбрать равным $2{,}7^n + 2{,}7^{n-1}$. $\square$

ЯГУОВ.РФ

Вариант 4

1. *Пусть верно равенство* $\overline{\text{ЧИСЛО}} = 55 \cdot \overline{\text{СОЧИ}}$, *где* $\overline{a_n \ldots a_1}$ *означает десятичную запись* n*-значного числа с цифрами* $a_n, \ldots, a_1$, *а разным буквам соответствуют разные цифры. Найдите* $\overline{\text{ЧИСЛО}}$ *и* $\overline{\text{СОЧИ}}$.

   Ответ: $58\,190 = 55 \cdot 1058$.

   Решение. Ясно, что $\text{С} = 1$, иначе число $55 \cdot \overline{\text{СОЧИ}}$ окажется шестизначным. Кроме того, остатки от деления на 9 чисел $\text{С} + \text{О} + \text{Ч} + \text{И}$ и $\text{Ч} + \text{И} + \text{С} + \text{Л} + \text{О}$ одинаковы, откуда Л кратно 9. Рассмотрим два случая.

   1) $\text{Л} = 0$. Так как перенос из младшего разряда меньше 5, он будет равен нулю. Но в этом случае цифра И равна 0 или 1, то есть она совпадает с Л или С, что невозможно.

   2) $\text{Л} = 9$. Тогда цифра Ч нечетна, а перенос из младшего разряда равен 4, откуда цифра И равна 8, а цифра О равна 0. Так как цифра Ч не меньше 5, допустимые варианты для нее — 5 и 7. Непосредственно проверяется, что подходит только $\text{Ч} = 5$. $\square$

2. *В двухкруговом турнире по бадминтону участвовало 25 школьников. По окончании турнира выяснилось, что каждый мальчик набрал ровно половину своих очков в партиях с девочками, а девочки в сумме набрали 360 очков. Сколько девочек участвовало в турнире? (За победу в бадминтоне дается два очка, за поражение — ноль, а ничьих не бывает).*

   Ответ: 10.

   Решение. Пусть мальчиков было k. Посчитаем двумя способами, сколько всего было набрано очков в турнире. С одной стороны, в нем было сыграно $25 \cdot 24 = 600$ партий и, значит, разыграно $1\,200$ очков.

   Поскольку каждый мальчик в играх с девочками набрал ровно половину своих очков, то вторую половину он набрал в играх с мальчиками. Поэтому и все мальчики вместе набрали ровно половину своих очков в играх с мальчиками. Между собой они сыграли $k(k-1)$ партий и в партиях друг с другом набрали в сумме $2k(k-1)$ очков. Следовательно, в общей сложности они набрали $4k(k-1)$ очков. Значит все участники вместе набрали $4n(n-1) + 360$ очков. Таким образом, мы получаем равенство

$$1\,200 = 4n(n-1) + 360,$$

   которое после преобразований сводится к квадратному уравнению $n^2 - n - 210 = 0$. Это уравнение имеет решения $n = 15$ и $n = -14$. Второе решение, очевидно, не подходит. Следовательно, мальчиков было 15, а девочек — 10. $\square$

3. *Найдите наименьшее значение выражения*

$$\left(\sqrt{1+4x^8} - 2y^2 + 3\right)^2 + \left(\sqrt{1+4y^8} - 2x^2 + 3\right)^2.$$

   Ответ: 18.

   Решение. Положим $f(t) = \sqrt{1+4t^8}$, $g(t) = 2t^2 - 3$, $A = \big(f(x), g(x)\big)$, $B = \big(g(y), f(y)\big)$. Нам необходимо минимизировать AB^2. В силу неравенства Коши о средних

$$f(t) - g(t) = \sqrt{1+4t^8} - 2t^2 + 3 \geqslant \sqrt{2\sqrt{4t^8}} - 2t^2 + 3 = 3,$$

   причем в случае $t^4 = \frac{1}{2}$ реализуется равенство. Отсюда вытекает два следствия.

   1) Точки A и B лежат по разные стороны от биссектрисы ℓ первого и третьего квадрантов. Тогда AB не меньше суммы расстояний от A и B до ℓ, а при $y = x$ реализуется равенство ввиду симметрии A и B относительно ℓ.

   2) Поскольку расстояние от A до ℓ есть $\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{2}}$, его минимальное значение равно $\frac{3}{\sqrt{2}}$, как и расстояния от B до ℓ. Поэтому минимум AB^2 равен $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 = 18$. $\square$

4. *В таблице* 60×60 *расставлены целые числа так, что в каждой строке и в каждом столбце числа идут в строго возрастающем порядке. Известно, что в любой горизонтальной или вертикальной*

полоске 1×3 *сумма чисел нечетна. Какова наименьшая разность чисел, стоящих в правом нижнем углу и левом верхнем углу?*

Ответ: 157.

Решение. Заметим, что в таблице числа k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ не могут идти подряд. Действительно, сумма первых трех из них равна $3k+3$, а последних трех — $3k+6$. Эти суммы разной четности, поэтому одна из них четна, чего по условию быть не может. Следовательно, если числа a, b, c, d идут в строке или столбце подряд, то $d - a \geqslant 4$.

Пусть в левом верхнем углу стоит 0. Заметим, что третье число во второй строке не меньше 4. Действительно, оно не меньше 3, поскольку первое число второй строки как минимум 1. Если бы оно равнялось 3, вторая строка начиналась бы цифрами $1, 2, 3$, что невозможно ввиду четности их суммы. Тогда последнее число второй строки (и оно же — второе число последнего столбца) не меньше, чем $4 + \frac{4}{3} \cdot 57 = 80$. Отсюда третье число последнего столбца не меньше 81, а последнее — по крайней мере $81 + 4 \cdot 19 = 157$. Стало быть, интересующая нас разность не меньше 157.

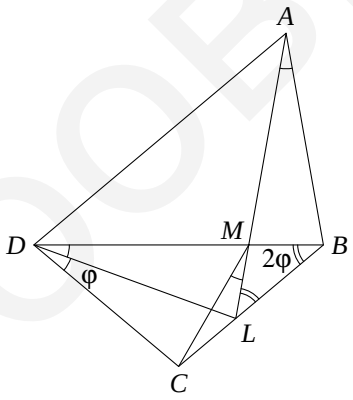
Покажем, что разность 157 возможна. Расставим в шаблоне числа следующем образом:

0	1	2	4	5	6	8	9	10	$\cdots$

В первой строке таблицы разместим первые 60 чисел шаблона, во второй — числа со второго по 61-е, в третьей — с третьего по 62-е, и так далее. Заметим, что каждая следующая строка таблицы — сдвиг предыдущей влево на одну позицию. Поэтому указанная таблица удовлетворяет условию задачи, а ответом является разность между 119-м и первым числами шаблона, которая равна $1 + \frac{4}{3} \cdot (119 - 2) = 157$. □

5. *В выпуклом четырехугольнике* $ABCD$ *стороны* CB *и* CD *равны. Биссектриса угла* BDC *пересекает сторону* BC *в точке* L*, а отрезок* AL *пересекает диагональ* BD *в точке* M*. Оказалось, что* $BM = ML$ *и* $\angle CML = \angle BAL$*. Чему равно выражение* $4\angle BAD + 3\angle BCD$*?*

Ответ: 540°.



Решение. Положим $\alpha = \angle BAD$, $\beta = \angle BCD$ и $\varphi = \angle LDC$. Тогда $\angle MLB = \angle CBD = \angle CDB = 2\varphi$ и $\beta = \angle BCD = 180^\circ - 4\varphi$. Заметим, что

$$\angle DCL + \angle DML = (180^\circ - 4\varphi) + 4\varphi = 180^\circ,$$

то есть четырехугольник $CLMD$ вписанный. Отсюда, с учетом условия задачи,

$$\angle BDL = \angle LDC = \angle CML = \angle BAL,$$

поэтому четырехугольник $ABLD$ тоже вписанный. Тогда

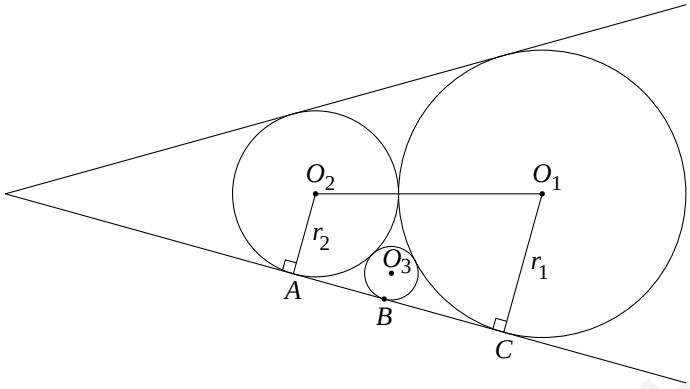
$$\angle DBL = \angle DAL \Longleftrightarrow 2\varphi = \alpha - \angle BAL = \alpha - \varphi \Longleftrightarrow \alpha = 3\varphi,$$

и мы получаем $4\alpha + 3\beta = 12\varphi + 3\,(180^\circ - 4\varphi) = 540^\circ$. □

6. *Головка швейцарского сыра сферической формы имеет дырки в виде не налегающих друг на друга шаров радиусов* $2; 0{,}6; \ldots; 2 \cdot 0{,}3^n$ *см. Найдите минимально возможный объем головки.*

Ягубов.ru

Ответ: $\frac{70{,}304\pi}{3}$ см^3.



Решение. Пусть шары с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 касаются друг друга и конуса (на рисунке показано сечение, проходящее через центры шаров). Заметим, что

$$AC^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \iff AC = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Аналогично $AB = 2\sqrt{r_2 r_3}$ и $BC = 2\sqrt{r_1 r_3}$. Так как точки A, B, C лежат на одной прямой, мы получаем

$$AC = AB + BC \iff 2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{r_1 r_3} \iff \frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

В случае $r_1 = 2 \cdot 0{,}3^k$ и $r_2 = 2 \cdot 0{,}3^{k+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{0{,}3}\right)^{k+2}} \left(0{,}3 + \sqrt{0{,}3}\right) < \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0{,}3^{k+2}}}.$$

Пусть шары радиусов r_1 и r_2 содержатся в головке. Тогда шар радиуса $2 \cdot 0{,}3^{k+2}$ можно поместить между этими шарами внутри конуса и, тем более, внутри головки ввиду ее выпуклости. По индукции получается, что если два самых больших шара лежат внутри головки, то туда можно поместить и все остальные. Поэтому минимально возможный радиус головки равен $2 + 0{,}6 = 2{,}6$ см, а ее объем будет $\frac{4\pi}{3} \cdot 2{,}6^3 = \frac{70{,}304\pi}{3}$ см^3. $\square$

Ягубов.рф

Вариант 5

1. *Найдите все семизначные квадраты натуральных чисел, содержащие в десятичной записи только цифры 0 и 1.*

Ответ: 1 000 000.

Решение 1. Пусть искомое число равно n^2. Так как

$$1000^2 = 1\,000\,000 \leqslant n^2 \leqslant 1\,111\,111 < 1\,210\,000 = 1100^2,$$

число n лежит между 1000 и 1099. Поэтому десятичная запись n имеет вид $\overline{10a0}$, $\overline{10a1}$ или $\overline{10a9}$, где $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Рассмотрим эти случаи.

1) Пусть $\overline{10a0}$. Тогда a может принимать значения 0, 1 или 9. Первый случай подходит, а два других — нет, поскольку $1010^2 = 1\,020\,100$ и $1090^2 = 1\,188\,100$.

2) Если $\overline{10a1}$, то $n^2 = (1001 + 10a)^2 = 1\,002\,001 + 20\,020a + 100a^2$. Вторая справа цифра (количество десятков) есть остаток от деления $2a$ на 10, который четен. Поэтому эта цифра равна 0, откуда $a = 0$ или $a = 5$. Оба случая не подходят, поскольку $1001^2 = 1\,002\,001$, а $1051^2 = 1\,104\,601$.

3) Если $\overline{10a9}$, то $n^2 = (1009 + 10a)^2 = 1\,018\,081 + 20\,180a + 100a^2$. Вторая справа цифра (количество десятков) есть остаток от деления $8a + 8$ на 10, который четен. Поэтому эта цифра равна 0, откуда $a + 1$ кратно 5, то есть a равно 4 или 9. Эти случаи также не подходят, поскольку $1049^2 = 1\,100\,401$, а $1099^2 = 1\,207\,801$. $\square$

Решение 2. Искомое число имеет вид $10^{2l} \cdot n^2$, где l — неотрицательное целое число, а n^2 начинается и заканчивается на 1. Ясно, что подходят $l = 3$ и $n = 1$. Покажем, что случай $n > 1$ невозможен. Так как $n^2 - 1$ кратно 10, числа $n \pm 1$ четны и ровно одно из них делится на 5. Поэтому

$$n = 10 \cdot 5^m k \pm 1 \quad \text{и} \quad n^2 = 100 \cdot 5^{2m} k^2 \pm 20 \cdot 5^m k + 1,$$

где m — неотрицательное целое число, k — натуральное число, не кратное 5. Рассмотрим несколько случаев.

1) $m = 0$. Тогда вторая цифра n^2 равна остатку от деления $2k$ на 10, который четен. Поэтому $2k$ кратно 10, то есть k делится на 5, что невозможно.

2) $m = 1$. Тогда $n^2 = 100\,(25k^2 \pm k) + 1$, и третья цифра n^2 равна остатку от деления $25k^2 \pm k$ на 10, который четен при любом k. Поэтому $25k^2 \pm k$ кратно 10, откуда k делится на 5, что невозможно.

3) $m \geqslant 2$. Тогда $n^2 = 500k\,(125k \pm 1) + 1$, где k — натуральное число. Заметим, что число $10^{2l} \cdot n^2$ лежит в интервале от 1 000 000 до 1 200 000, поскольку оно семизначное и содержит только цифры 0 и 1. Отсюда

$$1\,200\,000 > 10^{2l} \cdot n^2 \geqslant 10^{2l}\,(500 \cdot 124 + 1) = 10^{2l} \cdot 62\,001 > 10^{2l} \cdot 12\,000,$$

то есть $10^{2l} < 100$ и $l = 0$. Поэтому число n^2 должно лежать между 1 000 000 и 1 200 000. Это возможно лишь в случае, когда $k = 4$, а в выражении для n^2 — плюс. Мы получим $n^2 = 1\,002\,001$, что не удовлетворяет условию. $\square$

Решение 3. Искомое число имеет вид $10^{2m}\,n^2$, где n — нечетное натуральное число, а все цифры n^2 равны 0 или 1. Заметим следующее.

1) *n^2 оканчивается на* 001. Действительно, если $n = 2k - 1$, то $n^2 = 4k(k-1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$. С другой стороны, пусть n^2 оканчивается на $\overline{ab1}$. Тогда $n^2 \equiv \overline{ab1} \equiv 4a + 2b + 1 \pmod 8$. Так как a и b принимают значения 0 или 1, это возможно лишь в случае $a = b = 0$.

2) *Число единиц в десятичной записи n^2 равно* 1 *или* 4. Действительно, пусть r — остаток от деления n^2 на 9. Количество единиц числа n^2 равно сумме его цифр и, поскольку она не больше 7, остатку от деления n^2 на 9, а значит, и остатку от деления r^2 на 9. Остатки при делении на 9 квадратов чисел от 0 до 8 могут равняться только $0, 1, 4, 7$. Но хотя бы одна единица в записи n^2 присутствует, а в силу 1) их количество не превосходит 5.

3) *Число m равно* 0 *или* 3. Действительно, если $m = 3$, то $n = 1$, что удовлетворяет условию задачи. В противном случае число n^2 содержит по крайней мере две единицы, и силу 2) их количество равно 4. Но из 1) вытекает, что n^2 содержит также хотя бы два нуля. Значит, в десятичной записи n^2 не менее 6 цифр, что возможно лишь при $m = 0$.

Из доказанного следует, что искомое число либо равно 1 000 000, либо нечетно и содержит 4 единицы. Во втором случае в силу 1) для n^2 есть только три возможности: 1 101 001, 1 011 001 и 1 110 001. Первое число не является точным квадратом, поскольку оно делится на 11, но не делится на 121. Два других числа дают при делении на 11 остаток 2. Они также не подходят, поскольку остатки квадратов натуральных чисел от деления на 11 лежат в множестве $\{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$. □

2. *В однокруговом шахматном турнире участвовало* 16 *игроков. Назовем шахматиста успешно выступившим, если он набрал более 80% от максимально возможного количества очков. Какое наибольшее число успешно выступивших участников могло быть в турнире? (За победу в шахматах дают 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0).*

Ответ: 6.

Решение. Пусть в турнире было k успешно выступивших участников. Тогда каждый из них набрал более $\frac{4}{5} \cdot 15 = 12$ очков, то есть не менее $\frac{25}{2}$ очков, а все они вместе набрали как минимум $\frac{25}{2}k$ очков. Оставшиеся $16-k$ шахматистов сыграли между собой $\frac{1}{2}(16-k)(15-k)$ партий и, значит, вместе набрали не менее $\frac{1}{2}(16-k)(15-k)$ очков. Таким образом, вместе все 16 участников турнира набрали по крайней мере $\frac{25k}{2} + \frac{1}{2}(16-k)(15-k)$ очков. Но это выражение не может быть больше, чем общее количество очков, разыгрываемых в турнире. Следовательно,

$$\frac{25k}{2} + \frac{(16-k)(15-k)}{2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120.$$

После преобразований получаем квадратное неравенство $k^2 - 6k \leqslant 0$, откуда $k \leqslant 6$, то есть было не более шести успешно выступивших участников.

Покажем, что шесть успешно выступивших шахматистов могло быть. Если 6 участников сыграли между собой все партии вничью, а у всех остальных выиграли, то у каждого из них окажется по $12\frac{1}{2}$ очков. Тогда все они и будут успешно выступившими. □

3. *Найдите наименьшее значение при положительных* a, b, c *выражения*

$$f(a,b,c) = \sqrt{6a + \tfrac{3}{b}} + \sqrt{12b + \tfrac{2}{c}} + \sqrt{18c + \tfrac{6}{a}}.$$

Ответ: $6\sqrt{3}$ при $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$.

Решение. Положим $x = a$, $y = 2b$, $z = 3c$. Используя неравенства Коши, мы получим

$$f(a,b,c) = \sqrt{6}\left(\sqrt{x + \tfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \tfrac{1}{z}} + \sqrt{z + \tfrac{1}{x}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{12}\left(\sqrt[4]{\tfrac{x}{y}} + \sqrt[4]{\tfrac{y}{z}} + \sqrt[4]{\tfrac{z}{x}}\right) \geqslant 3\sqrt{12}\sqrt[12]{\tfrac{x}{y} \cdot \tfrac{y}{z} \cdot \tfrac{z}{x}} = 6\sqrt{3}.$$

Все неравенства обращаются в равенства при $x = y = z = 1$. □

4. *В левом нижнем углу доски* 80×80 *стоит конь, который ходит по шахматным правилам. За какое наименьшее количество ходов он сможет переместиться в правый верхний угол доски?*

Ответ: 54.

				4
		3		
	1			
			2	
0				

Решение. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Заметим, что за каждый ход сумма координат клеток увеличивается не более чем на 3. Чтобы из левого нижнего угла доски переместиться в правый верхний угол, нужно увеличить эту сумму на $2 \cdot 79 = 158$. Следовательно, для этого потребуется не менее $\frac{158}{3} = 52\frac{2}{3}$ ходов. Заметим, что после каждого хода цвет клетки, на которой стоит конь, меняется на противоположный. Так как правый верхний угол доски имеет тот же цвет, что и левый нижний, нам

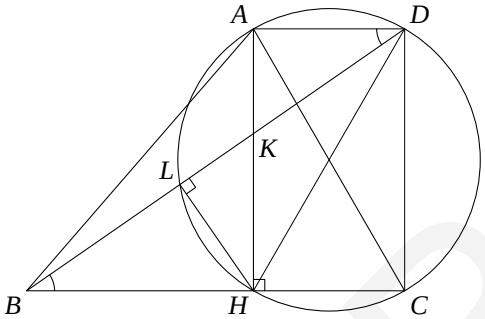
Лубов.рф

потребуется четное число ходов. Минимальное четное число, не меньшее $52\frac{2}{3}$, равно 54. Стало быть, нужно сделать не меньше 54 ходов.

Покажем, что за 54 хода проделать искомый путь можно. На рисунке показано, как за 4 хода попасть из левого нижнего в правый верхний угол доски 5×5. Далее нужно сделать 25 "горизонтальных" (то есть два шага вправо и один вверх) ходов и 25 "вертикальных" (два шага вверх и один вправо) ходов.

5. *Точка H — основание высоты, опущенной из вершины A остроугольного треугольника ABC. На отрезке AH взята такая точка K, что $\frac{AK}{CH} = \frac{KH}{HB}$. Точка L является основанием перпендикуляра, опущенного из точки H на BK. Найдите угол ALC.*

Ответ: 90°.



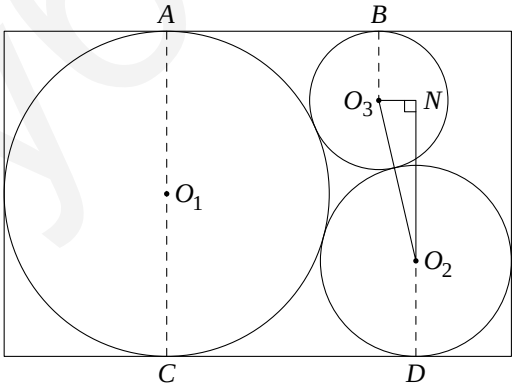
Решение. Достроим треугольник AHC до прямоугольника $AHCD$ (см. рисунок). В силу условия

$$\operatorname{tg}\angle ADK = \frac{AK}{AD} = \frac{AK}{CH} = \frac{KH}{HB} = \operatorname{tg}\angle KBH.$$

Тогда $\angle ADK = \angle KBH$, и точка K лежит на отрезке BD. Опишем вокруг прямоугольника $ABCD$ окружность. Угол DLH прямой и опирается на диаметр DH, поэтому точка L лежит на окружности. Угол ALC опирается на диаметр AC этой окружности, поэтому он также равен 90°. □

6. *Дана цилиндрическая коробка с плоской крышкой. Площадь боковой поверхности коробки равна 98π. Возможно ли разместить в такой коробке металлические шары радиусов 4, $\frac{9}{4}$ и 1?*

Ответ: Да.



Решение. Пусть шары с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 помещены в цилиндр так, чтобы его осевое сечение выглядело как на рисунке. Достроим отрезок O_2O_3 до прямоугольного треугольника O_2O_3N со сторонами, параллельными сторонам прямоугольника в сечении. По теореме Пифагора

$$CD^2 = O_1O_2^2 - (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2,$$

то есть $CD = 2\sqrt{r_1r_2}$. Аналогично получаем $AB = 2\sqrt{r_1r_3}$. Тогда

$$O_2O_3 = r_2 + r_3, \quad O_2N = 2r_1 - (r_2 + r_3), \quad O_3N = CD - AB = 2\sqrt{r_1r_2} - 2\sqrt{r_1r_3} = 2\sqrt{r_1}\big(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}\big).$$

По теореме Пифагора ${O_2O_3}^2 = O_2N^2 + O_3N^2$, откуда

$$(r_2+r_3)^2 = 4r_1^2 + (r_2+r_3)^2 - 4r_1(r_2+r_3) + 4r_1\big(r_2+r_3-2\sqrt{r_2r_3}\big) \iff$$

$$\iff 0 = 4r_1\big(r_1-2\sqrt{r_2r_3}\big) \iff r_1 = 2\sqrt{r_2r_3} \iff r_3 = \frac{r_1^2}{4r_2}.$$

Если $r_1 = 4$ и $r_2 = \frac{9}{4}$, то $r_3 = \frac{16}{9} > 1$, поэтому шары из условия в такой цилиндр поместятся. Заметим, что этот цилиндр имеет высоту 8 и радиус $\frac{1}{2}\big(r_1+r_2+2\sqrt{r_1r_2}\big) = \frac{49}{8}$. Значит, площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi \cdot \frac{49}{8} \cdot 8 = 98\pi$. $\square$

Ягубов.рф

Вариант 6

1. *Найдите все семизначные квадраты натуральных чисел, содержащие в десятичной записи только цифры 0 и 4.*

Ответ: 4 000 000.

Решение 1. Искомое число имеет вид $4n^2$, где n — натуральное число, причем все цифры n^2 равны 0 или 1. Заметим, что $4\,000\,000 \leqslant 4n^2 \leqslant 4\,444\,444$, откуда

$$1000^2 = 1\,000\,000 \leqslant n^2 \leqslant 1\,111\,111 < 1\,210\,000 = 1100^2.$$

Значит, число n лежит между 1000 и 1099. Поэтому десятичная запись n имеет вид $\overline{10a0}$, $\overline{10a1}$ или $\overline{10a9}$, где $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Рассмотрим эти случаи.

1) Пусть $\overline{10a0}$. Тогда a может принимать значения 0, 1 или 9. Первый случай подходит, а два других — нет, поскольку $4 \cdot 1010^2 = 4\,080\,400$ и $4 \cdot 1090^2 = 4\,752\,400$.

2) Если $\overline{10a1}$, то $n^2 = (1001 + 10a)^2 = 1\,002\,001 + 20\,020a + 100a^2$. Вторая справа цифра (количество десятков) есть остаток от деления $2a$ на 10, который четен. Поэтому эта цифра равна 0, откуда $a = 0$ или $a = 5$. Оба случая не подходят, поскольку $4 \cdot 1001^2 = 4\,008\,004$, а $4 \cdot 1051^2 = 4\,418\,404$.

3) Если $\overline{10a9}$, то $n^2 = (1009 + 10a)^2 = 1\,018\,081 + 20\,180a + 100a^2$. Вторая справа цифра (количество десятков) есть остаток от деления $8a + 8$ на 10, который четен. Поэтому эта цифра равна 0, откуда $a + 1$ кратно 5, то есть a равно 4 или 9. Эти случаи также не подходят, поскольку $4 \cdot 1049^2 = 4\,401\,604$, а $4 \cdot 1099^2 = 4\,831\,204$. □

Решение 2. Искомое число имеет вид $4 \cdot 10^{2l} \cdot n^2$, где l — неотрицательное целое число, а n^2 содержит только цифры 0 и 1, причем начинается и заканчивается на 1. Ясно, что подходят $l = 3$ и $n = 1$. Покажем, что случай $n > 1$ невозможен. Так как $n^2 - 1$ кратно 10, числа $n \pm 1$ четны и ровно одно из них делится на 5. Поэтому

$$n = 10 \cdot 5^m k \pm 1 \quad \text{и} \quad n^2 = 100 \cdot 5^{2m} k^2 \pm 20 \cdot 5^m k + 1,$$

где m — неотрицательное целое число, k — натуральное число, не кратное 5. Рассмотрим несколько случаев.

1) $m = 0$. Тогда вторая цифра n^2 равна остатку от деления $2k$ на 10, который четен. Поэтому $2k$ кратно 10, то есть k делится на 5, что невозможно.

2) $m = 1$. Тогда $n^2 = 100\,(25k^2 \pm k) + 1$, и третья цифра n^2 равна остатку от деления $25k^2 \pm k$ на 10, который четен при любом k. Поэтому $25k^2 \pm k$ кратно 10, откуда k делится на 5, что невозможно.

3) $m \geqslant 2$. Тогда $n^2 = 500k\,(125k \pm 1) + 1$, где k — натуральное число. Заметим, что число $4 \cdot 10^{2l} \cdot n^2$ лежит в интервале от 4 000 000 до 4 500 000, поскольку оно семизначное и содержит только цифры 0 и 4. Отсюда

$$4\,500\,000 > 4 \cdot 10^{2l} \cdot n^2 \geqslant 4 \cdot 10^{2l}\,(500 \cdot 124 + 1) = 4 \cdot 10^{2l} \cdot 62\,001 > 10^{2l} \cdot 45\,000,$$

то есть $10^{2l} < 100$ и $l = 0$. Поэтому число n^2 должно лежать между 1 000 000 и 1 125 000. Это возможно лишь в случае, когда $k = 4$, а в выражении для n^2 — плюс. Мы получим $4n^2 = 4\,008\,004$, что не удовлетворяет условию. □

2. *В однокруговом шахматном турнире участвовало 14 игроков. По окончании турнира оказалось, что шахматисты, занявшие три первых места, набрали в сумме столько же очков, сколько и шахматисты, занявшие 9 последних мест. Какое наибольшее количество партий могло завершиться вничью? В случае равенства очков места определялись жребием. (За победу в шахматах дают 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0).*

Ответ: 40.

Решение. Шахматисты, занявшие первые три места, в играх между собой набрали ровно 3 очка, а в остальных играх не более чем $3 \cdot 11$. Значит, в сумме у них не более 36 очков. Шахматисты, занявшие последние 9 мест, сыграли между собой $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$ партий и, значит, вместе набрали не менее 36 очков. Стало быть, они набрали в точности 36 очков и проиграли всем шахматистам, занявшим места с первого по пятое, а первые три шахматиста выиграли у всех шахматистов, начиная с четвертого. Следовательно, результативных партий было не менее $5 \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 51$. Всего же была сыграна $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 13 = 91$ партия.

ЕГЭ.РФ

Количество ничьих не превосходит числа оставшихся партий, то есть 40. Предположим, что все эти партии закончились вничью. Тогда первые три шахматиста набрали по $2 \cdot \frac{1}{2} + 11 = 12$ очков, следующие два шахматиста набрали по $\frac{1}{2} + 9 = 9\frac{1}{2}$ очков, а последние 9 шахматистов набрали по $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ очка, что удовлетворяет условию задачи. $\square$

3. *Найдите наименьшее значение при положительных a, b, c выражения*

$$f(a,b,c) = \sqrt[3]{9a + \tfrac{27}{b}} + \sqrt[3]{3b + \tfrac{81}{c}} + \sqrt[3]{c + \tfrac{9}{a}}.$$

Ответ: $3\sqrt[3]{18}$ при $a = 1$, $b = 3$, $c = 9$.

Решение. Положим $a = x$, $b = 3y$, $c = 9z$. Используя неравенства Коши, мы получим

$$f(a,b,c) = \sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{x + \tfrac{1}{y}} + \sqrt[3]{y + \tfrac{1}{z}} + \sqrt[3]{z + \tfrac{1}{x}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[3]{18}\left(\sqrt[6]{\tfrac{x}{y}} + \sqrt[6]{\tfrac{y}{z}} + \sqrt[6]{\tfrac{z}{x}}\right) \geqslant 3\sqrt[3]{18}\ \sqrt[18]{\tfrac{x}{y} \cdot \tfrac{y}{z} \cdot \tfrac{z}{x}} = 3\sqrt[3]{18}.$$

Все неравенства обращаются в равенства при $x = y = z = 1$. $\square$

4. *В левом верхнем углу доски 75×75 стоит фишка. За один ход разрешается передвинуть фишку на три клетки по горизонтали и на одну клетку по вертикали или на одну клетку по горизонтали и на три клетки по вертикали. За какое наименьшее количество ходов фишку можно переместить в правый нижний угол доски?*

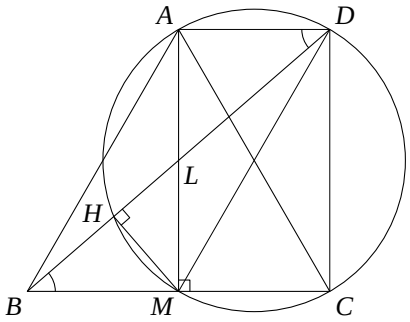
Ответ: 38.

Решение. Повернем доску на 90° и будем попадать из левого нижнего угла в правый верхний. За каждый ход сумма координат клеток увеличивается не более чем на 4. Чтобы из левого нижнего угла доски переместиться в правый верхний угол, нужно увеличить эту сумму на $2 \cdot 74 = 148$. Для этого потребуется не менее $\frac{148}{4} = 37$ ходов. Заметим, что фишка перемещается только по клеткам, сумма координат которых четна, причем клетки, у которых обе координаты нечетные, чередуются с клетками, у которых обе координаты четные. Поскольку обе координаты левого нижнего угла и обе координаты правого верхнего угла нечетны, нам потребуется четное число ходов. Значит, нужно сделать не менее 38 ходов. Покажем, что за 38 ходов проделать искомый путь можно. На рисунке показано, как за 4 хода попасть из левого нижнего в правый верхний угол доски 7×7. Далее нужно сделать 17 “горизонтальных” (то есть три шага вправо и один вверх) ходов и 17 “вертикальных” (три шага вверх и один вправо) ходов.

						4
		2				
					3	
			1			
0						

5. *Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC, а точка L — середина отрезка AM. В треугольнике BLM опущена высота MH. Найдите угол AHC.*

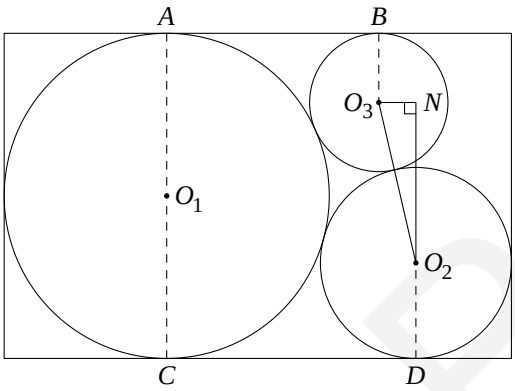
Ответ: 90°.



Решение. Пусть точка D лежит на прямой BL, причем $AD \parallel BC$. Так как $\angle ADL = \angle LBM$ и $AL = LM$, треугольники ALD и BLM равны. Поэтому $AD = BM = MC$, то есть четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником. Опишем вокруг него окружность. Угол MHD прямой и опирается на диаметр DM, поэтому точка H лежит на окружности. Угол AHC опирается на диаметр AC этой окружности, поэтому он также равен $90°$. $\square$

6. *Дана цилиндрическая коробка с плоской крышкой. Объем коробки равен* 38π. *Возможно ли разместить в такой коробке металлические шары радиусов* 2, $\frac{9}{8}$ *и* $\frac{8}{9}$*?*

Ответ: Да.



Решение. Пусть шары с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 помещены в цилиндр так, чтобы его осевое сечение выглядело как на рисунке. Достроим отрезок O_2O_3 до прямоугольного треугольника O_2O_3N со сторонами, параллельными сторонам прямоугольника в сечении. По теореме Пифагора

$$CD^2 = O_1O_2^2 - (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2,$$

то есть $CD = 2\sqrt{r_1r_2}$. Аналогично получаем $AB = 2\sqrt{r_1r_3}$. Тогда

$$O_2O_3 = r_2 + r_3, \quad O_2N = 2r_1 - (r_2 + r_3), \quad O_3N = CD - AB = 2\sqrt{r_1r_2} - 2\sqrt{r_1r_3} = 2\sqrt{r_1}\big(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}\big).$$

По теореме Пифагора ${O_2O_3}^2 = O_2N^2 + O_3N^2$, откуда

$$(r_2+r_3)^2 = 4r_1^2 + (r_2+r_3)^2 - 4r_1(r_2+r_3) + 4r_1\big(r_2+r_3-2\sqrt{r_2r_3}\big) \iff 0 = 4r_1\big(r_1 - 2\sqrt{r_2r_3}\big) \iff r_1 = 2\sqrt{r_2r_3}.$$

Так как радиусы $r_1 = 4$, $r_2 = \frac{9}{8}$ и $r_3 = \frac{8}{9}$ удовлетворяют этому соотношению, шары из условия в такой цилиндр поместятся. Заметим, что цилиндр имеет высоту 4 и радиус $\frac{1}{2}\big(r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2}\big) = \frac{49}{16}$. Поэтому объем цилиндра равен $\pi \cdot \big(\frac{49}{16}\big)^2 \cdot 4 < 38\pi$. $\square$

Яуов.рф

Вариант 7

1. *Натуральные числа x и y равны* 2014 *соответственно в десятичной и восьмеричной системе. Будет ли число $x^{2000} - y^{1000}$ точным квадратом?*

   Ответ: Нет.

   Решение 1. Заметим, что $x = 2 \cdot 19 \cdot 53$ и $y = 1036 = 4 \cdot 7 \cdot 37$. Тогда

   $$x^{2000} - y^{1000} = 2^{2000}\big(19^{2n} \cdot 53^{2n} - 7^n \cdot 37^n\big), \quad \text{где } n = 1000.$$

   Положим $m = 19^{2n} \cdot 53^{2n} - 7^n \cdot 37^n$. Числа 19^2, 53^2 и 37 дают при делении на 3 и 9 остаток 1, и это же верно для их степеней. Кроме того, остаток от деления 7^n на 3 равен 1, а остатки от деления 7^k на 9 равны 7, 4, 1 и далее циклически повторяются. Так как 1000 не кратно 3, число m делится на 3, но не на 9, поэтому $x^{2000} - y^{1000}$ не может быть точным квадратом. □

   Решение 2. Заметим, что $x = 2014 = 3k + 1$ и $y = 1036 = 9m + 1$. Тогда любая степень y дает остаток 1 при делении на 9. В частности, y^{1000} дает остаток 1 при делении на 9. С другой стороны, $x^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ дает остаток 1 при делении на 9 и, значит, любая кратная трем степень x дает остаток 1 при делении на 9. Тогда $x^{2000} = x^{1998}x^2$ дает тот же остаток при делении на 9, что и x^2. Но $x^2 = 2014^2 = (9n - 2)^2 = 81n^2 - 36n + 4$ дает остаток 4 при делении на 9. Таким образом, $x^{2000} - y^{1000}$ дает остаток 3 при делении на 9. Стало быть, $x^{2000} - y^{1000}$ делится на 3, но не делится на 9 и, значит, не может быть точным квадратом. □

   Решение 3. Заметим, что $x = 2014 = 13k + 1$ и $y = 1036 = 13m + 9$. Тогда любая степень x дает остаток 1 при делении на 13. В частности, x^{2000} дает остаток 1 при делении на 13. С другой стороны y^3 дает тот же остаток при делении на 13, что и $9^3 = 729 = 13 \cdot 56 + 1$, то есть 1. Значит, любая кратная трем степень y дает остаток 1 при делении на 13. Следовательно, $y^{1000} = y^{999} \cdot y$ дает остаток 9 при делении на 13. Таким образом, $x^{2000} - y^{1000}$ дает остаток 5 при делении на 13. Перебрав остатки, которые дают квадраты при делении на 13, мы убедимся, что остатка 5 среди них нет. Стало быть, $x^{2000} - y^{1000}$ не может быть точным квадратом. □

   Замечание. Вообще-то знающий квадратичные вычеты школьник должен решать задачу так. Рассмотрим выражение $a = x^{2000} - y^{1000}$ по модулю 19. Поскольку $x = 2014$ делится на 19, $a \equiv -y^{1000} \pmod{19}$. Число $y = 1036$ не делится на 19 и y^{1000} является полным квадратом, поэтому a есть квадратичный вычет, умноженный на -1. Но 19 дает остаток 3 при делении на 4, поэтому -1 не является квадратичным вычетом и, значит, квадратичный вычет, умноженный на -1, также не является квадратичным вычетом. Таким образом, a не может быть точным квадратом.

2. *144 теннисиста играют в турнире из 143 туров по следующей формуле: в каждом туре встречаются (по жребию) два спортсмена, количество побед которых на данный момент отличается не более чем на единицу, и проигравший выбывает из турнира. Какое наибольшее количество побед может одержать победитель турнира?*

   Ответ: 10.

   Решение. Найдем, какое наименьшее количество теннисистов могло играть в турнире, в котором победитель выиграл n матчей. Обозначим это количество через k_n. Ясно, что $k_{n-1} < k_n$, а также что $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$. Рассмотрим теперь турнир с наименьшим количеством участников, в котором победитель выиграл n матчей. В последнем туре встретились два теннисиста: будущий победитель A и проигравший ему B. К этому моменту A одержал $n - 1$ победу, а B одержал $n - 2$, $n - 1$ или n побед. Последний случай невозможен, поскольку в той части турнира, в которой играл B, те, у кого он выиграл, те, у кого выиграли проигравшие ему и так далее будет меньше участников, а у победителя в точности n побед. Если B одержал $n - 2$ победы, то в турнире будет $k_{n-1} + k_{n-2}$ участника, а, если $n - 1$ победу, то $2k_{n-1}$ участников. Поскольку $k_{n-1} + k_{n-2} < 2k_{n-1}$, мы получаем, что $k_n = k_{n-2} + k_{n-1}$. Результаты вычисления по этой рекуррентной формуле приведены в таблице. □

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

3. *Найдите наименьшее значение при положительных x, y, z выражения*

$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{4}{yz}} + \sqrt{\frac{y^2}{2} + \frac{8}{xz}} + \sqrt{2z^2 + \frac{1}{6}xy}.$$

Ответ: 6 при $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$.

Решение. Положим $x = 4a$, $y = 2b$, $z = c$. Используя неравенства Коши, мы получим

$$f(x,y,z) = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{bc}\right)} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2 + \frac{1}{ac}\right)} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(c^2 + \frac{1}{ab}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\sqrt[4]{\frac{a^2}{bc}} + \sqrt[4]{\frac{b^2}{ac}} + \sqrt[4]{\frac{c^2}{ab}}\right) \geqslant 6\sqrt[12]{\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ac}\cdot\frac{c^2}{ab}} = 6.$$

Все неравенства обращаются в равенства при $a = b = c = 1$. □

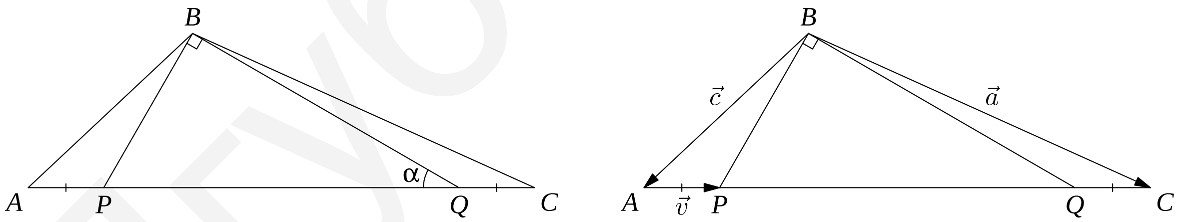
4. *Доска $n \times n$ клеток разрезана по клеточкам на квадраты 2×2 и 3×3 клетки. При каких n такое возможно?*

Ответ: n кратно 2 или 3.

Решение. Если n кратно 2 или 3, то разрезать, очевидно, можно. Докажем, что в остальных случаях разрезать доску нельзя. Пусть n нечетно. Предположим, что можно разрезать доску в соответствии с условием задачи. Покрасим столбцы с нечетными номерами в черный цвет, а столбцы с четными номерами — в белый цвет. Тогда на доске черных клеток на n больше, чем белых. Заметим, что в любом квадрате 2×2 черных и белых клеток поровну, а в квадрате 3×3 разность количества черных и белых клеток равна ± 3. Значит, в любом квадрате разность количества черных и белых клеток делится на 3. Так как квадраты не пересекаются, она делится на 3 и для всей доски. Но последнее означает, что n делится на 3. □

5. *На стороне AC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AP = QC < \frac{AC}{2}$. Оказалось, что $AB^2 + BC^2 = AQ^2 + QC^2$. Найдите угол PBQ.*

Ответ: $90°$.



Решение 1. Положим $\alpha = \angle PQB$ и применим теорему косинусов к треугольникам AQB и BQC:

$$\begin{cases} AB^2 = AQ^2 + BQ^2 - 2\,AQ\cdot BQ\cdot\cos\alpha, \\ BC^2 = QC^2 + BQ^2 + 2\,QC\cdot BQ\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения и пользуясь соотношением из условия, мы получим

$$2BQ^2 - 2BQ\cdot(AQ - QC)\cdot\cos\alpha = 0 \Longleftrightarrow BQ = (AQ - QC)\cdot\cos\alpha.$$

Заметим, что

$$AQ - QC = AQ - AP = PQ, \quad \text{откуда} \quad BQ = PQ\cdot\cos\alpha.$$

Правая часть последнего равенства есть расстояние между Q и проекцией точки P на прямую BQ. Таким образом, P проектируется в точку B, откуда $PB \perp BQ$ и $\angle PBQ = 90°$. □

Решение 2. Положим для краткости $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QC}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{c}$ и $\overrightarrow{AQ} = \vec{a} - \vec{c} - \vec{v}$. По условию

$$|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 = |\vec{a} - \vec{c} - \vec{v}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{v}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{c}) - 2(\vec{a}, \vec{v}) + 2(\vec{c}, \vec{v}).$$

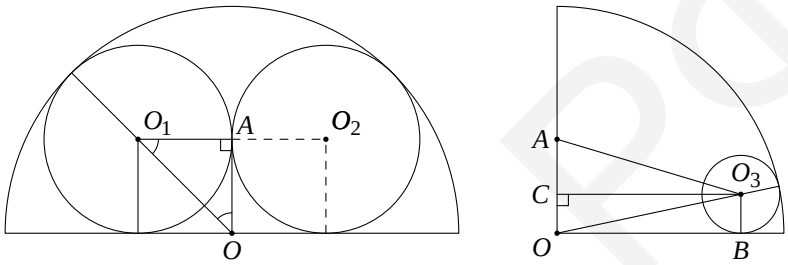
Следовательно,

$$(\vec{c} + \vec{v}, \vec{v}) = |\vec{v}|^2 + (\vec{c}, \vec{v}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}) = (\vec{a}, \vec{c} + \vec{v})$$

и, значит, $(\vec{c} + \vec{v}, \vec{a} - \vec{v}) = 0$. Таким образом, вектора $\overrightarrow{BP} = \vec{c} + \vec{v}$ и $\overrightarrow{BQ} = \vec{a} - \vec{v}$ ортогональны. Стало быть, $\angle PBQ = 90°$. □

6. *На плоскости стоит шатер в форме полусферы. Внутрь шатра помещены три шара. Первые два имеют радиус 1, касаются друг друга, а также крыши и диаметра основания шатра. Третий шар радиуса r касается двух других, крыши и основания шатра. Найдите r.*

Ответ: $\frac{\sqrt{2}+4}{7}$.



Решение. Пусть O — центр основания шатра, R — его радиус, O_1, O_2, O_3 — центры шаров радиусов $1, 1, r$, A — точка касания единичных шаров. На левом рисунке показано сечение шатра плоскостью OO_1O_2, на правом — половина сечения шатра плоскостью AOO_3. Треугольник O_1AO прямоугольный и равнобедренный, откуда $OO_1 = \sqrt{2}$ и $R = \sqrt{2} + 1$. В равнобедренном треугольнике $O_1O_2O_3$ отрезок AO_3 является медианой и, значит, высотой. Тогда по теореме Пифагора

$$AO_3^2 = O_1O_3^2 - O_1A^2 = (1 + r)^2 - 1 = r^2 + 2r.$$

Заметим также, что

$$CO_3^2 = OB^2 = OO_3^2 - BO_3^2 = (R - r)^2 - r^2 = R^2 - 2rR \quad \text{и} \quad AC = |1 - r|.$$

По теореме Пифагора $AO_3^2 = CO_3^2 + AC^2$, то есть

$$r^2 + 2r = R^2 - 2rR + r^2 - 2r + 1 \Longleftrightarrow 2r(R + 2) = R^2 + 1 \Longleftrightarrow r = \frac{R^2 + 1}{2(R + 2)} = \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 4}{7}. \quad \square$$

Ягубов.рф

Вариант 8

1. *Натуральные числа x и y равны* 2014 *соответственно в десятичной и восьмеричной системе. Будет ли число $x^{2600} - y^{1300}$ точным кубом?*

   Ответ: Нет.

   Решение. Заметим, что $x = 2 \cdot 19 \cdot 53$ и $y = 1036 = 4 \cdot 7 \cdot 37$. Тогда

$$x^{2600} - y^{1300} = 2^{2600}\big(19^{2n} \cdot 53^{2n} - 7^n \cdot 37^n\big), \quad \text{где } n = 1300.$$

Положим $m = 19^{2n} \cdot 53^{2n} - 7^n \cdot 37^n$. Числа 19^2, 53^2 и 37 дают при делении на 3 и 9 остаток 1, и это же верно для их степеней. Кроме того, остаток от деления 7^n на 3 равен 1, а остатки от деления 7^k на 9 равны 7, 4, 1 и далее циклически повторяются. Так как 1300 не кратно 3, число m делится на 3, но не на 9, поэтому $x^{2600} - y^{1300}$ не может быть точным кубом. □

2. *Несколько учеников участвуют в чемпионате школы по игре «в Чапаева». Чемпионат проводится по следующей схеме. В каждом туре выбирают по жребию двух игроков. Проигравший выбывает, а победитель получает два очка, если у соперника было больше очков, одно, если столько же, и ноль, если меньше. По окончании турнира оказалось, что победитель набрал 12 очков. Какое наименьшее количество школьников могло участвовать в турнире?*

   Ответ: 377.

   Решение. Заметим, что за один тур количество очков лидера не может увеличиться более чем на 1. Действительно, оно возрастет, если либо два лидера сыграют друг с другом, либо лидер проиграет сопернику, имеющему на очко меньше его. Кроме того, если аннулировать результаты одного из действующих игроков, это никак не скажется на результатах других действующих игроков.

Пусть $n \geqslant 2$. Рассмотрим турнир с минимальным числом участников, в котором победитель набрал $n+1$ очко. Докажем вначале два утверждения.

1) *Перед последним туром (назовем его финалом) все участники имели не более n очков.* Действительно, пусть кто-то набрал $n+1$ очко до финала. Тогда можно аннулировать результаты всех последующих матчей и удалить из турнира их участников, что противоречит минимальности числа игроков.

2) *Участники финала имеют n и $n-1$ очков.* Так как за тур число очков лидера увеличивается не более чем на 1, один из финалистов (скажем, A) должен иметь n очков. Тогда другой финалист (например, B) должен иметь n или $n-1$ очков. Покажем, что n очков B иметь не может. Действительно, в этом случае свое n-е очко B набрал во встрече с неким игроком C, имевшем не менее $n-1$ очка. Тогда мы могли бы отправить C сразу в финал, а игрока B удалить из турнира, аннулировав результаты B. Но это противоречит минимальности количества участников.

Обозначим через a_n минимальное число участников турнира, в котором победитель набрал n очков. Очевидно, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ (один участник победил другого и проиграл третьему). Пусть $n \geqslant 2$. Выведем формулу для a_{n+1}. Чтобы победитель турнира набрал $n+1$ очко при минимальном числе участников, финалисты в силу 2) должны иметь n и $n-1$ очков. Каждый из них является победителем своего мини-турнира с наименьшим числом участников. Множества участников этих мини-турниров не пересекаются. Действительно, если игрок участвует в двух мини-турнирах, то он не финалист и обязательно кому-то в обоих мини-турнирах проиграет (там, где он не проиграл, его результаты можно аннулировать, нарушая условие минимальности числа участников). Но проиграть можно только в одном мини-турнире. Таким образом, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Результаты вычисления по этой рекуррентной формуле приведены в таблице. □

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

3. *Найдите наименьшее значение при положительных x, y, z выражения*

$$f(x,y,z) = \sqrt[3]{32xy + \frac{4}{z^2}} + \sqrt[3]{16xz + \frac{1}{y^2}} + \sqrt[3]{8yz + \frac{1}{4x^2}}.$$

Ответ: 6 при $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=1$.

Решение. Положим $a=4x$, $b=2y$, $c=z$. Используя неравенства Коши, мы получим

$$f(x,y,z)=2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{c^2}\right)}+2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(ac+\frac{1}{b^2}\right)}+2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(bc+\frac{1}{a^2}\right)}\geqslant$$
$$\geqslant 2\left(\sqrt[6]{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt[6]{\frac{ac}{b^2}}+\sqrt[6]{\frac{bc}{a^2}}\right)\geqslant 6\sqrt[18]{\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{ac}{b^2}\cdot\frac{bc}{a^2}}=6.$$

Все неравенства обращаются в равенства при $a=b=c=1$. □

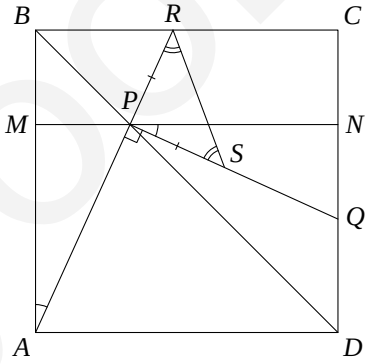
4. *Доска $n\times n$ клеток разрезана по клеточкам на квадраты 2×2 и 5×5 клетки. При каких n такое возможно?*

Ответ: n кратно 2 или 5.

Решение. Если n кратно 2 или 5, то разрезать, очевидно, можно. Докажем, что в остальных случаях разрезать доску нельзя. Пусть n нечетно. Предположим, что можно разрезать доску в соответствии с условием задачи. Покрасим столбцы с нечетными номерами в черный цвет, а столбцы с четными номерами — в белый цвет. Тогда на доске черных клеток на n больше, чем белых. Заметим, что в любом квадрате 2×2 черных и белых клеток поровну, а в квадрате 5×5 разность количества черных и белых клеток равна ± 5. Значит, в любом квадрате разность количества черных и белых клеток делится на 5. Так как квадраты не пересекаются, она делится на 5 и для всей доски. Но последнее означает, что n делится на 5. □

5. *На диагонали BD квадрата $ABCD$ выбрана точка P, а на стороне CD выбрана точка Q так, что угол $\angle APQ$ — прямой. Прямая AP пересекает сторону BC в точке R. На отрезке PQ выбрана точка S так, что $AS=QR$. Найдите угол QSR.*

Ответ: 135°.



Решение 1. Проведем через точку P параллельно AD отрезок MN (см. рисунок). Тогда $BM=PM$, откуда $AM=PN$. Кроме того, $\angle MAP=90^\circ-\angle APM=\angle NPQ$. Поэтому треугольники MAP и NPQ одинаковы, что дает $AP=PQ$. Так как по условию $AS=QR$, мы получаем равенство треугольников APS и QPR, откуда $RP=PS$. Значит, треугольник RPS равнобедренный и прямоугольный. Тогда $\angle PSR=45^\circ$ и $\angle QSR=135^\circ$. □

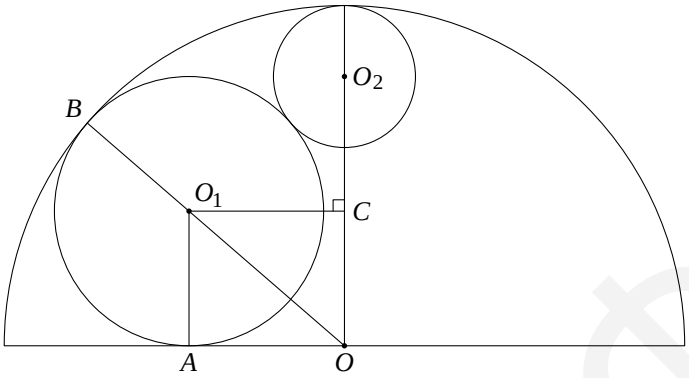
Решение 2. В четырехугольнике $APQD$ два противоположных угла прямые, следовательно, он вписанный. Тогда $\angle AQP=\angle ADP=45^\circ$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике APQ один из углов равен 45°. Поэтому треугольник APQ равнобедренный и $AP=PQ$. Вместе с условием $AS=QR$ мы получаем равенство треугольников APS и QPR, откуда $RP=PS$. Значит, треугольник RPS равнобедренный и прямоугольный. Тогда $\angle PSR=45^\circ$ и $\angle QSR=135^\circ$. □

6. *На плоскости стоит шатер в форме полусферы. Внутрь шатра помещены три одинаковых шара, которые касаются друг друга, основания шатра и его крыши. Кроме того, внутрь шатра помещен*

Дубовый

четвертый шар, который касается крыши шатра и каждого из трех других шаров. Шатер рассекается горизонтальной плоскостью, касающейся сверху трех одинаковых шаров. В каком отношении она поделит объем четвертого шара?

Ответ: Пополам.



Решение. Пусть r — радиус одинаковых шаров, O_1 — центр одного из них, R — радиус четвертого шара, O_2 — его центр, O — центр основания шатра. На рисунке показано сечение шатра плоскостью OO_1O_2. Примем радиус шатра за 1 и воспользуемся дважды теоремой Пифагора. Так как $OB = 1$, из треугольника OO_1A

$$OA^2 = OO_1^2 - AO_1^2 = (1-r)^2 - r^2 = 1 - 2r,$$

а из треугольника O_1O_2C

$$OA^2 = O_1C^2 = O_1O_2^2 - CO_2^2 = (r+R)^2 - (1-r-R)^2 = 2(r+R) - 1.$$

Исключая из этих равенств OA^2, мы получим $R = 1 - 2r$, откуда $OO_2 = 1 - R = 2r$. Поэтому горизонтальная плоскость, касающаяся сверху трех одинаковых шаров, пройдет через O_2 и разделит четвертый шар пополам. $\square$

Ягубов.рф

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Задания заключительного этапа.
2013/2014 учебный год.

Задания для 9-го и младших классов

Ягубов.рф

9 класс. Первый вариант

1. *В компании «Арксинус» 225 акционеров. Акции между ними распределены так, что любые 140 акционеров вместе владеют по крайней мере половиной всех акций. Какой наибольший процент акций может иметь один акционер?*

Ответ: 20%.

Решение. Обозначим за x процент акций у самого крупного акционера. Тогда у оставшихся акционеров $100-x$ процентов акций. Выберем среди них 140 акционеров, имеющих наименьшие количество акций. Тогда у них вместе будет не более чем $(100-x)\frac{140}{224} = \frac{5(100-x)}{8}$ процентов акций. По условию это не меньше 50%. Следовательно, $\frac{5(100-x)}{8} \geqslant 50$ и, значит, $x \leqslant 20$.

Если у одного акционера 20% акций, а у оставшихся 224 акционеров поровну акций (т. е. по $\frac{5}{14}$% акций), то у любых 140 акционеров, очевидно, будет хотя бы половина акций.

2. *Найдите все вещественные числа a, для которых оба корня уравнения $a^2x^2 - ax + 1 - 7a^2 = 0$ являются целыми числами.*

Ответ: ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/3$.

Решение. Если $a = 0$, то уравнение не имеет корней. Пусть $a = 1/k$, где k — ненулевое вещественное число. Домножим уравнение на k^2, оно примет вид $x^2 - kx + (k^2 - 7) = 0$. По теореме Виета k является суммой корней уравнения, и, значит, должно быть целым числом. Кроме того, дискриминант $k^2 - 4(k^2 - 7) = 28 - 3k^2$ должен быть точным квадратом. Он неотрицателен только при $k = \pm 1$, ± 2 и ± 3. Несложно видеть, что для таких k он будет точным квадратом. Поскольку дискриминант и число k одной четности, из формулы для корней квадратного уравнения видно, что в указанных случаях корни будут целыми числами (что, впрочем, несложно проверить и непосредственным вычислением).

3. *Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 3$ имеет место неравенство $2^{2n+1}(n!)^2 < (2n+1)!$. (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)*

Первое решение. Заметим, что

$$\begin{aligned}(2n+1)! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \\ &= 2^n n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1).\end{aligned}$$

Таким образом, осталось доказать, что

$$2^{n+1} n! < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1).$$

Это следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+1) &= 105 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \geqslant \\ &\geqslant 105 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (2n) = 105 \cdot 2^{n-3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n > \\ &> 96 \cdot 2^{n-3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n = 2^{n+1} n!.\end{aligned}$$

Второе решение. Докажем неравенство по индукции. База $n = 3$:

$$2^7 (3!)^2 = 4608 < 5040 = 7!.$$

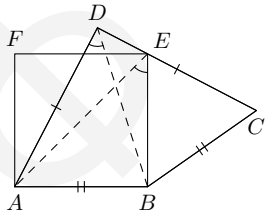
Переход от n к $n+1$. Заметим, что

$$2^{2(n+1)+1}\big((n+1)!\big)^2 = 2^{2n+3}(n+1)^2(n!)^2 = (2n+2)^2 2^{2n+1}(n!)^2.$$

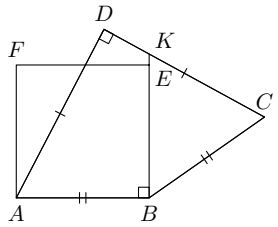
Последнее по индукционному предположению меньше, чем

$$(2n+2)^2(2n+1)! < (2n+3)(2n+2)(2n+1)! = (2n+3)!.$$

4. *На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ построен квадрат $ABEF$ так, что точки C, D, E и F лежат по одну сторону от прямой AB. Известно, что $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle ADC = 90^\circ$. Докажите, что точки C, D и E лежат на одной прямой.*



Первое решение. Треугольники ADB и CDB равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ADB = \angle CDB = 45^\circ$. Таким образом, в четырехугольнике $ADEB$ углы $\angle ADB$ и $\angle AEB$ равны, поэтому он вписанный. Тогда сумма его противоположных углов равна 180°. Стало быть, $\angle ADE = 180^\circ - \angle ABE = 90^\circ$. Следовательно, $\angle ADE = 90^\circ = \angle ADC$ и, значит, точки C, D и E лежат на одной прямой.



Второе решение. Пусть K — точка пересечения прямых CD и BE. Заметим, что $\angle BKC = 180^\circ - \angle DKE = \angle DAB$, поскольку $\angle ABK = \angle ADK = 90^\circ$. Треугольники ADB и CDB равны по трем сторонам, поэтому $\angle DCB = \angle DAB = \angle BKC$. Следовательно, треугольник CBK равнобедренный, откуда $BK = BC = AB = BE$, а знаичт точки K и E совпадают.

5. *В клетках таблицы 12×12 так расставлены числа от 1 до 144, что отличающиеся на 1 числа расположены в клетках, имеющих общую сторону. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих на диагонали таблицы, идущей из левого верхнего угла в правый нижний?*

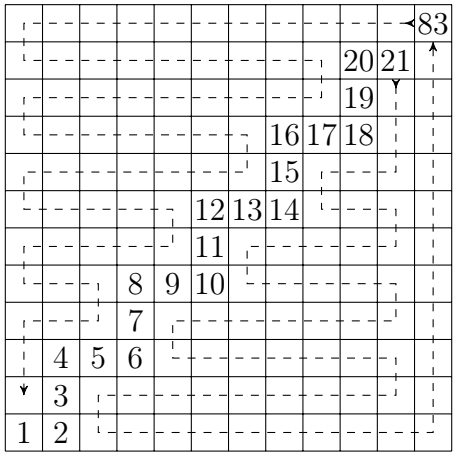
Ответ: 204.

Решение. Раскрасим доску в черный и белый цвета в шахматном порядке так, что интересующая нас диагональ будет черного цвета. Если мы поставим фишку на клетку с единицей, а затем будем передвигать ее с клетки с номером k на клетку с номером $k+1$, то мы получим обход доски, где каждый ход фишка перемещается на соседнюю по стороне клетку, причем на каждой клетке она побывает ровно один раз.

Рассмотрим самое больше число, стоящее на диагонали. Клетка, в которой оно расположено, будет последним пересечением фишки с диагональю и, значит, к этому моменту фишка уже обойдет все клетки с одной стороны от диагонали (не умаляя общности — под диагональю). Тогда над диагональю останутся непосещенными не более 61 клетки. Действительно, цвета клеток, посещенных фишкой, чередуются, а над диагональю всего $\frac{72-12}{2} = 30$ черных клеток, значит, там останется не более 31 непосещенной белой клетки. Следовательно, самое большое число на диагонали не меньше $144 - 61 = 83$. Остальные числа на диагонали одной четности и, значит, их сумма не меньше $1+3+5+7+\ldots+21 = 121$. Таким образом, сумма всех чисел на диагонали по крайней мере $83 + 121 = 204$.

Покажем, что сумма 204 возможна. Обход доски фишкой показан на рисунке пунктирной линией.

Пробное



6. *Натуральные числа a и b таковы, что $a > b > 1$. Число $6ab + 1$ делится на $a + b$, а число $6ab - 1$ делится на $a - b$. Докажите, что $5a^2 < 11b^2$.*

Решение. Если d — наибольший общий делитель чисел a и b, то число $6ab+1$ делится на d, ибо оно делится на $a + b$. Но поскольку $6ab$ также делится на d, мы получаем, что $d = 1$ и, значит, числа a и b взаимно просты.

Пусть d_1 — наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a - b$. Тогда d_1 нечетно, так как нечетное число $6ab + 1$ делится на $a + b$, а значит, и на d_1. Заметим далее, что $2a = (a + b) + (a - b)$ делится на d_1 и $2b = (a + b) - (a - b)$ делится на d_1. Поскольку d_1 нечетно, взаимно простые числа a и b делятся на d_1. Стало быть, $d_1 = 1$, и числа $a+b$ и $a-b$ также взаимно просты.

Из условия следует, что $6b^2 - 1 = 6b(a + b) - (6ab + 1)$ делится на $a + b$ и $6b^2 - 1 = (6ab - 1) - 6b(a - b)$ делится на $a - b$. Следовательно, $6b^2 - 1$ делится и на $a^2 - b^2$. Тогда $6b^2 - 1 = k(a^2 - b^2)$. Случай $k = 1$ невозможен, поскольку тогда $a^2 + 1 = 7b^2$ делится на 7, а квадраты не могут давать остаток 6 при делении на 7 (проверяется перебором остатков). Случаи $k = 2$, $k = 3$ и $k = 4$ невозможны, поскольку $6b^2 - 1$ не делится ни на 2, ни на 3. Стало быть, $k \geqslant 5$. Таким образом, $6b^2 - 1 \geqslant 5(a^2 - b^2)$ и, значит, $11b^2 \geqslant 5a^2 + 1 > 5a^2$.

Ягубов.рф

9 класс. Второй вариант

1. *В компании «Котангенс» 325 акционеров. Акции между ними распределены так, что любые 145 акционеров вместе владеют не более чем половиной всех акций. Какой наибольший процент акций может иметь один акционер?*

Ответ: 10%.

Решение. Обозначим за x процент акций у самого крупного акционера. Тогда у оставшихся акционеров $100-x$ процентов акций. Выберем среди них 144 акционера, у которых наибольшее количество акций. Тогда вместе они имеют не менее $(100-x)\frac{144}{324} = \frac{4(100-x)}{9}$ процентов акций, а вместе с самым крупным акционером у них будет $\frac{4(100-x)}{9}+x$ процентов акций. По условию это составляет не более 50% от общего количества акций. Следовательно, $\frac{4(100-x)}{9}+x \leqslant 50$ и, значит, $x \leqslant 10$.

Если у одного акционера 10% акций, а у оставшихся 324 акционеров поровну акций (т. е. по $\frac{4}{9}$% акций), то у любых 145 акционеров, очевидно, будет не более половины акций.

2. *Найдите все вещественные числа a, для которых оба корня уравнения $a^2x^2+ax+1-13a^2=0$ являются целыми числами.*

Ответ: ±1, $\pm1/3$, $\pm1/4$.

Решение. Если $a=0$, то уравнение не имеет корней. Пусть $a=1/k$, где k — ненулевое вещественное число. Домножим уравнение на k^2, оно примет вид $x^2+kx+(k^2-13)=0$. По теореме Виета k является суммой корней уравнения, и, значит, должно быть целым числом. Кроме того, дискриминант $k^2-4(k^2-13)=52-3k^2$ должен быть точным квадратом. Он неотрицателен только при $k=\pm1$, ±2, ±3 и ±4. Несложно видеть, что для $k=\pm1$, ±3 и ±4 он будет точным квадратом. Поскольку дискриминант и k одной четности, из формулы для корней квадратного уравнения видно, что в указанных случаях корни будут целыми числами (что, впрочем, несложно проверить и непосредственным вычислением).

3. *Докажите, что при всех натуральных n имеет место неравенство $3^{3n+1}(n!)^3 < (3n+2)!$. (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4$.)*

Первое решение. Заметим, что

$$\begin{aligned}(3n+1)! &= 1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)\cdot3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot(3n) = \\ &= 1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)\cdot3^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n = \\ &= 3^n n!\cdot1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2).\end{aligned}$$

Таким образом, осталось доказать, что

$$3^{2n+1}(n!)^2 < 1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2).$$

Это следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2) &= 40\cdot7\cdot8\cdot10\cdot11\cdot\ldots\cdot(3n+2) \geqslant \\ &\geqslant 40\cdot6^2\cdot9^2\cdot\ldots\cdot(3n)^2 = 40\cdot3^{2n-2}(n!)^2 > \\ &> 27\cdot3^{2n-2}(n!)^2 = 3^{2n+1}(n!)^2.\end{aligned}$$

Второе решение. Докажем неравенство по индукции. База $n=1$:

$$3^4(1!)^3 = 81 < 120 = 5!.$$

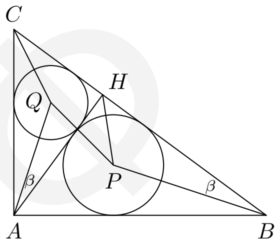
Переход от n к $n+1$. Заметим, что

$$3^{3(n+1)+1}\big((n+1)!\big)^3 = 3^{3n+4}(n+1)^3(n!)^3 = (3n+3)^3 3^{3n+1}(n!)^3.$$

Последнее по индукционному предположению меньше, чем

$$(3n+3)^3(3n+2)! < (3n+5)(3n+4)(3n+3)(3n+2)! = (3n+5)!.$$

4. *В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу BC опущена высота AH. В треугольники ABH и ACH вписаны окружности с центрами P и Q соответственно. Докажите, что четырёхугольник $BPQC$ вписанный.*



Решение. Поскольку центр вписанной окружности треугольника является точкой пересечения биссектрис, $\angle BHP = \angle PHA = \angle QHA = \angle CHQ = 45^\circ$. Пусть $\angle ABC = 2\beta$. С помощью элементарного подсчета углов установим, что $\angle CAH = 90^\circ - \angle ACB = \angle ABC = 2\beta$ и, значит, $\angle PBC = \angle QAH = \beta$ и $\angle QCH = 45^\circ - \beta$. Заметим, что треугольники AQH и BPH подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{QH}{PH} = \frac{AH}{BH}$. Тогда треугольники QPH и ABH подобны по прямому углу и отношению сторон. Поэтому $\angle HPQ = \angle HBA = 2\beta$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\angle BPQ &= \angle BPH + \angle HPQ = \\ &= (180^\circ - \angle HBP - \angle PHB) + \angle HPQ = \\ &= (180^\circ - \beta - 45^\circ) + 2\beta = 135^\circ + \beta.\end{aligned}$$

Стало быть, $\angle BPQ + \angle BCQ = (135^\circ + \beta) + (45^\circ - \beta) = 180^\circ$ и, значит, четырехугольник $BPQC$ вписанный.

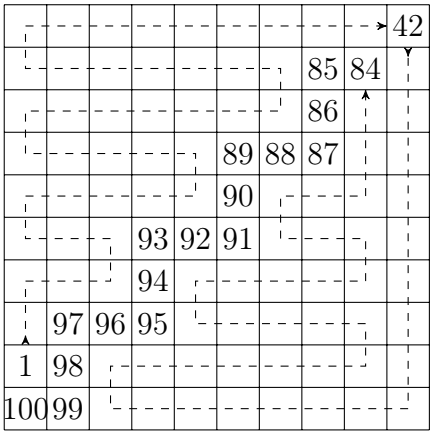
5. *В клетках таблицы 10×10 так расставлены числа от 1 до 100, что отличающиеся на 1 числа расположены в клетках, имеющих общую сторону. Какова наибольшая возможная сумма чисел, стоящих на диагонали таблицы, идущей из левого верхнего угла в правый нижний?*

Ответ: 860.

Решение. Раскрасим доску в черный и белый цвета в шахматном порядке так, что интересующая нас диагональ будет черного цвета. Если мы поставим фишку на клетку с сотней, а затем будем передвигать ее с клетки с номером k на клетку с номером $k-1$, то мы получим обход доски, где каждый ход фишка перемещается на соседнюю по стороне клетку, причем на каждой клетке она побывает ровно один раз.

Рассмотрим самое маленькое число, стоящее на диагонали. Клетка, в которой оно расположено, будет последним пересечением фишки с диагональю и, значит, к этому моменту фишка уже обойдет все клетки с одной стороны от диагонали (не умаляя общности — под диагональю). Тогда над диагональю останутся непосещенными не более 41 клетки. Действительно, цвета клеток, посещенных фишкой, чередуются, а над диагональю всего $\frac{50-10}{2} = 20$ черных клеток, значит, там останется не более 21 непосещенной белой клетки. Следовательно, наименьшее число на диагонали не больше 42. Остальные числа на диагонали одной четности и, значит, их сумма не больше $100 + 98 + 96 + 94 + \ldots + 84 = 828$. Таким образом, сумма всех чисел на диагонали не превосходит $42 + 828 = 860$.

Покажем, что сумма 860 возможна. Обход доски фишкой показан на рисунке пунктирной линией.



6. *Натуральные числа a и b таковы, что $a > b > 1$. Число $4ab + 1$ делится на $a + b$, а число $4ab - 1$ делится на $a - b$. Докажите, что $a^2 < 5b^2$.*

Решение. Если d — наибольший общий делитель чисел a и b, то число $4ab+1$ делится на d, ибо оно делится на $a + b$. Но поскольку $4ab$ также делится на d, мы получаем, что $d = 1$ и, значит, числа a и b взаимно просты.

Пусть d_1 — наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a - b$. Тогда d_1 нечетно, так как нечетное число $4ab + 1$ делится на $a + b$, а значит, и на d_1. Заметим далее, что $2a = (a + b) + (a - b)$ делится на d_1 и $2b = (a + b) - (a - b)$ делится на d_1. Поскольку d_1 нечетно, взаимно простые числа a и b делятся на d_1. Стало быть, $d_1 = 1$, и числа $a+b$ и $a-b$ также взаимно просты.

Из условия следует, что $4b^2 - 1 = 4b(a + b) - (4ab + 1)$ делится на $a + b$ и $4b^2 - 1 = (4ab - 1) - 4b(a - b)$ делится на $a - b$. Следовательно, $4b^2 - 1$ делится и на $a^2 - b^2$. Тогда $4b^2 - 1 \geqslant a^2 - b^2$ и, значит, $5b^2 \geqslant a^2 + 1 > a^2$.

Ягубов.рф

9 класс. Третий вариант

1. *В однокруговом турнире по настольному теннису двое участников были дисквалифицированы после того, как каждый из них сыграл четыре матча. В результате в турнире было проведено всего 85 матчей (включая игры дисквалифицированных участников). Сколько теннисистов, включая дисквалифицированных игроков, играло в турнире?*

Ответ: 15.

Решение. Пусть в турнире играли $n+2$ теннисиста. Тогда n из них сыграли между собой $\frac{1}{2}n(n-1)$ матчей. Кроме того, в 7 или 8 матчах принимали участие дисквалифицированные теннисисты (в зависимости от того, успели они сыграть между собой или нет). Следовательно, либо $\frac{1}{2}n(n-1)+7=85$, либо $\frac{1}{2}n(n-1)+8=85$. Таким образом, $n^2-n-156=0$ или $n^2-n-154=0$. Второе уравнение не имеет целочисленных решений, а первое имеет решения $n=13$ и $n=-12$. Значит, в турнире участвовало $13+2=15$ теннисистов.

2. *Решите уравнение*

$$\big||x-1|-|x-2|\big|+\big||x-3|-|x-4|\big|=2\big||x-5|-|x-6|\big|. \qquad (*)$$

Ответ: $x\in(-\infty,1]\cup[2,3]\cup[4,5]\cup[6,\infty)$.

Первое решение. Пусть $a<b$. Рассмотрим выражение

$$f(x)=\big||x-a|-|x-b|\big|.$$

Заметим, что

$$f(x)=\begin{cases}|(a-x)-(b-x)|=|a-b|=b-a & \text{при } x\leqslant a,\\ |(a-x)-(x-b)|=|a+b-2x| & \text{при } a<x<b,\\ |(x-a)-(x-b)|=|b-a|=b-a & \text{при } x\geqslant b.\end{cases}$$

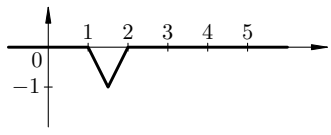
Отметим еще, что выражение $a+b-2x$ при $a<x<b$ меньше $b-a$ и больше $a-b$. Поэтому $|a+b-2x|<b-a$.

При x, не принадлежащем множеству $(1,2)\cup(3,4)\cup(5,6)$, левая часть $(*)$ равна $(2-1)+(3-2)=2$, а правая равна $2(6-5)=2$, то есть равенство верно. Если $x\in(1,2)$, то левая часть $(*)$ равна $|1+2-2x|+(3-2)=|3-x|+1<2$, а правая равна $2(6-5)=2$, и равенство неверно. Если $x\in(3,4)$, то левая часть $(*)$ равна $(2-1)+|3+4-2x|=|7-x|+1<2$, а правая равна $2(6-5)=2$, и равенство неверно. Наконец, если $x\in(5,6)$, то левая часть $(*)$ равна $(2-1)+(4-3)=2$, а правая равна $2|5+6-2x|<2$, и равенство снова неверно.

Второе решение. Как и в первом решении установим формулу для $f(x)$. Рассмотрим далее выражение

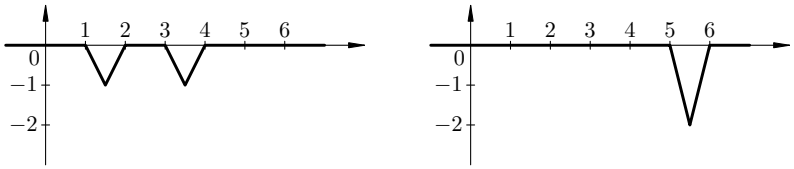
$$g_a(x)=\big||x-a|-|x-(a+1)|\big|-1.$$

График функции $g_a(x)$ имеет вид



ЛУГОВ.РФ

Поэтому графики функции $g_1(x) + g_3(x)$ и $2g_5(x)$ имеют вид



Сравним их и получиим ответ.

3. *Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство*

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geqslant \frac{2}{x^2+y^2+2}.$$

Решение. Воспользуемся неравенством $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$, которое легко проверяется с помощью домножения на знаменатели. При $a = (1+x)^2$ и $b = (1+y)^2$ мы получим

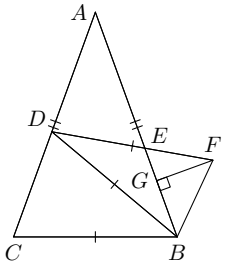
$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geqslant \frac{4}{(1+x)^2+(1+y)^2} = \frac{4}{2+2x+2y+x^2+y^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2}{4+2x^2+2y^2} = \frac{2}{x^2+y^2+2}.$$

А последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $2x \leqslant 1+x^2$ и $2y \leqslant 1+y^2$.

4. *На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена такая точка D, что $BD = BC$. На стороне AB отмечена такая точка E, что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — такая точка F, что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол $\angle BAC$.*

Ответ: 40°.

Решение. По условию треугольник BGF равнобедренный и прямоугольный. Следовательно, $\angle BFG = \angle FBG = 45^\circ$. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$. Из равнобедренности треугольника ABC имеем $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \alpha$, а из равнобедренности треугольника CBD имеем $\angle CDB = \angle ACB = 90^\circ - \alpha$. Стало быть, $\angle CBD = 2\alpha$ и, значит, $\angle DBA = 90^\circ - 3\alpha$. Наконец, из равнобедренности треугольника BED получим, что $\angle BED = 6\alpha$. А из равнобедренности треугольника BDF, что



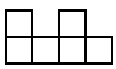
$$\angle DFG = \angle DFB - \angle GFB = \angle DFB - 45^\circ =$$
$$= \angle DBA + \angle GBF - 45^\circ = \angle DBA = 90^\circ - 3\alpha.$$

Поскольку угол $\angle BED$ является внешним в треугольнике GEF имеем равенство,

$$6\alpha = \angle BED = \angle EGF + \angle DFG = 90^\circ + (90^\circ - 3\alpha).$$

Таким образом, $9\alpha = 180^\circ$ и, значит, $\alpha = 20^\circ$. Стало быть, $\angle BAC = 2\alpha = 40^\circ$.

5. *Можно ли разрезать прямоугольник 750×2014 на составленные из 6 квадратиков 1×1 фигурки вида, показанного на рисунке? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)*



Ответ: нельзя.

Решение. Разобьем прямоугольник на 375×1007 квадратов 2×2 и покрасим эти квадраты в черный и белый цвета в шахматном порядке. Заметим, что каждая из фигурок содержит поровну клеток черного и белого цветов. Если бы доску можно было разрезать на такие фигурки, то на доске было бы поровну клеток черного и белого цветов. Но это не так. Значит, требуемым способом разрезать доску нельзя.

6. *a, b и c — попарно различные натуральные числа, $b+c+bc$ делится на a, $c+a+ca$ делится на b, $a+b+ab$ делится на c. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c — не простое.*

Решение. По условию $b+c+bc+1=(b+1)(c+1)\equiv 1 \pmod a$. Поэтому

$$(a+1)(b+1)(c+1)\equiv 1 \pmod a.$$

Аналогичное сравнение справедливо и по модулям b и c. Следовательно,

$$(a+1)(b+1)(c+1)-1=abc+ab+bc+ac+a+b+c$$

делится на a, b и c. Если все три эти числа простые, то $abc+ab+bc+ac+a+b+c$ делится на abc, то есть $ab+bc+ac+a+b+c$ также делится на abc. Пусть $a<b<c$. Среди чисел a, b, c нет двойки (если $a=2$, то 2 является делителем нечётного числа $b+c+bc$), и потому $a\geqslant 3$, $b\geqslant 5$, $c\geqslant 7$. Тогда

$$bc\leqslant\frac{abc}{3},\quad ac\leqslant\frac{abc}{5},\quad ab\leqslant\frac{abc}{7},\quad c\leqslant\frac{abc}{15},\quad b\leqslant\frac{abc}{21},\quad a\leqslant\frac{abc}{35}.$$

Сложим эти шесть неравенств, мы получим

$$ab+bc+ac+a+b+c\leqslant abc\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}\Big)<abc,$$

что противоречит делимости левой части на abc.

Ягубов РФ

9 класс. Четвертый вариант

1. *Имеется неограниченное число фишек шести цветов. Какое наименьшее число фишек нужно расположить в ряд, чтобы для любых двух различных цветов в ряду нашлись две соседние фишки этих цветов?*

Ответ: 18 фишек.

Решение. По условию для каждого фиксированного цвета a фишка этого цвета должна встретиться в паре с фишкой каждого из остальных пяти цветов. Поскольку каждая фишка имеет не более двух соседей, фишка цвета a должна встретиться не менее трех раз. То же самое верно и для других цветов. Стало быть, всего должно быть не менее $3 \cdot 6 = 18$ фишек. Примеров такого расположения много, приведем один из них: 123456135142645263 (цифрами обозначены цвета).

2. *Пусть D — дискриминант приведенного квадратного трехчлена x^2+ax+b. Найдите корни трехчлена, если известно, что они различны и один из них равен D, а другой равен $3D$.*

Ответ: 1/4 и 3/4.

Первое решение. Заметим, что $D > 0$, в противном случае трехчлен не имеет двух различных корней. Значит, $D < 3D$. Тогда по формуле для корней квадратного уравнения

$$D = \frac{-a - \sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad 3D = \frac{-a + \sqrt{D}}{2}.$$

Следовательно,

$$2D = 3D - D = \frac{-a + \sqrt{D}}{2} - \frac{-a - \sqrt{D}}{2} = \sqrt{D}.$$

Таким образом, $D = \frac{1}{4}$ и искомые корни $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$.

Несложно проверить, что трехчлен $x^2 - x + \frac{3}{16}$ имеет корни $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ и дискриминант $\frac{1}{4}$.

Второе решение. Заметим, что $D > 0$, в противном случае трехчлен не имеет двух различных корней. По теореме Виета $-a = D + 3D = 4D$ и $b = D \cdot 3D = 3D^2$. По формуле для дискриминанта имеем $D = a^2 - 4b = (4D)^2 - 4 \cdot 3D^2 = 4D^2$. Таким образом, $D = \frac{1}{4}$ и искомые корни $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$.

Несложно проверить, что трехчлен $x^2 - x + \frac{3}{16}$ имеет корни $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ и дискриминант $\frac{1}{4}$.

3. *Вещественные числа x и y таковы, что $x^2 + xy + y^2 = x + y$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x^2 + y^2$.*

Ответ: 1.

Первое решение. Действительно,

$$x^2 + y^2 = 2(x + y) - (x + y)^2 = 1 - (x + y - 1)^2 \leqslant 1.$$

Равенство реализуется, например, при $x = 1$ и $y = 0$.

Второе решение. Можно считать, что $x \geqslant y$. Пусть $x \geqslant 1$, тогда $x^2 + xy = x(x + y) \geqslant x + y$ и, значит, $x^2 + xy + y^2 > x + y$, что противоречит условию задачи. Следовательно, $1 > x \geqslant y$. Таким образом,

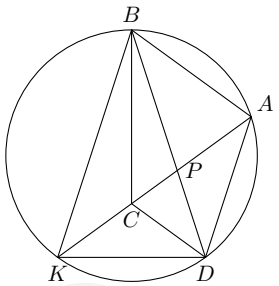
$$x^2 + y^2 = x + y - xy = 1 - (1 - x)(1 - y) \leqslant 1.$$

Осталось заметить, что числа $x = 1$ и $y = 0$ удовлетворяют условию задачи и для них $x^2 + y^2 = 1$.

4. *Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $\angle DAC = \angle BDC = 36^\circ$, $\angle CBD = 18^\circ$ и $\angle BAC = 72^\circ$, пересекаются в точке P. Найдите $\angle APD$.*

Ответ: 108.

Решение. Обозначим через K точку пересечения луча AC с описанной окружностью треугольника ABD. В силу равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, $\angle KBD = \angle KAD = 36^\circ$ и $\angle KDB = \angle KAB = 72^\circ$. Поэтому прямые DC и BC содержат биссектрисы треугольника KBD. Тогда и прямая KA содержит биссектрису угла BKD, откуда



$$\angle AKD = \frac{1}{2}\angle BKD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAK - \angle KAD) = 36^\circ \quad \text{и}$$
$$\angle APD = \angle KDP + \angle PKD = 72^\circ + 36^\circ = 108^\circ.$$

5. *Каждая клетка доски 13×13 может быть покрашена в черный или белый цвет. Изначально все клетки белые. Разрешается перекрасить все клетки любого прямоугольника 1×5 (вертикально или горизонтально расположенного) в противоположный цвет (белые – в черный, черные – в белый). Можно ли несколькими такими операциями перекрасить в чёрный цвет все клетки?*

1	2	3	4	5	1	...
2	3	4	5	1	2	...
3	4	5	1	2	3	...
4	5	1	2	3	4	...
5	1	2	3	4	5	...
...	...	...	...	...	...	...

Ответ: нельзя.

Решение. Пронумеруем клетки квадрата пятью цифрами так, чтобы клетки каждой диагонали, идущей слева-снизу направо-вверх, были занумерованы одинаково как показано на рисунке. При перекрашивании всех клеток прямоугольника 1×5 перекрашивается ровно по одной клетке каждого из пяти номеров. Но клеток с номером 1 — 33 штуки, а клеток с номером 2 — 34 штуки. Поэтому чтобы перекрасить все клетки с номером 1, нужно перекрасить нечётное число прямоугольников, а чтобы перекрасить все клетки с номером 2 — чётное. Стало быть, одновременно перекрасить их все не удастся.

6. *Натуральные числа a и b взаимно просты и $a > b > 1$. Для некоторого натурального n число $a^n - b^{n-1}$ кратно $a - b$. Докажите, что $a \leqslant 2b - 1$.*

Решение. По условию числа a и b взаимно просты, а значит, взаимно простыми будут числа a и $a - b$. Заметим, что число

$$a^{n-1}(a-1) = a^n - a^{n-1} = (a^n - b^{n-1}) - (a^{n-1} - b^{n-1})$$

делится на $a - b$, поскольку на $a - b$ делится каждая из скобок. Но тогда и число $a - 1$ делится на $a-b$. Таким образом, $a-1 = k(a-b)$ для некоторого натурального k. Поскольку $b > 1$, случай $k = 1$ невозможен. Поэтому $k \geqslant 2$ и, значит, $a - 1 = k(a - b) \geqslant 2(a - b)$. Следовательно, $2b - 1 \geqslant a$.

9 класс. Пятый вариант

1. В однокруговом турнире по бадминтону двое участников были дисквалифицированы после того, как каждый из них сыграл пять матчей. В результате в турнире было проведено всего 64 матчей (включая игры дисквалифицированных участников). Сколько бадминтонистов, включая дисквалифицированных игроков, играло в турнире?

Ответ: 13.

2. Решите уравнение

$$\big||x-2|-2\big| = \big||x-3|-3\big| = \big||x-4|-4\big| = \ldots = \big||x-2014|-2014\big|.$$

Ответ: $x \leqslant 2$.

3. Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство

$$\frac{1}{(1+2x)^2} + \frac{1}{(1+2y)^2} \geqslant \frac{1}{2x^2+2y^2+1}.$$

4. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки K и L такие, что $AK = AB$ и $AL = AD$. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на сторону AB из точек K и L соответственно. Докажите, что $AM + LN = AC$.

5. Каждая клетка доски 15×15 может быть покрашена в черный или белый цвет. Изначально все клетки белые. Разрешается перекрасить все клетки любого прямоугольника 1×7 (вертикально или горизонтально расположенного) в противоположный цвет (белые – в черный, черные – в белый). Можно ли несколькими такими операциями перекрасить в чёрный цвет все клетки?

Ответ: нельзя.

6. Даны натуральные числа $a > b > 1$. Известно, что наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел $a+1$ и $b+1$. А для некоторого натурального n число $a^{n+2} - b^n$ кратно $a - b$. Докажите, что $a \leqslant 2b - 1$.

Якубов РФ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Примеры заданий отборочного этапа (все классы).

2013/2014 учебный год.

Ягубов.рф

Примеры заданий для 10–11 классов

1.1 *Табуретки модели "Избушка" имеют по четыре ножки одинаковой формы. На складе мебельного магазина хранятся ножки от 10 фиолетовых, 5 синих и 4 коричневых табуреток. В случае отсутствия освещения на складе какое минимальное количество ножек нужно взять, чтобы на свету из них можно было заведомо собрать одну фиолетовую табуретку и одну коричневую табуретку?*

1) 11 ножек
2) 15 ножек
3) 64 ножки
4) 76 ножек
5) другой ответ

Ответ: 64 ножки.

Решение. При неудачном стечении обстоятельств может получиться, что вначале нам попадаются ножки табуреток исключительно ненужного нам синего цвета. Таких ножек 20 штук. Если и дальше обстоятельства складываются неудачно, то нам опять будут попадаться ножки хотя и нужного, но одного цвета. Максимальное их количество — 40 ножек (фиолетовых). Поскольку теперь на складе остались только ножки коричневых табуреток, а нам нужно собрать одну такую табуретку, то необходимо взять 4 ножки.

Поскольку описанная выше ситуация вполне может реализоваться, то ясно, что меньшего количества ножек может не хватить для составления одной фиолетовой и одной коричневой табуреток. □

1.2 *Табуретки модели "Змей Горыныч" имеют по три ножки одинаковой формы. На складе мебельного магазина хранятся ножки от 5 белых, 7 красных и 10 розовых табуреток. В случае отсутствия освещения на складе какое минимальное количество ножек нужно взять, чтобы на свету из них можно было заведомо собрать 2 табуретки одного цвета (любого)?*

1) 6 ножек
2) 16 ножек
3) 36 ножек
4) 66 ножек
5) другой ответ

Ответ: 16 ножек.

2.1 *Докажите, что если целые числа k, s, v удовлетворяют равенству $(k+6)^2 + (s+8)^2 - (v+10)^2 = k^2 + s^2 - v^2$, то обе части равенства суть точные квадраты.*

Решение. Раскрывая в равенстве скобки, приводя подобные слагаемые и сокращая на 4, получаем $3k + 4s - 5v = 0$, отсюда $k = \frac{5v-4s}{3}$ — по условию это число целое,то есть $5v - 4s$ кратно 3.

Подставим выражение для k в правую часть равенства:

$$k^2 + s^2 - v^2 = \frac{25v^2 + 16s^2 - 40vs}{9} + s^2 - v^2 =$$

$$= \frac{25s^2 + 16v^2 - 40vs}{9} = \left(\frac{5s - 4v}{3}\right)^2.$$

Полученное выражение будет являться точным квадратом только в том случае, когда $\frac{5s-4v}{3}$ целое. То есть необходимо показать, что $5s - 4v$ кратно 3. Заметим, что

$$5s - 4v = (5v - 4s) + 9s - 9v.$$

Выражение в скобках кратно 3, как указано выше, а кратность 3 двух последних слагаемых очевидна. □

2.2 *Докажите, что если целые числа k, s, v удовлетворяют равенству $(k-5)^2 + (s-12)^2 - (v-13)^2 = k^2 + s^2 - v^2$, то обе части равенства суть точные квадраты.*

3.1 *У Бабы Яги выросли три мухомора. Белых крапинок на шляпках всех трех грибов в сумме оказалось 120, но на каждом грибе в отдельности — не более 45. Докажите, что количества крапинок на любой паре грибов отличаются не больше, чем на 15.*

Первое решение. Обозначим через M — максимальное, а через m — минимальное количество крапинок на грибе. Предположим, что $M - m > 15$. Поскольку по условию $M \leqslant 45$, то $m < 30$, и мы в таком случае получаем, что $M + m < 75$. Следовательно, количество крапинок, которое приходится на оставшийся гриб, равно $120 - (M + m) > 45$. Получаем противоречие с условием, значит, наше предположение неверно. □

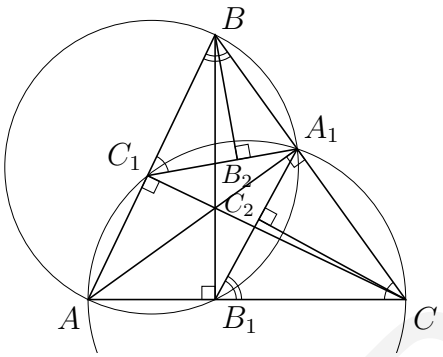
Второе решение. Заметим, что на каждом мухоморе имеется хотя бы $120 - 45 - 45 = 30$ крапинок; то есть на каждом грибе — от 30 до 45 крапинок. Следовательно, количества крапинок на любых двух грибах различаются не более, чем на $45 - 30 = 15$. □

3.2 *Три богатыря — Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович вместе съели 750 блинов. При этом каждый из них съел не более 280 блинов. Докажите, что количества съеденных блинов любыми двумя богатырями отличаются не больше, чем на 90.*

ЯКласс.РФ

4.1 *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть CC_2 — высота треугольника CA_1B_1, BB_2 — высота треугольника BA_1C_1. Докажите, что $C_1B_2 = B_1C_2$.*

Решение.



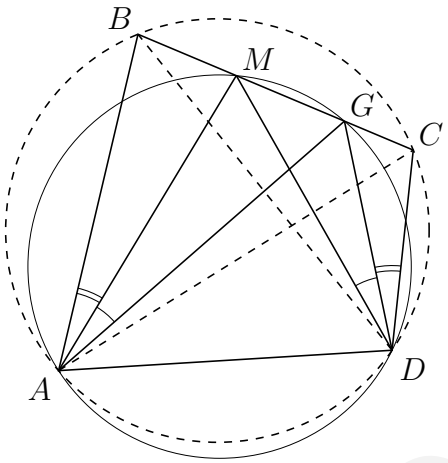
Четырехугольник AC_1A_1C вписанный, так как $\angle AC_1C = \angle AA_1C = 90°$. Из вписанности получаем $\angle AC_1A_1 + \angle BCA = 180°$, откуда $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$. Следовательно, треугольники BC_1B_2 и BCB_1 соответственно подобны по прямому и острому углам. А тогда имеем $C_1B_2 = CB_1 \cdot BC_1/BC$.

Аналогично рассматривая вписанный четырехугольник ABA_1B_1, получаем подобие треугольников CC_2B_1 и CC_1B, откуда следует, что отрезок B_1C_2 равен тому же самому выражению. □

4.2 *На стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки M и G (точка M лежит между B и G) так, что угол BAM равен углу CDG и угол MAG равен углу MDG. Докажите, что угол CAG равен углу BDM.*

Ягубов Ф

Решение.



Заметим, что из равенства углов $\angle MAG = \angle MDG$ следует вписанность четырехугольника $AMGD$, откуда $\angle MAD = 180^\circ - \angle MGD$. Угол $\angle MGD = \angle GCD + \angle GDC$ как внешний угол треугольника GDC. Тогда $\angle BAD = \angle BAM + \angle MAD = \angle BAM + 180^\circ - \angle MGD = \angle BAM + 180^\circ - \angle GCD - \angle CDG = 180^\circ - \angle GCD$, откуда получаем, что четырехугольник $BADC$ вписанный, а, следовательно, $\angle BAC = \angle BDC$, то есть $\angle BAM + \angle MAG + \angle GAC = \angle CDG + \angle MDG + \angle BDM$. Сокращая равные углы, получаем $\angle GAC = \angle BDM$.□

5.1 *Вася расставляет трёхзначные числа, в записи которых имеетсяпо одной единице, одной двойке и одной тройке, в вершины правильного 50-угольника таким образом, чтобы в каждой вершине оказалось по одному числу и любые два числа, стоящие в соседних вершинах, совпадали ровно в одном разряде. Докажите, что после этого будут совпадать ровно в одном разряде и любые два числа, стоящие в противоположных вершинах.*

Решение. Заметим, что трехзначных чисел, у которых ровно одна единица, одна двойка и одна тройка, ровно 6, а именно 123, 132, 213, 231, 312, 321. Разделим их на два типа. Первый — 123, 231, 312; второй — 132, 213, 321. Заметим, что любое число первого типа совпадает ровно в одном разряде с любым числом другого (второго) типа, а с числами своего (первого) типа не совпадает ни в одном; то же самое верно и для чисел второго типа. Из этого мы можем сделать вывод, что числа, стоящие в вершинах, чередуются: первого типа, второго типа, первого, второго и так далее. Так как число 50 чётное, но не делится на 4, то две противоположные вершины рассматриваемого 50-угольника разделены чётным числом других вершин. Поэтому в противоположных вершинах стоят числа разных типов, а, следовательно, они будут отличаться ровно в одном разряде. □

5.2 *У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 выписан наибольший нечётный делитель. Каких среди выписанных чисел больше: дающих остаток 1 или дающих остаток 3 при делении на 4?*

Ответ: чисел, дающих остаток 1.

Решение. Разобьем все числа, не превосходящие миллиона, на группы. Первая группа — это нечетные числа. Вторая группа — это числа, которые делятся на 2, но не делятся на 4, третья группа — числа, которые делятся на 4, но не делятся на 8, и так далее; k-я группа — это числа, которые делятся на 2^{k-1}, но не делятся на 2^k. Заметим, что для чисел из первой группы мы будем выписывать сами эти числа, для чисел из второй группы — половину числа, и так далее; для чисел из k-й группы мы будем выписывать число, поделённое на 2^{k-1}. Докажем, что от каждой группы чисел, дающих остаток 1, будет выписано не меньше, чем чисел, дающих остаток 3. Действительно, числа, которые будут выписаны для каждой группы, это нечетные числа из начального отрезка натурального ряда: 1, 3, 5, ..., а в нём, в силу чередования, чисел с остатками 1 и 3 от деления на 4 либо поровну, либо с остатком 1 больше.Осталось показать, что чисел с остатком 1 строго больше. Для этого достаточно найти хотя бы одну группу, в которой их больше. Рассмотрим группу чисел, которые делятся на 64, но не делятся на 128. Для них будут выписаны числа 1, 3, 5, 7, ..., $1000000/64 = 125^2$, очевидно, что последнее число дает остаток 1 от деления на 4, следовательно, в этом ряду таких чисел больше. □

6.1 *Ребята в классе решают квадратное уравнение с параметром a ($|a| \neq 1$)*

$$(a^2-1)x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0\,.$$

Маша заметила, что если параметр a принимает рациональные значения, то и корни этого уравнения — рациональные числа. Права ли Маша? Ответ обоснуйте.

Ответ: Да, права.

Решение. Запишем формулу для корней данного квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-(2a-a^2)(a^2-1)}}{a^2-1}.$$

Для того, чтобы Маша оказалась права, после извлечения корня в числителе у нас должно получаться рациональное число при любых рациональных a. Проверим, так ли это, для нескольких случаев, взяв для простоты целые a. При $a = 2$ получаем, что подкоренное выражение равно $1 = 1^2$, при $a = 3$ подкоренное выражение равно $25 = 5^2$, а при $a = 4$ подкоренное выражение равно $121 = 11^2$. Такое систематическое получение квадрата целого числа в качестве значения подкоренного выражения наводит на мысль о том, что само это выражение является полным квадратом. Проверим это предположение. Раскроем скобки:

$$1-(2a-a^2)(a^2-1) = a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1\,.$$

Многочлен 4-й степени может быть квадратом многочлена 2-й степени, который, очевидно, имеет вид $a^2 + ka \pm 1$, где k — неизвестный числовой коэффициент. После возведения в квадрат

$$(a^2+ka\pm 1)^2 = a^4 + 2ka^3 + (k^2 \pm 2)a^2 \pm 2ka + 1$$

замечаем, что искомый многочлен 2-й степени есть $a^2 - a - 1$. Таким образом,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(a^2 - a - 1)^2}}{a^2 - 1} = \frac{1 \pm |a^2 - a - 1|}{a^2 - 1}.$$

Данное выражение является рациональным при любых рациональных значениях параметра a, так что Маша оказалась права. □

6.2 *Ребята в классе решают квадратное уравнение с параметром a ($a \neq 1$, $a \neq -1$)*

$$(a^2 + a)x^2 - 2x - a^2 - 5a - 6 = 0\,.$$

Сережа утверждает, что если параметр a принимает рациональные значения, то и корни этого уравнения — рациональные числа. Прав ли Сережа? Ответ обоснуйте.

Ответ: Да, прав.

7.1 *Два конькобежца Иван и Евгений совместно тренируются для выступления на Олимпиаде. Тренер заметил, что если спортсмены бегут со своей обычной скоростью, то Иван проходит дистанцию на 8 секунд быстрее Евгения. Но если каждый из спортсменов увеличит свою скорость на 10 км/ч, то разница между результатами становится на 3 секунды меньше. Какое из следующих утверждений является верным, если скорости спортсменов — целые числа:*

1) Скорость (до увеличения) каждого из спортсменов кратна 3;

2) Произведение скоростей (до увеличения) спортсменов кратно 50;

3) Сумма скоростей (после увеличения) спортсменов кратна 3;

4) Скорости спортсменов — нечётные числа.

Ответ: утверждение 2 истинно; утверждения 1, 3 и 4 ложные.

Решение. Обозначим дистанцию, на которой тренируются Иван и Евгений через d, а их обычные скорости через v_i и v_e соответственно. Скорости спортсменов будем измерять в км/ч, поэтому заданные в условии промежутки времени переведём в часы: 8 $c = 1/450$ ч, 5 $c = 1/720$ ч. Запишем соотношение, выражающее разницу между результатами Ивана и Евгения, когда они бегут со своими обычными скоростями:

$$d/v_e - d/v_i = 1/450\,, \qquad \text{откуда} \qquad d(v_i - v_e) = v_e v_i/450\,.$$

Для разницы между результатами спортсменов после увеличения их скоростей имеем

$$d/(v_e + 10) - d/(v_i + 10) = 1/720$$

или, с учётом предыдущего равенства,

$$\frac{v_e\, v_i}{(v_e + 10)(v_i + 10)} = \frac{450}{720}\,.$$

Отсюда получаем

$$8v_e v_i = 5(v_e + 10)(v_i + 10)\,.$$

Раскрывая здесь скобки и приводя подобные слагаемые, будем иметь

$$3v_e v_i = 50(v_e + v_i + 10)\,.$$

Рассматривая это равенство, мы можем ответить на поставленные вопросы.

1) Если скорости v_i и v_e кратны 3, то правая часть последнего равенства не может быть кратна 3, поскольку в этом случае $v_e + v_i + 10$ на 3 не делится. В то же время левая часть этого равенства делится на 3. Соответственно, данное утверждение ложно;
2) Очевидно, это утверждение истинно;
3) Утверждается, что $(v_e + 10) + (v_i + 10) = v_e + v_i + 20$ делится на 3. Но это означает, что $v_e + v_i + 10$ на 3 делиться не может. Таким образом, здесь мы имеем ложное утверждение по той же причине, что и в случае 1.
4) Ясно, что обе скорости не могут быть нечётными, так как в этом случае левая часть рассматриваемого равенства нечётна, а правая часть является чётной. □

Замечание. Пары значений скоростей спортсменов, удовлетворяющие условию задачи, можно найти подбором. При этом условие, что $v_i\, v_e$ делится на 50, существенно ограничивает возможные варианты перебора: очевидно, достаточно рассмотреть случаи, когда либо одна из скоростей делится на 50, либо одна из скоростей делится на 10. Таким образом можно видеть, что подходящими парами, в которых обе скорости не превосходят 100 км/ч, являются $v_i = 50$ км/ч и $v_e = 30$ км/ч, $v_i = 70$ км/ч и $v_e = 25$ км/ч, $v_i = 100$ км/ч и $v_e = 22$ км/ч (напомним, что значения скоростей должны быть целыми числами). Учитывая, что даже и скорость 100 км/ч уже слишком велика для разумной средней скорости конькобежца, другие возможные пары искать смысла нет.

7.2 *Друзья Миша, Петя и Ваня подрабатывают курьерами. Миша и Петя выходят из офиса компании «Работяги» в 8 и 9 утра соответственно и направляются в офис компании «Деловые люди». Ваня выходит из офиса компании «Деловые люди» в 9 утра и идёт в офис компании «Работяги» той же дорогой. По пути Ваня встречает Мишу в 10 утра, а Петю — в 11 утра. Укажите, какое из следующих утверждений является верным:*

1) Петя ходит быстрее Миши;
2) Ваня ходит в два раза быстрее Миши;
3) Если Петя вышел из офиса первым и удалился от него на 1 км, то Миша может догнать Петю за такое же время, за которое Ваня может пройти 2 км;
4) Если Петя вышел из офиса на час раньше Миши, то пока Миша догоняет Петю, Ваня за это время может пройти столько, сколько Петя проходит за 1 час.

Ответ: утверждение 3 истинно; утверждения 1, 2 и 4 ложные.

8.1 *Найдите все интервалы вида $(k, k+1)$, где k — целое число, содержащие нули функции $f(x) = ((x^3-1)^3-1)^3-1$.*

Ответ: такой интервал существует только один — $(1, 2)$.

Первое решение. Пусть $g(x) = x^3 - 1$. Тогда, очевидно, $f(x) = g(g(g(x)))$. Функция $g(x)$ строго возрастает на всём промежутке своего определения (то есть на всей числовой оси), поэтому и функция $f(x)$ также является строго возрастающей на всей числовой оси. Следовательно уравнение $f(x) = 0$ может иметь только одно решение. Заметим, что $f(0) = (-1-1)^3 - 1 = -9 < 0$, $f(1) = = (0-1)^3 - 1 = -2 < 0$, а $f(2) = ((8-1)^3-1)^3 - 1 > 0$. Поэтому единственный нуль функции $f(x)$ лежит на интервале $(1, 2)$. □

Второе решение. Попробуем найти корни уравнения $f(x) = 0$. Последовательно выполняя действия, получим

$$f(x) = 0 \iff ((x^3-1)^3-1)^3 = 1 \iff (x^3-1)^3 - 1 = 1 \iff (x^3-1)^3 = 2 \iff$$

$$\iff x^3 - 1 = \sqrt[3]{2} \iff x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}+1}\,.$$

Определим интервал, на котором находится этот корень. Очевидно,

$$0 < \sqrt[3]{2} \implies 1 < \sqrt[3]{2}+1 \implies 1 < \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}+1}\,.$$

Аналогично имеем

$$7 > \sqrt[3]{2} \implies 8 > \sqrt[3]{2}+1 \implies 2 > \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}+1}\,.$$

Таким образом, единственный искомый интервал есть $(1, 2)$. □

8.2 *Найдите все значения параметра a, при которых неравенство*

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (x+1)^2 \leqslant a$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = 2$.

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 + 1/x^2 + (x+1)^2$. Область определения и непрерывности этой функции — вся числовая ось за исключением точки $x = 0$; значения этой функции неограничены сверху. Пусть a_1 — одно из искомых значений параметра a. Очевидно, что при этом не может существовать x_1 такое, что $f(x_1) < a_1$, иначе, в силу непрерывности $f(x)$ и неограниченности сверху её значений, должно существовать и x_2 такое, что $f(x_1) < f(x_2) < a_1$. Таким образом, в этом случае при значении $a = a_1$ будет существовать более одного решения рассматриваемого неравенства. Отсюда ясно, что искомым значением параметра a, и притом единственным, может быть только минимальное значение функции $f(x)$ на всей области её определения. Найдем его.

Первый способ. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 + 1/x^2$ и исследуем ее свойства. Область определения функции $g(x)$ совпадает с областью опредения функции $f(x)$. Поскольку $g'(x) = 2x - 2/x^3$ и корнями выражения $x - 1/x^3$ являются $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, то, используя метод интервалов, получаем,

что функция $g(x)$ убывает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$ и возрастает на промежутках $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$. Легко найти, что $g(-1) = g(1) = 2$. Теперь заметим, что функция $h(x) = (x+1)^2$ при отрицательных значениях x ведет себя так же как и функция $g(x)$, то есть убывает на промежутке $(-\infty, -1)$ и возрастает на промежутке $(-1, 0)$. Отсюда получаем, что минимальное значение $f(x)$ при отрицательных значениях x достигается при $x = -1$ и равно $2+0 = 2$. С другой стороны, при положительных значениях x функция $h(x)$ принимает значения строго большие 1, следовательно, здесь $f(x) = g(x) + h(x) > 2 + 1 = 3$.

Второй способ. Воспользуемся неравенством Коши:

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \geqslant \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}\,.$$

Тогда имеем

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (x+1)^2 \geqslant 2 + (x+1)^2\,.$$

Минимальное значение неотрицательного числа $(x+1)^2$ есть 0, соответственно, минимальное значение правой части этого неравенства есть 2. Это значение достигается при $x = -1$. При этом же x использованное нами неравенство Коши обращается в равенство. То есть $f(x)$ на самом деле достигает этого минимального значения: $f(-1) = 2$.

Таким образом мы получили, что минимальное значение функции $f(x)$ равно 2 и оно достигается при единственном значении x ($x = -1$). Отсюда искомое значение параметра a равно 2. □

9.1 *Студент Петя на каникулах подрабатывает укладкой тротуарной плитки. У него в распоряжении имеется менее 1000 плиток. Если он выложит широкую дорожку по 29 плиток в каждом ряду, то у него останется 11 плиток; если же он выложит узкую дорожку по 23 плитки в каждом ряду, то у него останется 5 плиток. Сколько плиток у Пети?*

Ответ: 649 плиток.

Решение. Пусть L — число плиток у Пети, m — число рядов в широкой дорожке, а n — число рядов в узкой дорожке ($L, m, n \in \mathbb{N}$). По условию $L = 29m + 11 = 23n + 5$. Отсюда

$$23(m-n) + 6m + 6 = 0\,.$$

Следовательно, $n - m = 6(m+1)/23$. Заметим, что число $n - m$ является натуральным, поэтому $m + 1$ должно делиться на 23 нацело. Преобразуем

$$L = 29m + 11 = 29m + 29 - 18 = 29(m+1) - 18\,.$$

Отсюда $29(m+1) = L + 18$. Так как $L < 1000$, то $29(m+1) < 1018$. Учитывая, что $m + 1 \in \mathbb{N}$, получим $m + 1 < 36$. Единственное натуральное число, которое делится на 23 и удовлетворяет этому условию есть 23. Таким образом, $m = 23 \Rightarrow L = 649$. □

Яуров.рф

9.2 *Дачник Николай Петрович сажает картошку. Он подготовил к высадке менее 1000 клубней. Если он будет сажать рядами по 29 лунок, то у него останется 4 клубня; если увеличить длину каждого ряда на 2 лунки, то у Николая Петровича останется 6 клубней. Сколько клубней подготовил дачник?*

Ответ: 874 плиток.

Ягубов.рф

Примеры заданий для 9-го и младших классов

1.1 *Табуретки модели "Избушка" имеют по четыре ножки одинаковой формы. На складе мебельного магазина хранятся ножки от 10 белых, 5 синих и 4 коричневых табуреток. В случае отсутствия освещения на складе какое минимальное количество ножек нужно взять, чтобы на свету из них можно было заведомо собрать 2 табуретки разных цветов?*

1) 12 ножек

2) 47 ножек

3) 70 ножек

4) другой ответ

Ответ: 47 ножек.

Решение. При неудачном стечении обстоятельств может получиться, что вначале нам попадаются ножки табуреток исключительно одного цвета. Но поскольку табуреток одного цвета на складе не более 10, то более 40 ножек одного цвета мы взять не сможем. Из них мы легко соберем одну из требующихся нам табуреток. Осталось взять ножки еще для одной. Нетрудно заметить, что даже если среди следующих шести взятых ножек будут три одного цвета, а три другого, то следующая, седьмая, взятая ножка даст возможность для составления табуретки либо одного, либо другого цвета.

Поскольку описанная выше ситуация вполне может реализоваться, то ясно, что меньшего количества ножек может не хватить для составления двух табуреток разных цветов. □

1.2 *Табуретки модели "Змей Горыныч" имеют по три ножки одинаковой формы. На складе мебельного магазина хранятся ножки от 5 белых, 5 красных и 10 розовых табуреток. В случае отсутствия освещения на складе какое минимальное количество ножек нужно взять, чтобы на свету из них можно было заведомо собрать 2 розовые табуретки?*

1) 12 ножек

2) 36 ножек

3) 60 ножек

4) другой ответ

Ответ: 36 ножек.

2.1 *Предложите несколько натуральных чисел, чьи сумма и произведение равнялись бы 2013.*

Ответ: Например, 3, 671, $\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{1339\ \text{штук}}$; 3, 11, $\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{1938\ \text{штук}}$.

Решение. Разложим 2013 на множители:

$$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61.$$

Для получения ответа необходимо использовать эти множители (одиночно или группируя), а также количество единиц, дополняющее сумму взятых чисел до числа 2013. Очевидно, на величину произведения единицы не повлияют. □

2.2 *Предложите несколько целых чисел, чьи сумма и произведение равнялись бы 2014.*

Ответ: Например, 38, 53, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{1923 \text{ штуки}}$; -1, -2, 1007, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{1010 \text{ штук}}$.

3.1 *На доске выписаны числа 1, 2, ..., 225. Ваня выбирает из них 112 чисел. Докажите, что Петя сможет среди выбранных чисел либо найти два, сумма которых равна 225, либо найти число, являющееся квадратом натурального числа.*

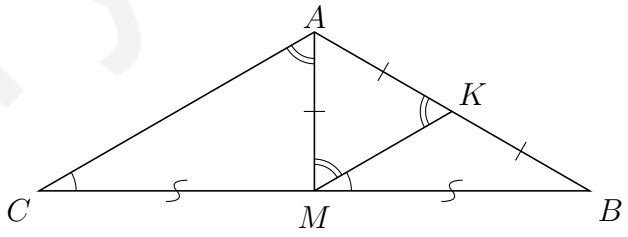
Решение. Разобьем числа от 1 до 224 на пары следующим образом: 1 и 224, 2 и 223, 3 и 221, ..., 112 и 113. Очевидно, что сумма чисел в каждой из пар равна 225 и таких пар 112. Также легко заметить, что в одной из пар оба числа являются квадратами натуральных чисел ($81 = 9^2$ и $144 = 12^2$).

Чтобы не выполнялись оба указанных свойства, из пары (81, 144) брать числа нельзя, из любой другой пары не должно быть выбрано более одного числа, также не должно быть выбрано число 225, равное 15^2. Но по такому правилу выбрать более 111 чисел нельзя. □

3.2 *На доске выписаны числа 1, 2, ..., 289. Маша выбирает из них 144 числа. Докажите, что Нина сможет среди выбранных чисел либо найти два, сумма которых равна 289, либо найти число, являющееся квадратом натурального числа.*

4.1 *AM — медиана треугольника ABC. Оказалось, что угол ACB в два раза меньше угла CAM, а сторона AB в два раза больше медианы AM. Найдите углы треугольника.*

Ответ: 120°, 30°, 30°.



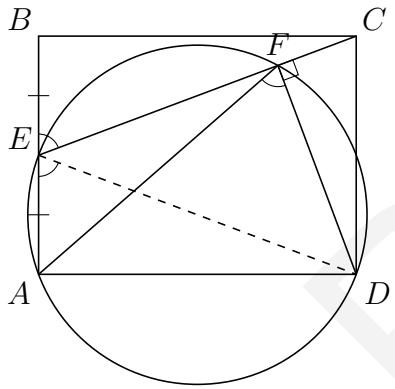
Решение. Обозначим угол ACM за α и пусть K — середина стороны AB, тогда MK — средняя линяя треугольника. Далее имеем: $\angle CAM = 2\alpha$ (по условию), $\angle KMB = \angle ACM = \alpha$ (как соответствующие углы при параллельных прямых), $\angle AMK = \angle CAM = 2\alpha$ (как накрест лежащие), $\angle AKM = \angle AMK = 2\alpha$ (как углы при основании равнобедренного треугольника AKM). Рассмотрев треугольники AMK и AMB имеем $4\alpha + \angle MAK = 180°$ и $3\alpha + \angle MAK + \angle MBA = 180°$.

Ягубов.рф

Отсюда получаем, что $\angle MBA = \alpha$ и, следовательно, треугольник MKB равнобедренный и $KB = KM$. Теперь имеем, что треугольник AMK — равносторонний. Отсюда $2\alpha = 60°$ и $\angle ACB = \angle CBA = 30°$, $\angle CAB = 120°$. □

4.2 *В четырехугольнике $ABCD$, где $AB < 2AD$, а все углы прямые, точка E — середина стороны AB, а F — такая точка на отрезке CE, что угол CFD равен 90 градусов. Докажите, что треугольник FAD — равнобедренный.*

Первое решение.

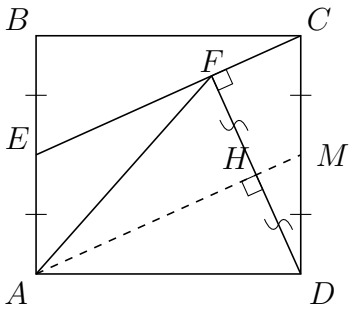


Заметим, что $ABCD$ — прямоугольник, а точка F лежит внутри него (это следует из условия $AB < 2AD$). Поскольку в четырехугольнике $AEFD$ углы A и F прямые, то есть дают в сумме 180°, то вокруг него можно описать окружность. Из равенств $\angle ADF + \angle AEF = 180°$ и $\angle AEF + \angle FEB = 180°$ имеем, что $\angle ADF = \angle BEF$.

С другой стороны, $\angle BEC = \angle AED$ (это следует из равенства треугольников BEC и AED), но $\angle AED = \angle AFD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Таким образом, $\angle AFD = \angle BEC = \angle ADF$ и, следовательно, треугольник FAD равнобедренный. □

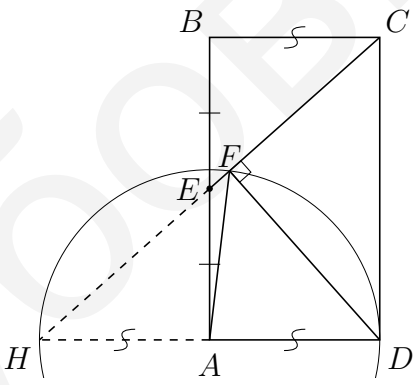
ЯгубоВ.рф

Второе решение.



Пусть M — середина стороны CD, а H — точка пересечения AM и DF. Поскольку $ABCD$ прямоугольник, то $AM \| EC$. Поэтому, по теореме Фалеса, AM делит DF пополам, то есть AH является медианой треугольника AFD. С другой стороны, $DF \perp EC$ и $AH \| EC$, то есть $AH \perp DF$ и является, таким образом, высотой треугольника ADF. Отсюда получаем, что треугольники AHD и AHF равны (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $AD = AF$ и треугольник FAD — равнобедренный. □

Третье решение.



Заметим, что наш четырехугольник является прямоугольником. Продолжим прямую CE до пересечения с продолжением стороны AD — пусть это будет точка H. Поскольку $\angle HEA = \angle BEC$, $\angle HAE = \angle EBC$, $AE = EB$, то треугольники HAE и EBC равны. Следовательно, $HA = BC = AD$ и точка A является центром описанной возле прямоугольного треугольника HFD окружности. Отсюда получаем, что $AF = AD$. Таким образом, треугольник FAD равнобедренный. □

5.1 *Маша изучает последовательность чисел $a_n = 3n + 2$, где n — натуральное число. Если в последовательности получается простое число, то Маша записывает на специальный листок число $a_n + 19$. Какое значение имеет наибольший общий делитель любых трёх записанных на листок чисел?*

Ответ: 6.

Дубов.рф

Решение. Очевидно, минимальное простое число последовательности a_n равно 5. Обозначим числа, записанные на листке через b_n. Все числа b_n чётные, т.к. являются суммой двух нечётных чисел. Далее, $b_n = 3n + 2 + 19 = 3(n + 7)$. Таким образом, наибольший общий делитель (НОД) всех чисел, записанных на листке не меньше 6. Первые два числа b_n — это 24 и 30. НОД этих чисел равен 6. Соответственно, НОД *любых* трёх записанных на листке чисел уже не может быть больше этого значения. □

5.2 *Василий изучает последовательность чисел $a_n = 3\,n + 1$, где n — натуральное число. Если в последовательности получается простое число, то Василий записывает на специальный листок число $a_n + 17$. Какое значение принимает наибольший общий делитель любых трех записанных на листок чисел?*

Ответ: 6.

Ягубов.рф