

13) а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

14) В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна **8**, а боковое ребро AA_1 равно **7**. На ребре CC_1 отмечена точка M , причём $CM = 1$.

а) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1 B_1 C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM .

15) Решите неравенство

$$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$$

16) Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, что $\angle BML = \angle BAC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

17) Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на **10%** по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на **10** млн. рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше **15** млн. рублей.

18) Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2(1+a)x + 2(1-a)y - 2a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.