

Задание №16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

1) (ЕГЭ-2015)

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

- а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P .

Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

- б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

2) (ЕГЭ-2016)

В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD , точка M — середина боковой стороны AB . Отрезки CE и DM пересекаются в точке O .

- а) Докажите, что площади четырехугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

- б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырехугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

3) (ЕГЭ-2019)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD , соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков), соответственно.

- а) Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.

- б) Найдите QN , если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.

4) (ЕГЭ-2014)

К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B . Через точку C , лежащую на отрезке AB , проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E , причем отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

- а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

- б) Найдите DE , если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

5) (ЕГЭ-2015)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причем меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

- б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

6) (ЕГЭ-2017)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.

- а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

- б) Найдите AD , если углы DAE и BAC равны, радиус второй окружности в четыре раза больше радиуса первой окружности и $AB = 2$.

7) (ЕГЭ-2017)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от точки A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

- а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

- б) Известно, что $\sin \angle AOC = \sqrt{15}/4$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK : KA$.

8) (ЕГЭ-2019)

Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй окружности в точке B . Луч BK пересекает первую окружность в точке D , луч AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

Ягубов.РФ