Южно-Уральская олимпиада школьников по математике
Задания, ответы и критерии оценивания очного тура
2009 – 2010 уч. год

Вниманию участников! Оцениванию подлежали только правильно решенные задачи или задачи, содержащие идеи, ведущие к правильному решению. Отдельные верные рассуждения, не приводящие к решению не оцениваются.

1. Иван Петрович каждый день в одно и то же время выезжает на своём автомобиле на работу. Если он едет со средней скоростью 40 км/ч, то он прибывает на работу в 8 ч 03 мин. Если его средняя скорость 60 км/ч, то он приезжает в 7 ч 57 мин. С какой средней скоростью нужно ехать Ивану Петровичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8 ч?

Ответ: 48 км/ч.

Оценивание. Верное аргументированное решение — 12 б.

Решение. Пусть t — время (в ч), которое потребуется Ивану Петровичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8.00, а s — расстояние (в км) от его дома до его работы. Тогда

$$s = 40\left(t + \frac{1}{20}\right) = 60\left(t - \frac{1}{20}\right),$$

откуда $20t = 5$, $t = \frac{1}{4}$, $s = 12$, $v = \frac{s}{t} = 48$.

Замечание. Многие участники при решении задачи время считали в минутах, а расстояния – в километрах. Ответ при этом получается верный, однако решение – нет.

2. Решить уравнение

$$(x-2)\log_3(x^2) = 2|x-2|.$$

Ответ: $\pm\frac{1}{3}; 2; 3$.

Решение. Очевидно, 2 — корень уравнения.

Если $x > 2$, то $\log_3(x^2) = 2$, откуда $x = 3$.

Если $x < 2$, то $\log_3(x^2) = -2$, откуда $x = \pm\frac{1}{3}$.

Оценивание. Верное аргументированное решение — 10 б

Замечание. наиболее распространенная ошибка – потеря корней $x = 2, x = -\frac{1}{3}$ и/или включение в число корней $x = -3$.

3. Магазин открылся в 8.00. Каждую минуту в магазин либо один покупатель входит, либо двое выходят. Может ли в 11.00 в магазине находится ровно 91 покупателей?

Ответ: нет.

Решение. Пусть в течение x мин в магазин входило по одному покупателю. Тогда в течение $180 - x$ мин выходило по два покупателя. Если в 11.00 в магазине 91 покупателей, то

$$91 = x - 2(180 - x),$$

откуда $3x = 451$, что невозможно при целом x.

Оценивание. Верное решение — 12 б.

Замечание. Тем из участников, которые посчитали, что с 8.00 и до 11.00 проходит 181 минута, правильное решение (т.е. ответ – ДА), было засчитано, несмотря на неверно понятое условие задачи. Такое решение оценивалось 8-10 баллами.

4. Система

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y \geqslant 3xy^2 - y^3; \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости Oxy отрезок. Найти его длину.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(x + y)(x^2 - 4xy + y^2) \geqslant 0.$$

Учитывая, что $x + y = -1$, имеем

$$x^2 - 4xy + y^2 \leqslant 0, \quad x^2 + 4x(1 + x) + (x + 1)^2 \leqslant 0, \quad 6x^2 + 6x + 1 \leqslant 0,$$

откуда $\frac{-3-\sqrt{3}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{-3+\sqrt{3}}{6}$. Значит, длина проекции отрезка на ось Ox равна $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Угловой коэффициент прямой $y + x + 1 = 0$, на которой лежит наш отрезок, равен -1. Поэтому острый угол между отрезком и осью Ox равен $45°$. Отсюда длина отрезка $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Другой вариант рассуждений: условие задачи симметрично относительно переменных x и y, в силу чего проекции отрезка на обе оси равны между собой.

Третий вариант решения: просто найти координаты точек пересечения прямой и квадратичного условия (пары прямых) и расстояние между этими точками.

Оценивание. Верное решение — 14 б, наличие арифметических ошибок – 10 баллов, правильная, но нереализованная вычислениями идея — 7 баллов.

Замечание. Многие участники не справились с заключительным этапом решения – нахождением длины. Такие решения оценивались 10 баллами.

5. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка E так, что

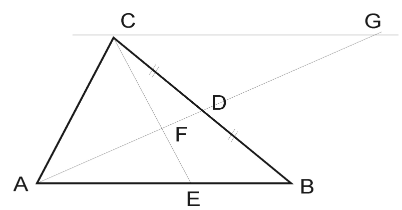
$$AE : EB = CF : FE = k,$$

где F — точка пересечения отрезка CE и медианы AD. Найти k.

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Первое решение. Воспользуемся методом масс. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс был в точке F. Для этого необходимо и достаточно, чтобы центр масс, расположенных в точках A и B, был в точке E, а в точках C и B — в точке D. Поскольку $AE : EB = k$, масса в вершине B должна быть в k раз больше, чем в точке A. Пусть в т. A масса 1, тогда в т. B масса k, как и в т. C. Сгруппируем массы в точках A и B, заменив их массой величиной $k+1$ в т. E. Так как центр масс, расположенных в точках C и E есть т. F, имеем согласно правилу рычага $k^2 = k+1$, откуда и находится k.

Второе решение. Проведем CG параллельно AB. Очевидно $\Delta AFE \sim \Delta GFC$.



Отсюда:

$$k = \frac{CF}{FE} = \frac{CG}{AE} = \frac{AB}{AE} = \frac{k+1}{k},$$

откуда k удовлетворяет условиям

$$k^2 - k - 1 = 0, \quad k > 1 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Замечание. Задача опубликована под номером Q995 в журнале The College Mathematics Journal, Vol. 82, No. 5 (Dec., 2009), p. 383. Авторы задачи М. Гольденберг и М. Каплан.

Оценивание. Верное аргументированное решение — 16 б.

6. Имеется квадратное клетчатое поле 8×8, составленное из квадратов со стороной 1. В каждой клетке написано по числу. Если центры трёх клеток образуют треугольник с длинами сторон 3, 4 и 5, то числа, записанные в этих клетках, дают в сумме нуль. Следует ли отсюда, что во всех клетках записаны нули?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника 4×3. Пусть в левой нижней клетке записано число x, в левой верхней — число y, в правой верхней — число z, в правой нижней — число t. Рассматривая треугольники, на которые указанный прямоугольник делится его диагоналями, получим четыре уравнения

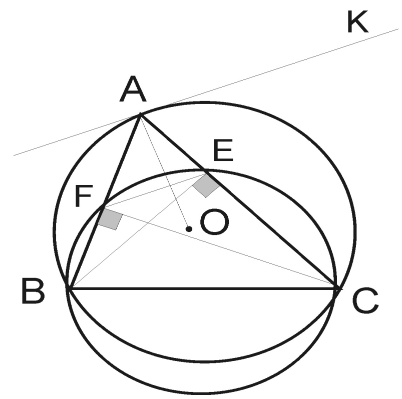
$$x + y + z = x + t + z = y + x + t = y + z + t = 0,$$

из которых легко получить, что $x = y = z = t = 0$. Поскольку для каждой клетки поля найдётся прямоугольник нужного размера, вершиной которого является центр клетки, получаем, что нули будут во всех клетках.

Замечание. Задача (в варианте бесконечного клетчатого поля) опубликована в журнале «Квант» (2010, №1, Конкурс имени А.П. Савина «Математика 6-8», с. 35). Автор задачи А. Эвнин.

Оценивание. Верное решение — 18 б.

7. В треугольной пирамиде $ABCD$ боковые рёбра DA, DB и DC равны по длине. Основание пирамиды — остроугольный треугольник ABC. В нём проведены высоты BE и CF. Доказать, что ребро DA перпендикулярно отрезку EF.



Доказательство. Пусть O — проекция вершины D на плоскость ABC. Из равенства боковых рёбер пирамиды следует, что O — центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды. По теореме о трёх перпендикулярах $DA \perp EF \iff OA \perp EF$.

Проведём касательную AK к окружности, описанной вокруг основания пирамиды. Угол между касательной AK и секущей AC равен вписанному углу ABC, опирающемуся на дугу окружности, заключённую между касательной и секущей.

В то же время, поскольку из точек E и F отрезок BC виден под прямым углом, четырёхугольник $BFEC$ является вписанным (в окружность с центром в середине отрезка BC). Отсюда заключаем, что $\angle FEB = \angle FCB = \dfrac{\pi}{2} - \angle ABC$. Поэтому $\angle FEA = \dfrac{\pi}{2} - \angle FEB = \angle ABC$. Из равенства внутренних накрест лежащих $\angle FEA = \angle KAE$ заключаем, что $AK || FE$. Но $AK \perp AO$. Стало быть, и $FE \perp AO$, что и требовалось доказать.

Оценивание. Верное решение — 18 б.

Замечание. Правильное использование теоремы о трех перпендикулярах (сведение задачи к плоской) оценивалось 4 б.

Южно-Уральская олимпиада школьников по математике
Задания и ответы заочного тура (2010/2011 уч.г.)

1. Найдите меньший корень уравнения $x^2+(15+17)x+17\cdot 15=0$.

Ответ: $x=-17$.

2. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\left(x^2-8x+15\right)^2=0 ?$$

Ответ: 1.

3. Найдите наибольший корень уравнения

$$\left|2x^2+5x+3\right|+2x^2+5x+3=0.$$

Ответ: -1.

4. Вычислите $\sqrt{18-8\sqrt{2}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}$.

Ответ: 8.

5. Найдите среднее арифметическое чисел: $2,\ 5,\ 8,...,98$.

Ответ: 50.

6. У старшего брата денег на 25% больше, чем у младшего брата. Сколько процентов своих денег он должен отдать младшему брату, чтобы денег у них стало поровну?

Ответ: 10%.

7. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12.

Ответ: 2.

8. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 24, все боковые ребра имеют длину 13. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: 5.

9. Пусть $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}1$. Найдите $\sin 2\alpha$.

Ответ: $-0{,}21$.

10. Найдите наибольшее значение функции $y=4\sin x-3\cos x$.

Ответ: 5.

11. При каком наименьшем a один из корней уравнения

$$x^2-2a(x-2)-4=0$$

в 5 раз больше другого?

Ответ: $1{,}2$.

12. Найдите остаток от деления многочлена $x^{21}+x^{10}+x^5+3$ на двучлен $x-1$.

Ответ: 6.

Вниманию проверяющих!
Оцениванию подлежат только правильно решенные задачи или задачи, содержащие идеи, ведущие к правильному решению.
Отдельные верные рассуждения, не приводящие к решению не оцениваются.

1. Лариса, Вера и Саша собирали грибы. Вера собрала грибов на 40% больше, чем Саша, но на 30% меньше, чем Лариса. На сколько процентов Саша собрал грибов меньше, чем Лариса?

Ответ: на 50%.

Решение. Пусть Саша собрал x грибов, а Лариса y грибов. Тогда Вера собрала $1{,}4x = 0{,}7y$ грибов. Отсюда $x = 0{,}5y$, т. е. Сашины грибы составляют 50% от Ларисиных.

Оценивание. Верное решение — 10 б.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4^x - 3^x}{x^2 + x + 1}} + \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{4^x - 3^x}} = \sqrt{4x - x^2}.$$

Ответ: 2.

Решение. В левой части уравнения записана (при допустимых значениях x) сумма положительных взаимно обратных чисел. Такая сумма не меньше 2. Правая часть не больше 2:

$$\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (x-2)^2} \leqslant 2.$$

Поэтому равенство возможно только, когда обе части равны 2.

$$\sqrt{4 - (x-2)^2} = 2 \iff x = 2.$$

Подстановка $x = 2$ в левую часть уравнения также даёт число 2. Значит, 2 — единственный корень уравнения.

Оценивание. Верное решение — 11 б. Если обнаружено, что обе части равны 2, а правая равна 2 только при $x = 2$, но не проверено, что и левая часть равна 2 при $x = 2$, то 8 б.

3. Найдите объём четырёугольной пирамиды $MABCD$, если известны координаты её вершин: $A(-4;0;1), B(-2;2;1), C(4;0;1), D(1;-3;1), M(4;4;4)$.

Ответ: 20.

Первое решение. Точки A, B, C, D лежат в плоскости $z = 1$. Высота пирамиды равна расстоянию от точки M до этой плоскости $h = 4 - 1 = 3$. Площадь основания пирамиды проще всего найти, сложив площади треугольников ABC и ADC. У этих треугольников общее основание $AC = 8$, а высоты соответственно равны 2 и 3. Поэтому $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (2+3) = 20$, а $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = 20$.

Оценивание. Верное решение — 11 б. За арифметические ошибки минус 2 б.

Второе решение. Возможно решение с использованием смешанного произведения и подсчетом соответствующих определителей. За правильно выписанные определители – 5 баллов, за правильно выполненный подсчет - 11.

4. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$(\cos x + \sin x)^2 (\cos^4 x + \sin^4 x) \geqslant 1.$$

Доказательство. Поскольку

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 1 + \sin 2x,$$

а

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x,$$

уместна замена $t = \sin 2x$. Из условия $0 < x < \frac{\pi}{2}$ следует, что $0 < t \leqslant 1$. Относительно новой переменной получаем неравенство $(1+t)(1-\frac{1}{2}t^2) \geqslant 1$, которое преобразуется к виду $t(t-1)(t+2) \leqslant 0$. На промежутке $(0; 1]$ это неравенство выполняется.

Оценивание. Верное решение — 12 б.

5. На координатной плоскости Oxy постройте фигуру, ограниченную линиями $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ и

$$y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5 - x^2 + 2\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}} \right),$$

и найдите её площадь.

Ответ: фигура изображена на рис. 1; её площадь равна $\dfrac{4\pi}{3} + 4 - \sqrt{3}$.

Решение. Обозначим $t = \sqrt{4 - x^2}$. Тогда $5 - x^2 = t^2 + 1$ и

$$y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{t^2 + 1 + 2t} + \sqrt{t^2 + 1 - 2t} \right) = \frac{1}{2}(|t+1| + |t-1|) = \begin{cases} t, & \text{если } t \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } 0 \leqslant t < 1. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$y = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & \text{если } \sqrt{4 - x^2} \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } \sqrt{4 - x^2} < 1. \end{cases}$$

График функции — объединение отрезков EA, BC и дуги окружности AB (рис. 1). Фигуру, площадь которой нужно найти, можно представить в виде объединения сектора круга AOB радиусом 2 и углом $120°$ и двух равных прямоугольных трапеций. Площадь сектора равна $\frac{1}{3} \cdot 4\pi$. Основания трапеции $OD = 2$, $BC = 2 - \sqrt{3}$, высота трапеции $DC = 1$, а её площадь $S_{ODBC} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$.

Оценивание. Верное решение — 13 б. Если фигура построена, но площадь её не найдена, ставить 8 б.

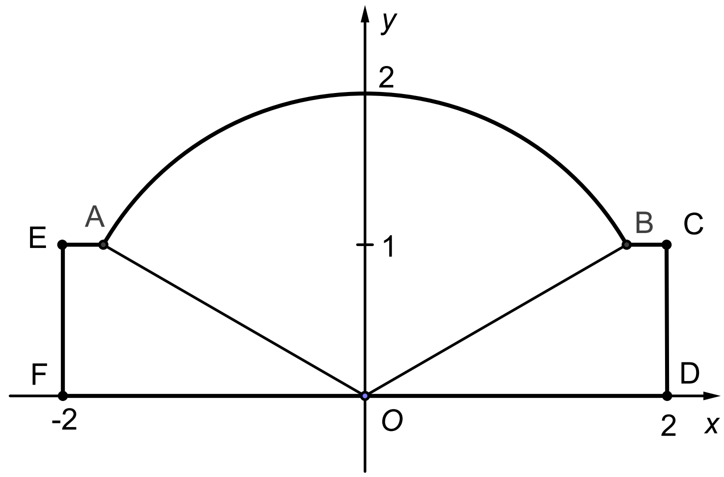


Рис. 1

6. В треугольнике ABC продолжение медианы BD пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке E. Найдите BD, если $AB = 7$, $BC = 9$, $BE = 13$.

Ответ: 5.

Решение. Положим $BD = x$, $ED = y$, $AD = CD = z$, $\angle ADB = \alpha$.

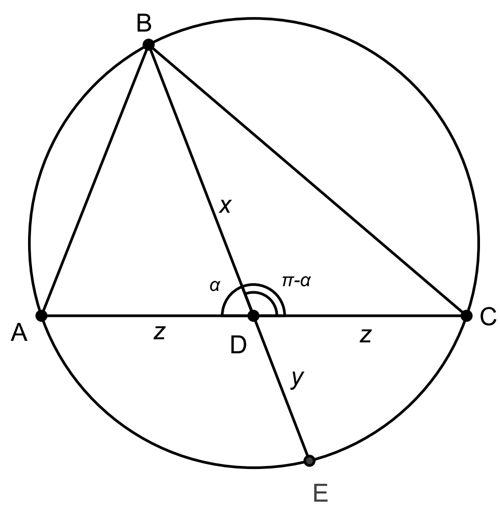


Рис. 2

По свойству пересекающихся хорд, $AD \cdot CD = BD \cdot ED$, т. е. $xy = z^2$. По теореме косинусов, применённой к треугольникам ABD и BDC,

$$AB^2 = 49 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\alpha; \quad BC^2 = 81 = x^2 + z^2 + 2xz\cos\alpha.$$

Складывая эти равенства, получим $x^2 + z^2 = 65$. Кроме того, $BE = x + y = 13$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = z^2; \\ x^2 + z^2 = 65; \\ x + y = 13. \end{cases}$$

Выражая из третьего уравнения y через x, а из второго z^2 через x^2, приходим к уравнению $x(13 - x) = 65 - x^2$, откуда $13x = 65$ и $x = 5$.

Оценивание. Верное решение — 14 б.

7. Найдите все простые числа p, для которых существуют такие натуральные числа m и n, что $p^m - 1 = n^3$.

Ответ: 2 и 3.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$p^m = (n+1)(n^2 - n + 1).$$

Число $n+1$ является делителем степени простого числа p и больше 1, поэтому $n+1$ кратно p. Заметим также, что $n^2 - n + 1 = p^k$, где $0 \leqslant k \leqslant m$.

Если $k = 0$, то $n = 1$, $p = 2$, $m = 1$.

Если $k > 0$, то число p является делителем чисел $n^2 - n + 1$ и $n + 1$. Поэтому p также делит число $3 = (n^2 - n + 1) - (n + 1)(n - 2)$. Значит, $p = 3$. При этом $m = n = 2$.

Оценивание. Верное решение — 14 б. Если подбором найдено одно из двух решений — 2 б., если оба — 3 б. (и при этом не доказано, что нет других решений).

8. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным прямолинейным направлениям. В 9 часов расстояние между ними было 20 км, в 9 ч 35 мин — 15 км, в 9 ч 55 мин — 13 км. Каким будет минимальное расстояние между пароходами?

Ответ: 12.

Решение. Можно считать, что радиус-векторы пароходов

$$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{v_1} t, \quad \boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{v_2} t + \boldsymbol{r_0},$$

где t — время (в часах), прошедшее после 9.00, $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ — векторы скоростей, $\boldsymbol{r_0}$ — вектор, направленный от первого парохода ко второму в 9.00.

Пусть $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}$. Тогда квадрат расстояния между пароходами в момент времени t равен

$$d^2 = |\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^2 = |\boldsymbol{b} t + \boldsymbol{r_0}|^2 = At^2 + Bt + 400,$$

где $A = \boldsymbol{b}^2, B = 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{r_0}$. Условие задачи даёт систему двух линейных уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} \left(\frac{7}{12}\right)^2 A + \left(\frac{7}{12}\right) B + 400 = 225, \\ \left(\frac{11}{12}\right)^2 A + \left(\frac{11}{12}\right) B + 400 = 169. \end{cases}$$

Из этой системы находим $A = 144, B = -384$. Отсюда (после выделения полного квадрата)

$$d^2 = (12t - 16)^2 + 144.$$

Значит, наименьшее расстояние между пароходами достигается при $t = 4/3$, т. е. в 10 ч 20 мин и равно 12 км.

Оценивание. Верное решение — 15 б. Если задача сведена к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными, но последняя не решена — 10 б. Если верно найдено расстояние между пароходами как функция времени, но не найдено её наименьшее значение — 13 б.